This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

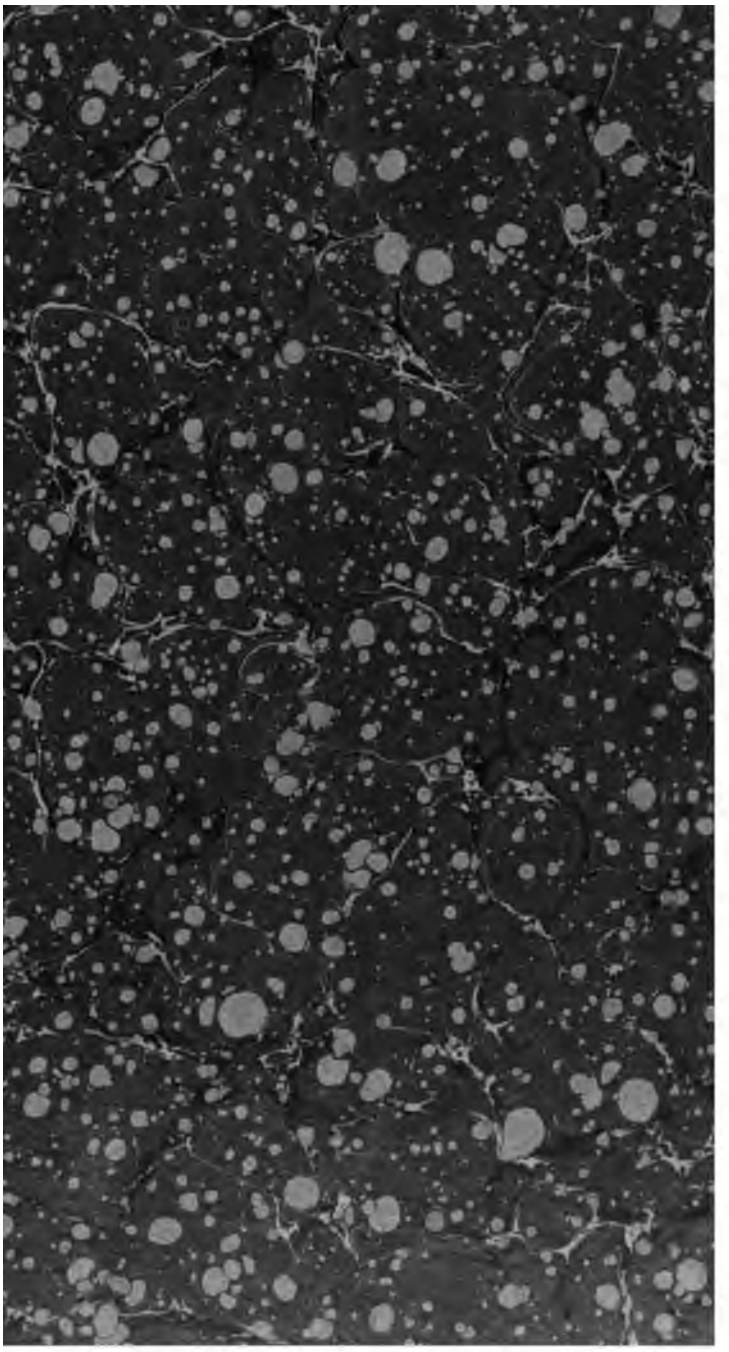
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

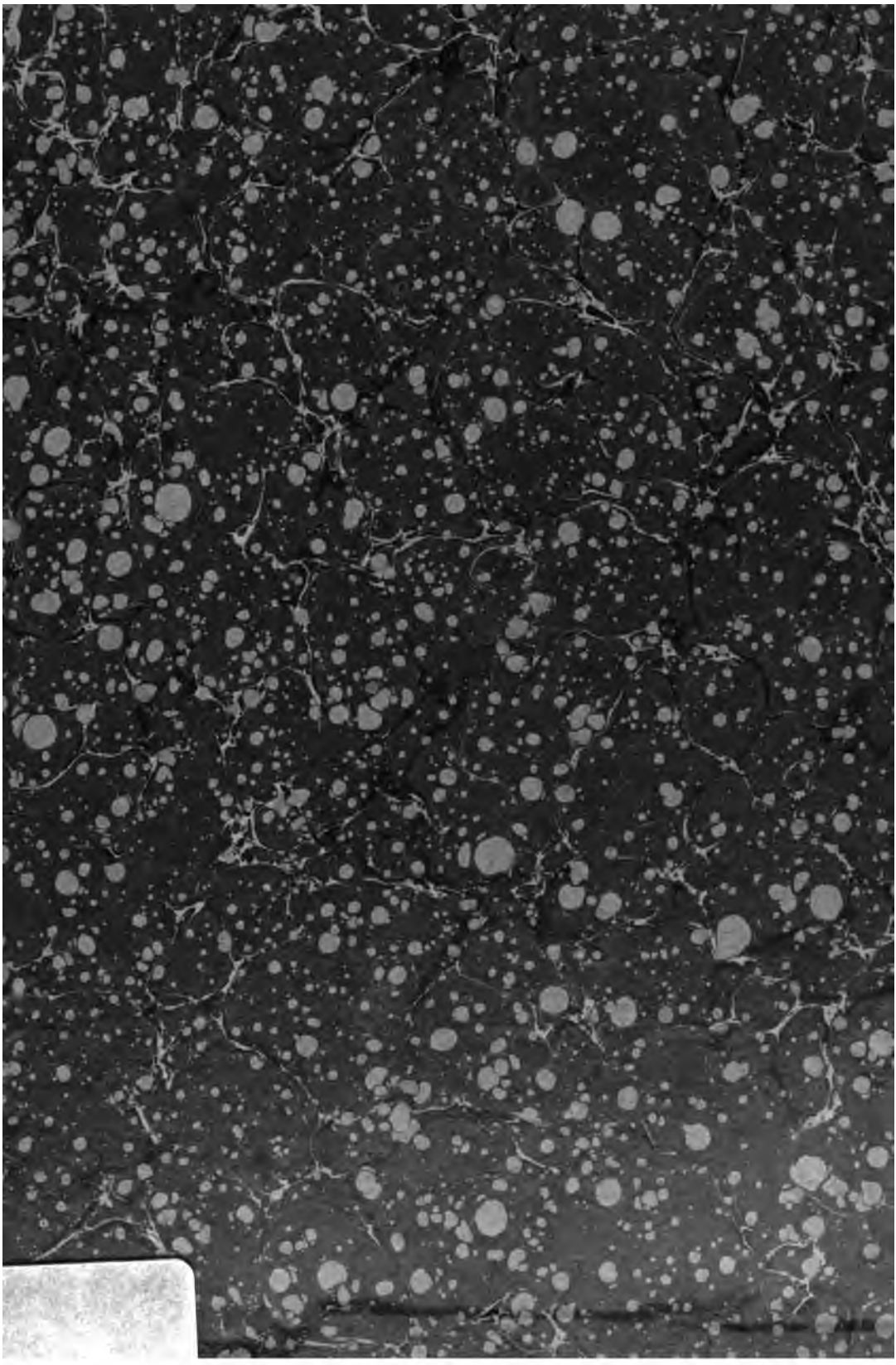
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

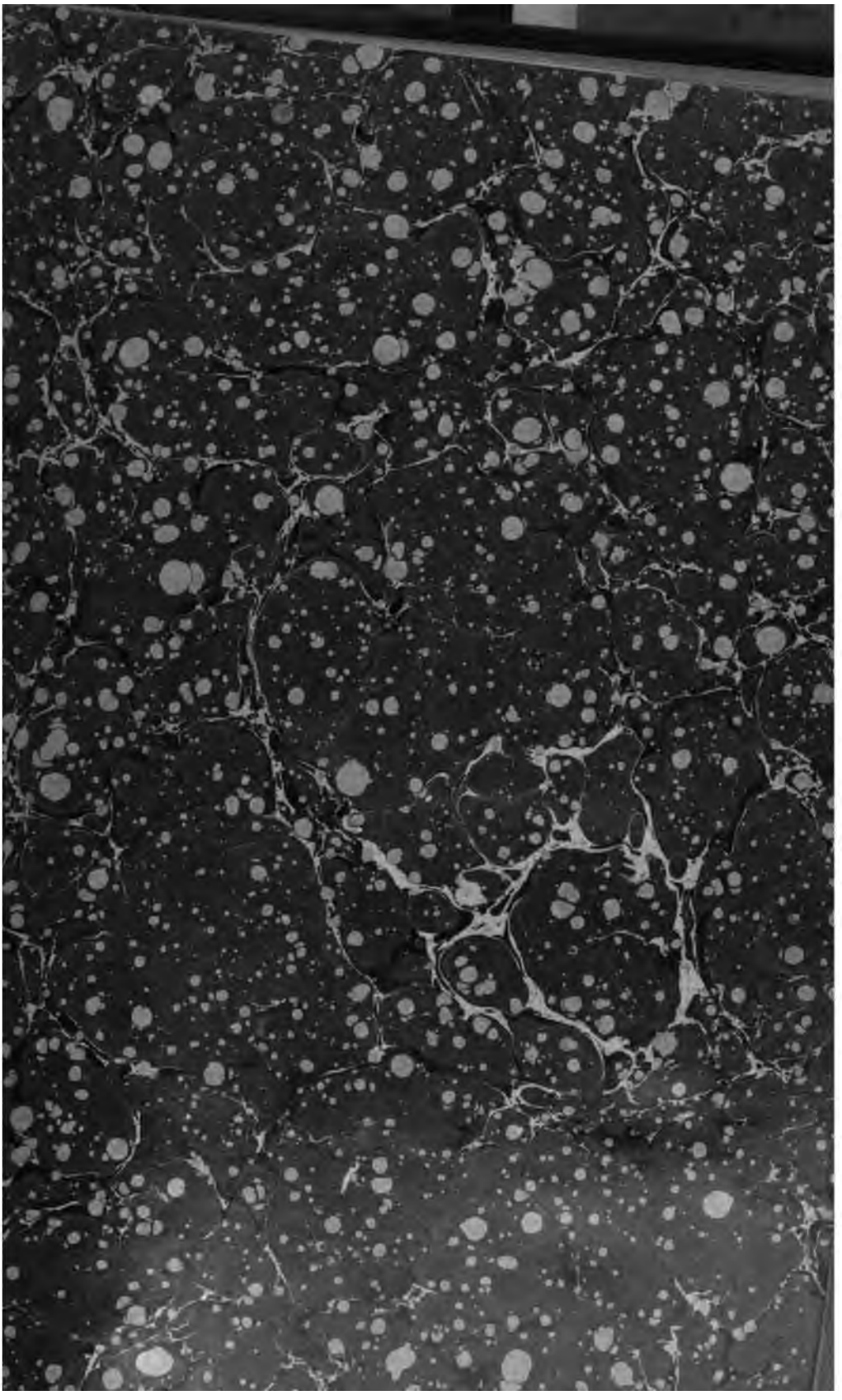
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

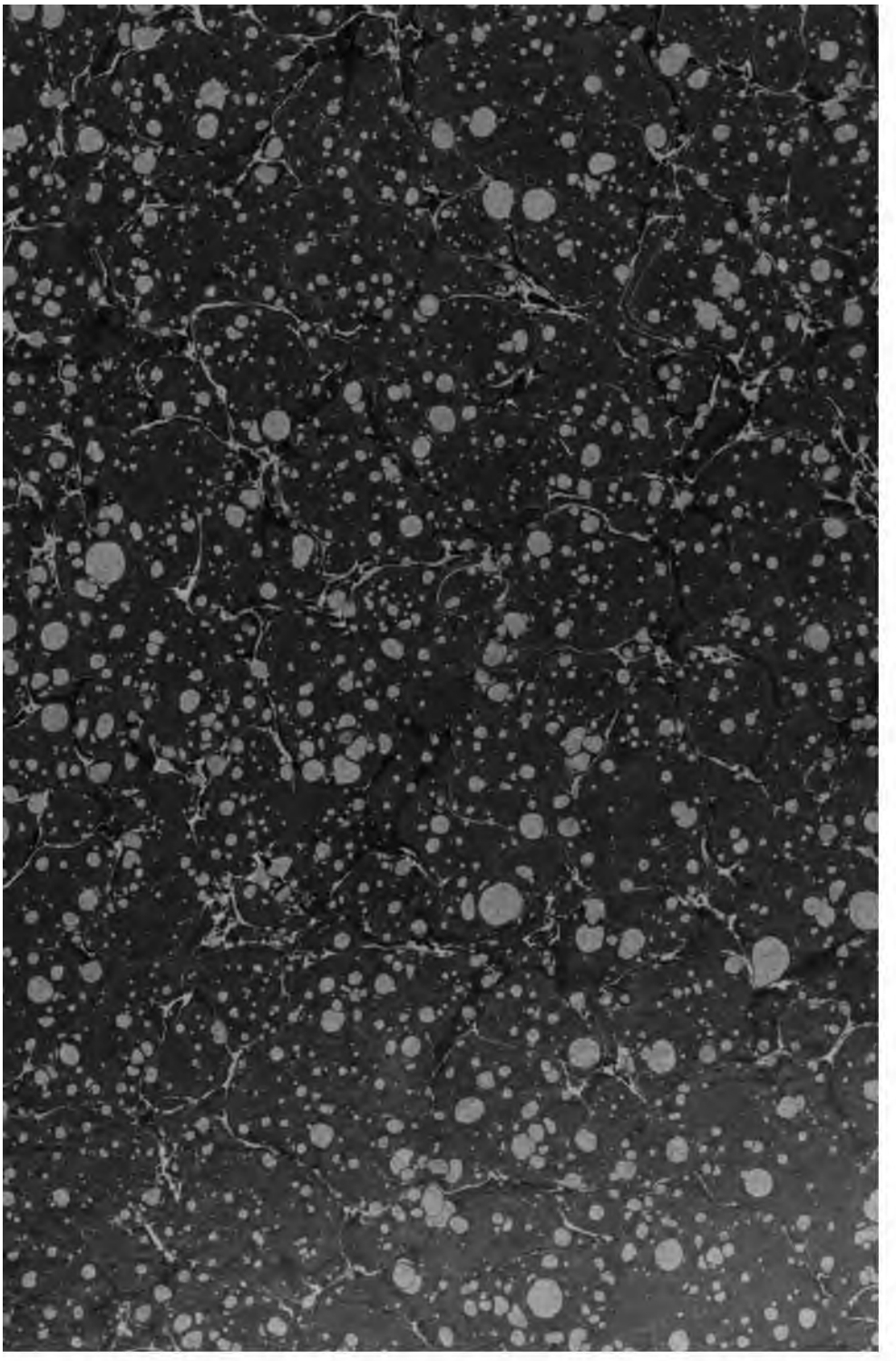
About Google Book Search

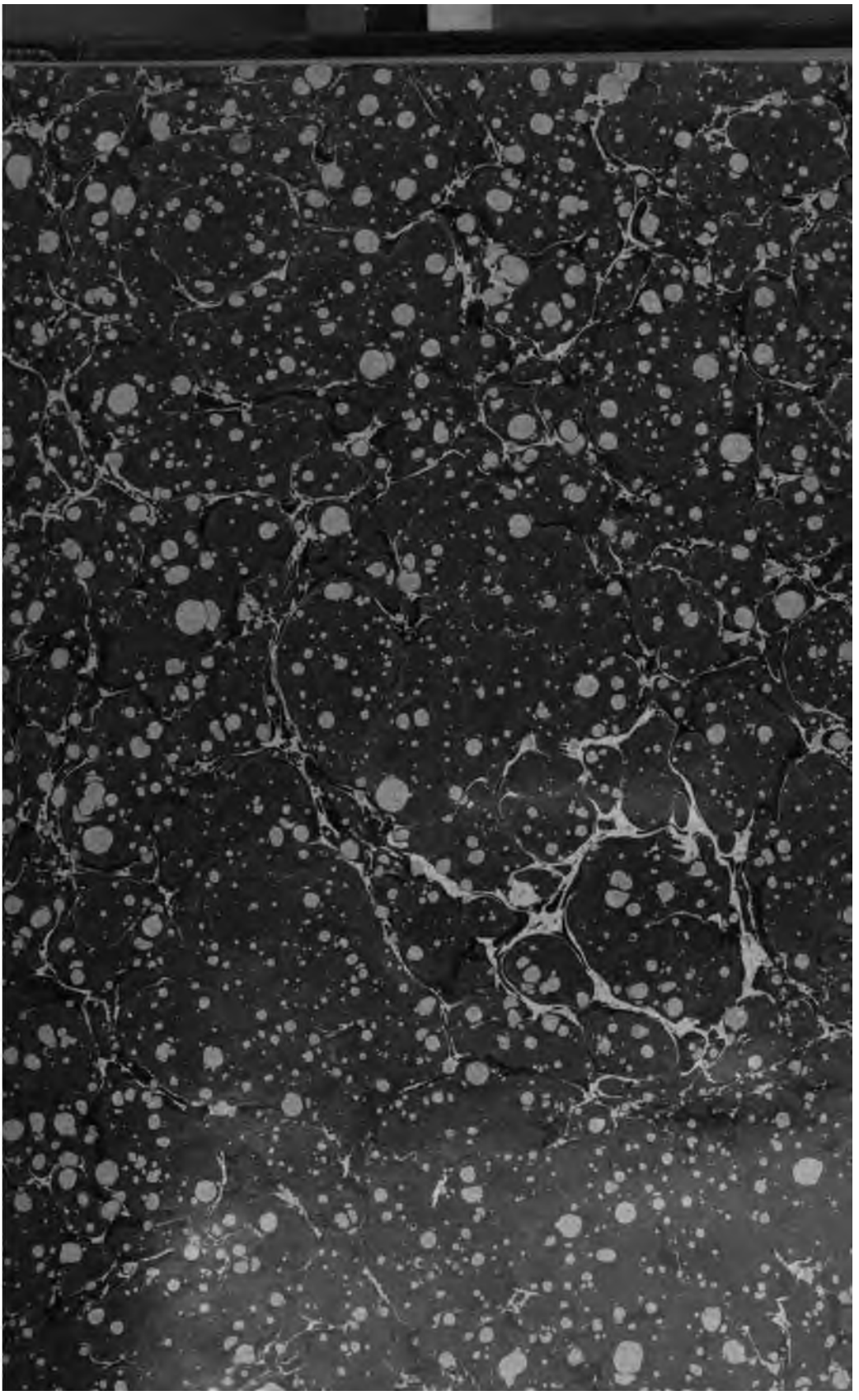
Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`











1069

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig.

48. Band.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1897.

LIBRARY OF THE
LELAND STANFORD JR. UNIVERSITY.

Q. 36525

Inhalt des achtundvierzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Seite

Basset, A. B., in Holyport, Berks. On the Stability of a Frictionless Liquid. Theory of Critical Planes 89

Bierbaum, Otto, in Brünn. Ueber Functionen zweier reeller Variablen . . 393

Castelnuovo, G., à Rome et **Enriques, F.**, à Bologne. Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques 241

Dedekind, R., in Braunschweig. Ueber Gruppen, deren sämmtliche Theiler Normaltheiler sind 548

Franel, J., à Zürich. Sur une formule fondamentale de Kronecker 595

Gérard, L., à Lyon. Construction du polygone régulier de 17 côtés au moyen du seul compas 390

Gubler, E., in Zürich. Ueber ein discontinuirliches Integral 37

Killing, Wilhelm, in Münster i/W. Ueber transfinite Zahlen 425

Klein, Felix, in Göttingen. Autographirte Vorlesungshefte, III 562

Korkine, A., à St. Pétersbourg. Sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre 317

Krause, M., in Dresden. Gustav Ferdinand Mehler † 603

Küpper, Carl, in Prag. Projective Erzeugung der Curven m^{ter} Ordnung C^m 401

Loewy, Alfred, in Rawitsch. Zur Theorie der linearen Substitutionen . . 97

Moore, Eliakim Hastings, in Chicago. Concerning Transcendentally Transcendental Functions 49

Müller, Emil, in Königsberg i/Pr. Ueber das gemischte Produkt 589

Netto, Eugen, in Giessen. Ueber die Irreductibilität ganzzahliger ganzer Functionen 82

Pasch, M., in Giessen. Zur projectiven Geometrie 111

Petrovitch, Michel, à Belgrade (Serbie). Sur les résidus des fonctions définies par les équations differentielles 75

Rados, Gustav, in Budapest. Zur Theorie der adjungirten Substitutionen 417

Réthy, Moritz, in Budapest. Ueber das Princip der kleinsten Action und das Hamilton'sche Princip 513

Reye, Th., in Strassburg i. E. Ueber quadratische Transformationen und rationale Flächen mit Kegelschnittschaaren 113

Seite

Ritter, E. † Ueber die hypergeometrische Function mit einem Nebenpunkt. (Mit einer Figurentafel) 1

Schur, Friedrich, in Aachen. Ueber ebene einfache Fachwerke 142

Simon, Max, in Strassburg i/E. Zwei Sätze zur nichteuklidischen Geometrie 607

Vivanti, G., in Messina. Sulle equazioni a derivate parziali del second' ordine a tre variabili indipendenti 474

Weber, H., in Strassburg. Ueber Zahlengruppen in algebraischen Körpern 433

Wiman, A., in Lund. Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene 195

Wirtinger, W., in Innsbruck. Beiträge zu Riemann's Integrationsmethode für hyperbolische Differentialgleichungen, und deren Anwendungen auf Schwingungsprobleme 365

Berichtigungen und Ergänzungen 608

Ueber die hypergeometrische Function mit einem Nebenpunkt*).

(Mit einer Figurentafel.)

Von

E. Ritter † in Göttingen.

In seiner Arbeit: „Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen“**) basirt Riemann die ganze Betrachtung der von ihm mit

$$P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{vmatrix}$$

benannten Function auf folgenden in Nr. 1 der genannten Arbeit ausgesprochenen, zur Definition dienenden Eigenschaften:

1) Sie ist für alle Werthe von x ausser a, b, c einändrig und endlich.

*) Die vorliegende Arbeit meines Freundes Dr. Ernst Ritter, Privatdocent in Göttingen, der am 22. September 1895 in New-York unerwartet verstarb, fand sich in seinem Nachlasse in einer deutschen und einer die ersten 4 Paragraphen enthaltenden englischen Bearbeitung vor. Dieselbe ist mir von der Redaction der Annalen übergeben worden, um sie für den Druck fertig zu stellen. Indem die spätere englische Bearbeitung im Einzelnen sich besser durchgearbeitet zeigte, habe ich in den §§ 1—4 im wesentlichen eine Uebertragung derselben vorgenommen unter möglichster Berücksichtigung des deutschen Textes. Die wenigen Anmerkungen, die ich selbst hinzufügen möchte, sind als solche bemerklich gemacht. Im übrigen ist an dieser oder jener Stelle eine Kürzung der Darstellung eingetreten; dies gilt insbesondere für die Figuren des § 4, wie in der Anm. pag. 27 noch näher ausgeführt ist. Eine Ungenauigkeit ist von mir bemerkt worden, wegen der man die Anm. pag. 30 vergleichen wolle. Die Beziehung dieser Abhandlung zu meiner eigenen pag. 15 erwähnten Arbeit „Die geometrische Theorie der symmetrischen S-Functionen mit einem einfachen oder zweifachen Nebenpunkt“, die ich bald zu veröffentlichen gedenke, behalte ich mir daselbst zu besprechen vor.

Aachen, im Januar 1896.

Schilling.

**) Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1857. Gesammelte Werke pag. 67.

2) Zwischen je 3 Zweigen P', P'', P''' besteht eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten:

$$c' P' + c'' P'' + c''' P''' = 0.$$

3) Die Function lässt sich in die Form $c_\alpha P^{(\alpha)} + c_{\alpha'} P^{(\alpha')}$ setzen, so dass $(x-a)^{-\alpha} P^{(\alpha)}$ und $(x-a)^{-\alpha'} P^{(\alpha')}$ für $x = a$ einändrig bleiben und weder Null noch unendlich werden; das Analoge gilt für die Stellen $x = b$ und $x = c$.

4) Für die Summe der 6 Exponenten gilt:

$$\alpha' + \alpha'' + \beta' + \beta'' + \gamma' + \gamma'' = 1.$$

Ferner wird die Voraussetzung gemacht, die man aber mit einer gewissen Modification der Angabe 3 fallen lassen kann, dass keine der Differenzen $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, $\gamma - \gamma'$ eine ganze Zahl sei.

Durch diese Riemann'schen Bedingungen ist die Function P so weit bestimmt, dass sie eine beliebige Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung ist:

$$\frac{d^2P}{dx^2} + \left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{x-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{x-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{x-c}\right)\frac{dP}{dx}$$
$$+\left(\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{x-a} + \frac{\beta\beta'(b-a)(b-c)}{x-b} + \frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{x-c}\right)$$
$$\cdot \frac{P}{(x-a)(x-b)(x-c)} = 0.$$

Aus zwei linear unabhängigen Lösungen P_1 und P_2 desselben setzt sich das allgemeinste Paar linear unabhängiger Lösungen mit 4 willkürlichen Constanten zusammen in der Form:

$$c_{11} P_1 + c_{12} P_2,$$
$$c_{21} P_1 + c_{22} P_2,$$

wo

$$c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21} \neq 0$$

ist. Wir sagen in diesem Sinne: *Das Riemann'sche Bedingungssystem definirt uns in eindeutiger Weise eine „binäre Functionsschaar $P = (P_1, P_2)$", d. h. die Gesammtheit der linearen homogenen Combinationen der Functionen P_1, P_2.*

Aendern wir nun die Bedingung 4 in der Weise, dass wir die Summe $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma'$ eine *beliebige* ganze Zahl sein lassen, die kleiner als 1 ist, etwa $1 - q$, so kann man die übrigen Bedingungen noch aufrecht erhalten, bekommt aber statt einer einzigen vielmehr ∞^q verschiedene Functionsschaaren, welche einer Differentialgleichung mit q willkürlichen Parametern genügen, nämlich einer solchen, die ausser den singulären Stellen a, b, c noch q weitere singuläre Stellen $r_1, r_2 \ldots r_q$ besitzt, bei deren Umkreisung aber die Lösungen P_1, P_2 sich reproduciren. Solche singuläre Stellen nenne

ich nach dem Vorgange von Herrn Klein „*Nebenpunkte*" der Differentialgleichung*).

Eine derartige Verallgemeinerung der Function P hat bereits Riemann selbst in Betracht gezogen. In seiner nachgelassenen Abhandlung: „Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung"**) bezeichnet er mit

$$Q\left|\begin{matrix}\alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma'\end{matrix}\; x\right|$$

eine in entsprechender Weise wie P definirte Function, nur dass die Exponentensumme gleich -1 anstatt $+1$ ist, so dass jene also eine Functionsschaar mit zwei Nebenpunkten ist.

Ich stelle mir nun in dieser Mittheilung *die Aufgabe, die entsprechenden Functionen mit nur einem Nebenpunkt, also mit der Exponentensumme* 0, *genauer zu untersuchen.*

§ 1.

Die hypergeometrische Differentialgleichung mit einem Nebenpunkt.

Es werde allgemein mit

$$Q\left|\begin{matrix}a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{matrix}\right|$$

eine nur bei a, b, c verzweigte Functionsschaar bezeichnet, welche mit Ausnahme der Stellen a, b, c überall holomorph ist und an den Stellen a, b, c bezw. die Exponenten λ', λ''; μ', μ''; ν', ν'' besitzt. Es wird vorausgesetzt, dass

$$\lambda' + \lambda'' + \mu' + \mu'' + \nu' + \nu'' = 0 \tag{1}$$

sei. Dann muss die Functionsschaar Q noch einen Nebenpunkt s besitzen, d. h. einen Punkt mit den Exponenten 0 und 2, während jeder gewöhnliche Punkt die Exponenten 0 und 1 hat. s ist dann also ein singulärer Punkt für die Differentialgleichung der Functionsschaar Q.

Die allgemeinste Differentialgleichung mit den singulären Punkten a, b, c, s und den Exponenten λ', λ''; μ', μ''; ν', ν''; 0, 2 lautet:

$$\begin{aligned}(2)\quad &\frac{d^2Q}{dz^2} + \left(\frac{1-\lambda'-\lambda''}{z-a} + \frac{1-\mu'-\mu''}{z-b} + \frac{1-\nu'-\nu''}{z-c} - \frac{1}{z-s}\right)\frac{dQ}{dz} \\ &+ \left(\frac{\lambda'\lambda''(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{\mu'\mu''(b-a)(b-c)}{z-b} + \frac{\nu'\nu''(c-a)(c-b)}{z-c} + \frac{A}{z-s}\right) \\ &\cdot \frac{Q}{(z-a)(z-b)(z-c)} = 0.\end{aligned}$$

*) Man sehe Klein, Vorlesung über die hypergeometrische Function. W. S. 1893/94, pag. 225.

**) Gesammelte Werke pag. 323.

In unserem Falle ist die willkürliche Constante A so zu bestimmen, dass in der Entwicklung der Lösungen Q an der Stelle s keine logarithmischen Glieder auftreten.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, dass A als Function von s der folgenden quadratischen Gleichung genügt:

$$(3)\quad A^2 - A(s-a)(s-b)(s-c)\left(\frac{\lambda'+\lambda''}{s-a} + \frac{\mu'+\mu''}{s-b} + \frac{\nu'+\nu''}{s-c}\right)$$
$$+(s-a)(s-b)(s-c)\left(\frac{\lambda'\lambda''(a-b)(a-c)}{s-a} + \frac{\mu'\mu''(b-a)(b-c)}{s-b}\right.$$
$$\left. + \frac{\nu'\nu''(c-a)(c-b)}{s-c}\right) = 0.$$

Es entsprechen also jeder vorgegebenen Lage s des Nebenpunktes im Allgemeinen zwei Werthe A und somit zwei verschiedene Functionsschaaren Q. *Die Functionsschaar Q ist gewissermassen eine zweideutige Function der Lage des Nebenpunktes s.* Will man eindeutige Bestimmtheit derselben durch die Lage des Nebenpunktes s haben, *so muss man s statt in der schlichten s-Ebene in einer zweifach überdeckten Riemann'schen Fläche deuten*, und zwar wird dieselbe, wie wir sogleich sehen werden, zwei Verzweigungspunkte haben.

Wir können die Lösung A der Gl. (3) vermittelst der Relation

$$\lambda' + \lambda'' + \mu' + \mu'' + \nu' + \nu'' = 0$$

und der Abkürzungen

$$\lambda' - \lambda'' = \lambda, \quad \mu' - \mu'' = \mu, \quad \nu' - \nu'' = \nu$$

in der Gestalt schreiben:

$$(4)\quad A = \frac{\lambda'+\lambda''}{2}(bc+as) + \frac{\mu'+\mu''}{2}(ac+bs) + \frac{\nu'+\nu''}{2}(ab+cs)$$
$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)\left(\frac{\lambda^2(a-b)(a-c)}{s-a} + \frac{\mu^2(b-a)(b-c)}{s-b} + \frac{\nu^2(c-a)(c-b)}{s-c}\right)}.$$

Die Verzweigungspunkte S der Riemann'schen Fläche erhalten wir jetzt, indem wir den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen gleich Null setzen. Es ergiebt sich:

$$(5)\quad S = \frac{(b+c)(a-b)(a-c)\lambda^2 + (a+c)(b-a)(b-c)\mu^2 + (a+b)(c-a)(c-b)\nu^2}{2\left((a-b)(a-c)\lambda^2 + (b-a)(b-c)\mu^2 + (c-a)(c-b)\nu^2\right)}$$
$$\pm\frac{(a-b)(a-c)(b-c)\sqrt{-(\lambda+\mu+\nu)(-\lambda+\mu+\nu)(\lambda-\mu+\nu)(\lambda+\mu-\nu)}}{2\left((a-b)(a-c)\lambda^2 + (b-a)(b-c)\mu^2 + (c-a)(c-b)\nu^2\right)}.$$

Es möge nun der Punkt s mit irgend einem der singulären Punkte a, b, c zusammenfallen. Für $s = a$ z. B. ergiebt sich:

$$A_1 = \lambda'(a-b)(a-c),$$
$$A_2 = \lambda''(a-b)(a-c).$$

Setzt man diese Werthe $s = a$, $A = A_1$, bezw. $A = A_2$ in die Gl. (2) ein, so geht sie über in die Differentialgleichung der gewöhnlichen Riemann'schen Function:

$$P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda''+1 & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix} \quad \text{für } A = A_1,$$

bezw.

$$P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda'+1 & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix} \quad \text{für } A = A_2.$$

Das Entsprechende gilt für $s = b$ oder $s = c$. Es ergiebt sich also das Resultat:

Die Function

$$Q\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}$$

enthält als Specialfälle 6 *verschiedene P-Functionen, welche sich ergeben, wenn s in dem einen oder anderen Blatte der Riemann'schen Fläche mit einem der singulären Punkte a, b, c zusammenfällt.* Sie sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{ll}
s=a & \left\{\begin{array}{ll} A=\lambda''(a-b)(a-c); & Q=P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda'+1 & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}, \\ A=\lambda'(a-b)(a-c); & Q=P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda''+1 & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}, \end{array}\right. \\
s=b & \left\{\begin{array}{ll} A=\mu''(b-a)(b-c); & Q=P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu'+1 & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}, \\ A=\mu'(b-a)(b-c); & Q=P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu''+1 & \nu'' & \end{vmatrix}, \end{array}\right. \\
s=c & \left\{\begin{array}{ll} A=\nu''(c-a)(c-b); & Q=P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu'+1 & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}, \\ A=\nu'(c-a)(c-b); & Q=P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu''+1 & \end{vmatrix}. \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Die angegebenen Formeln werden, freilich unter Verzicht auf ihre Symmetrie, sehr vereinfacht, wenn man *das Doppelverhältniss von z mit den Punkten a, b, c als unabhängige Variable einführt*

$$x = \frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}$$

und dementsprechend zugleich

$$r = \frac{(s-a)(c-b)}{(s-b)(c-a)}$$

setzt. Durch diese Substitution geht

$$P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}$$

über in

$$P\begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & x \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}.$$

Die Differentialgleichung erhält die Form:

$$(2') \quad \frac{d^2P}{dx^2} + \left(\frac{1-\lambda'-\lambda''}{x} + \frac{1-\nu'-\nu''}{x-1} - \frac{1}{x-r}\right)\frac{dP}{dx} + \left(-\frac{\lambda'\lambda''}{x} + \mu'\mu'' + \frac{\nu'\nu''}{x-1} + \frac{A'}{x-r}\right)\frac{P}{x(x-1)} = 0,$$

wo A' der Gleichung genügt:

$$(3') \quad A'^2 - A'r(r-1)\left(\frac{\lambda'+\lambda''}{r} + \frac{\nu'+\nu''}{r-1}\right) + r(r-1)\left(-\frac{\lambda'\lambda''}{r} + \mu'\mu'' + \frac{\nu'\nu''}{r-1}\right) = 0.$$

Die Lösungen derselben sind:

$$(4') \quad A' = -\frac{\lambda'+\lambda''}{2} - r\cdot\frac{\mu'+\mu''}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - (\lambda^2+\mu^2-\nu^2)r + \mu^2 r^2}.$$

Die Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche endlich sind:

$$(5') \quad R = \frac{\lambda^2+\mu^2-\nu^2 \pm \sqrt{-(\lambda+\mu+\nu)(-\lambda+\mu+\nu)(\lambda-\mu+\nu)(\lambda+\mu-\nu)}}{2\mu^2}.$$

§ 2.

Zusammenfallen der beiden Verzweigungspunkte.

Die Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche fallen zusammen, und die Fläche selbst zerfällt in zwei Blätter, wenn irgend eine der 4 Summen

$$\lambda+\mu+\nu, \quad -\lambda+\mu+\nu, \quad \lambda-\mu+\nu \quad \lambda+\mu-\nu$$

verschwindet.

Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir voraussetzen, dass *gerade die Summe* $\lambda + \mu + \nu$ *verschwindet*, indem wir ja die Exponenten λ', μ', ν' bezw. mit λ'', μ'', ν'' vertauschen können, ohne dass sich in der Definition der Functionsschaar Q etwas ändert. Die Bedingung $\lambda + \mu + \nu = 0$ liefert aber in Rücksicht auf die Gl. (1) die beiden Relationen:

$$\lambda' + \mu' + \nu' = 0$$

und

$$\lambda'' + \mu'' + \nu'' = 0.$$

Die Formeln (4) und (5) gehen jetzt über in

$$(8)\quad \begin{cases} A_1 = \lambda''(s-b)(s-c) + \mu''(s-a)(s-c) + \nu''(s-a)(s-b) \\ \quad = \lambda''(bc+as) + \mu''(ac+bs) + \nu''(ab+cs), \\ A_2 = \lambda'(s-b)(s-c) + \mu'(s-a)(s-c) + \nu'(s-a)(s-b) \\ \quad = \lambda'(bc+as) + \mu'(ac+bs) + \nu'(ab+cs), \end{cases}$$

$$(9)\quad S = -\frac{bc\lambda + ac\mu + ab\nu}{a\lambda + b\mu + c\nu}.$$

Während man ferner im allgemeinen Falle durch Wandernlassen des Nebenpunktes s von jeder der unter (6) angeführten P-Functionen zu jeder anderen gelangen kann, *zerfallen in unserem Ausnahmefalle die* 6 *Functionen in zwei getrennte Tripel von der Art, dass man von jeder Function eines Tripels nur zu den Functionen desselben Tripels gelangen kann.*

Wir erhalten sie für $s = a, b, c$, indem wir für A entweder den Werth A_1 oder A_2 substituiren:

Erstes Tripel, $A = A_1$:

$$(10)\quad \begin{cases} s = a,\ A = \lambda''(a-b)(a-c),\ Q = P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda'+1 & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}, \\ s = b,\ A = \mu''(b-a)(b-c),\ Q = P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu'+1 & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}, \\ s = c,\ A = \nu''(c-a)(c-b),\ Q = P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu'+1 & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Zweites Tripel, $A = A_2$:

$$(11)\quad \begin{cases} s = a,\ A = \lambda'(a-b)(a-c),\ Q = P \begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda''+1 & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}, \\ s = b,\ A = \mu'(b-a)(b-c),\ Q = P \begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu''+1 & \nu'' & \end{vmatrix}, \\ s = c,\ A = \nu'(c-a)(c-b),\ Q = P \begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu''+1 & \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Die Formeln (4′) und (5′) gehen über in:

$$(8')\quad \begin{cases} A_1' = -\lambda'' - \mu'' r, \\ A_2' = -\lambda' - \mu' r, \end{cases}$$

$$(9')\quad R = -\frac{\lambda}{\mu},$$

und die beiden Tripel der P-Functionen ergeben sich für folgende Werthe von r und A'.

Das erste Tripel ist bestimmt durch:

$$(10')\quad \begin{cases} r = 0, & A' = -\lambda'', \\ r = \infty, & A' = \infty, \text{ während jedoch } \lim_{r=\infty} \frac{A'}{r} = -\mu'' \text{ ist}, \\ r = 1, & A' = +\nu''; \end{cases}$$

das zweite Tripel durch:

$$(11')\quad \begin{cases} r = 0, & A' = -\lambda', \\ r = \infty, & A' = \infty, \text{ während } \lim_{r=\infty} \frac{A'}{r} = -\mu' \text{ ist}, \\ r = 1, & A' = +\nu'. \end{cases}$$

Diese Thatsache, dass im Ausnahmefalle die 6 in derselben Q-Function allgemein enthaltenen P-Functionen in zwei getrennte Tripel zerfallen, gestattet uns ferner einige wichtige Sätze der Theorie der P-Function selbst aufzustellen.

Wir nennen allgemein solche P-Functionen

$$P \begin{vmatrix} a & b & c & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & z \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \end{vmatrix}, \quad \alpha' + \alpha'' + \beta' + \beta'' + \gamma' + \gamma'' = 1,$$

„*verwandt*“, welche man aus einander erhalten kann, indem man den

ich nach dem Vorgange von Herrn Klein „*Nebenpunkte*“ der Differentialgleichung*).

Eine derartige Verallgemeinerung der Function P hat bereits Riemann selbst in Betracht gezogen. In seiner nachgelassenen Abhandlung: „Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung“**) bezeichnet er mit

$$Q\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \end{vmatrix}$$

eine in entsprechender Weise wie P definirte Function, nur dass die Exponentensumme gleich -1 anstatt $+1$ ist, so dass jene also eine Functionsschaar mit zwei Nebenpunkten ist.

Ich stelle mir nun in dieser Mittheilung *die Aufgabe, die entsprechenden Functionen mit nur einem Nebenpunkt, also mit der Exponentensumme* 0, *genauer zu untersuchen.*

§ 1.

Die hypergeometrische Differentialgleichung mit einem Nebenpunkt.

Es werde allgemein mit

$$Q\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}$$

eine nur bei a, b, c verzweigte Functionsschaar bezeichnet, welche mit Ausnahme der Stellen a, b, c überall holomorph ist und an den Stellen a, b, c bezw. die Exponenten λ', λ''; μ', μ''; ν', ν'' besitzt. Es wird vorausgesetzt, dass

$$\lambda' + \lambda'' + \mu' + \mu'' + \nu' + \nu'' = 0 \tag{1}$$

sei. Dann muss die Functionsschaar Q noch einen Nebenpunkt s besitzen, d. h. einen Punkt mit den Exponenten 0 und 2, während jeder gewöhnliche Punkt die Exponenten 0 und 1 hat. s ist dann also ein singulärer Punkt für die Differentialgleichung der Functionsschaar Q.

Die allgemeinste Differentialgleichung mit den singulären Punkten a, b, c, s und den Exponenten λ', λ''; μ', μ''; ν', ν''; 0, 2 lautet:

$$\begin{aligned} (2)\quad & \frac{d^2Q}{dz^2} + \left(\frac{1-\lambda'-\lambda''}{z-a} + \frac{1-\mu'-\mu''}{z-b} + \frac{1-\nu'-\nu''}{z-c} - \frac{1}{z-s}\right)\frac{dQ}{dz} \\ & + \left(\frac{\lambda'\lambda''(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{\mu'\mu''(b-a)(b-c)}{z-b} + \frac{\nu'\nu''(c-a)(c-b)}{z-c} + \frac{A}{z-s}\right) \\ & \cdot \frac{Q}{(z-a)(z-b)(z-c)} = 0. \end{aligned}$$

*) Man sehe Klein, Vorlesung über die hypergeometrische Function. W. S. 1893/94, pag. 225.

**) Gesammelte Werke pag. 323.

In unserem Falle ist die willkürliche Constante A so zu bestimmen, dass in der Entwicklung der Lösungen Q an der Stelle s keine logarithmischen Glieder auftreten.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, dass A als Function von s der folgenden quadratischen Gleichung genügt:

$$(3)\quad A^2 - A(s-a)(s-b)(s-c)\left(\frac{\lambda'+\lambda''}{s-a}+\frac{\mu'+\mu''}{s-b}+\frac{\nu'+\nu''}{s-c}\right)$$
$$+(s-a)(s-b)(s-c)\left(\frac{\lambda'\lambda''(a-b)(a-c)}{s-a}+\frac{\mu'\mu''(b-a)(b-c)}{s-b}\right.$$
$$\left.+\frac{\nu'\nu''(c-a)(c-b)}{s-c}\right)=0.$$

Es entsprechen also jeder vorgegebenen Lage s des Nebenpunktes im Allgemeinen zwei Werthe A und somit zwei verschiedene Functionsschaaren Q. *Die Functionsschaar Q ist gewissermassen eine zweideutige Function der Lage des Nebenpunktes s.* Will man eindeutige Bestimmtheit derselben durch die Lage des Nebenpunktes s haben, *so muss man s statt in der schlichten s-Ebene in einer zweifach überdeckten Riemann'schen Fläche deuten*, und zwar wird dieselbe, wie wir sogleich sehen werden, zwei Verzweigungspunkte haben.

Wir können die Lösung A der Gl. (3) vermittelst der Relation

$$\lambda' + \lambda'' + \mu' + \mu'' + \nu' + \nu'' = 0$$

und der Abkürzungen

$$\lambda' - \lambda'' = \lambda, \quad \mu' - \mu'' = \mu, \quad \nu' - \nu'' = \nu$$

in der Gestalt schreiben:

$$(4)\quad A=\frac{\lambda'+\lambda''}{2}(bc+as)+\frac{\mu'+\mu''}{2}(ac+bs)+\frac{\nu'+\nu''}{2}(ab+cs)$$
$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)\left(\frac{\lambda^2(a-b)(a-c)}{s-a}+\frac{\mu^2(b-a)(b-c)}{s-b}+\frac{\nu^2(c-a)(c-b)}{s-c}\right)}.$$

Die Verzweigungspunkte S der Riemann'schen Fläche erhalten wir jetzt, indem wir den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen gleich Null setzen. Es ergiebt sich:

$$(5)\quad S=\frac{(b+c)(a-b)(a-c)\lambda^2+(a+c)(b-a)(b-c)\mu^2+(a+b)(c-a)(c-b)\nu^2}{2\left((a-b)(a-c)\lambda^2+(b-a)(b-c)\mu^2+(c-a)(c-b)\nu^2\right)}$$
$$\pm\frac{(a-b)(a-c)(b-c)\sqrt{-(\lambda+\mu+\nu)(-\lambda+\mu+\nu)(\lambda-\mu+\nu)(\lambda+\mu-\nu)}}{2\left((a-b)(a-c)\lambda^2+(b-a)(b-c)\mu^2+(c-a)(c-b)\nu^2\right)}.$$

Es möge nun der Punkt s mit irgend einem der singulären Punkte a, b, c zusammenfallen. Für $s=a$ z. B. ergiebt sich:

$$A_1 = \lambda'(a-b)(a-c),$$
$$A_2 = \lambda''(a-b)(a-c).$$

Setzt man diese Werthe $s = a$, $A = A_1$, bezw. $A = A_2$ in die Gl. (2) ein, so geht sie über in die Differentialgleichung der gewöhnlichen Riemann'schen Function:

$$P\left|\begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda''+1 & \mu'' & \nu'' & \end{array}\right| \quad \text{für } A = A_1,$$

bezw.

$$P\left|\begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \lambda'+1 & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{array}\right| \quad \text{für } A = A_2.$$

Das Entsprechende gilt für $s = b$ oder $s = c$. Es ergiebt sich also das Resultat:

Die Function

$$Q\left|\begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{array}\right|$$

enthält als Specialfälle 6 *verschiedene P-Functionen, welche sich ergeben, wenn s in dem einen oder anderen Blatte der Riemann'schen Fläche mit einem der singulären Punkte a, b, c zusammenfällt.* Sie sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{ll}
s=a & \left\{\begin{array}{ll} A=\lambda''(a-b)(a-c); & Q=P\left|\begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \lambda'+1 & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{array}\right|, \\ A=\lambda'(a-b)(a-c); & Q=P\left|\begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda''+1 & \mu'' & \nu'' & \end{array}\right|, \end{array}\right. \\
s=b & \left\{\begin{array}{ll} A=\mu''(b-a)(b-c); & Q=P\left|\begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \lambda' & \mu'+1 & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{array}\right|, \\ A=\mu'(b-a)(b-c); & Q=P\left|\begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu''+1 & \nu'' & \end{array}\right|, \end{array}\right. \\
s=c & \left\{\begin{array}{ll} A=\nu''(c-a)(c-b); & Q=P\left|\begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu'+1 & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{array}\right|, \\ A=\nu'(c-a)(c-b); & Q=P\left|\begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu''+1 & \end{array}\right|. \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

1069

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig.

48. Band.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1897.

$\alpha' + \beta' + \gamma'$, $\alpha'' + \beta' + \gamma'$, $\alpha' + \beta'' + \gamma''$, $\alpha' + \beta' + \gamma''$ gleich 1 ist. Es würden so zunächst 16 Classen möglich zu sein scheinen, je nachdem jede einzelne dieser Summen > 0 oder $\leqq 0$ ist. Doch sind die folgenden beiden Classen von vornherein unmöglich:

$\alpha' + \beta' + \gamma' > 0$, $\alpha'' + \beta' + \gamma' \leqq 0$, $\alpha' + \beta'' + \gamma' \leqq 0$, $\alpha' + \beta' + \gamma'' \leqq 0$

und

$\alpha' + \beta' + \gamma' \leqq 0$, $\alpha'' + \beta' + \gamma' > 0$, $\alpha' + \beta'' + \gamma' > 0$, $\alpha' + \beta' + \gamma'' > 0$,

weil sie mit der Gleichung $\alpha' + \alpha'' + \beta' + \beta'' + \gamma' + \gamma'' = 1$ im Widerspruch stehen. Ferner sind manche der übrigen Classen mit einander identisch, so dass sich schliesslich als Resultat ergiebt:

Wenn α, β, γ ganzzahlig sind, während sie zugleich eine ungerade Summe haben, dann giebt es 4 Classen verwandter Functionen, welche sich durch die folgenden Bedingungen umgränzen lassen:

I.	$\alpha' + \beta' + \gamma' > 0$,	$\alpha'' + \beta' + \gamma' > 0$,	$\alpha' + \beta'' + \gamma' > 0$,	$\alpha' + \beta' + \gamma'' >$
	$\alpha'' + \beta'' + \gamma'' \leqq 0$,	$\alpha' + \beta'' + \gamma'' \leqq 0$,	$\alpha'' + \beta' + \gamma'' \leqq 0$,	$\alpha'' + \beta'' + \gamma' \leqq$
	oder	oder	oder	oder
	$\alpha + \beta + \gamma > 0$,	$-\alpha + \beta + \gamma < 0$,	$\alpha - \beta + \gamma > 0$,	$\alpha + \beta - \gamma > 0$.
II.	$\alpha' + \beta' + \gamma' > 0$,	$\alpha'' + \beta' + \gamma' \leqq 0$,	$\alpha' + \beta'' + \gamma' > 0$,	$\alpha' + \beta' + \gamma'' >$
	$\alpha'' + \beta'' + \gamma'' \leqq 0$,	$\alpha' + \beta'' + \gamma'' > 0$,	$\alpha'' + \beta' + \gamma'' \leqq 0$,	$\alpha'' + \beta'' + \gamma' \leqq$
	oder	oder	oder	oder
	$\alpha + \beta + \gamma > 0$,	$-\alpha + \beta + \gamma < 0$,	$\alpha - \beta + \gamma > 0$,	$\alpha + \beta - \gamma > 0$.
III.	$\alpha' + \beta' + \gamma' > 0$,	$\alpha'' + \beta' + \gamma' > 0$,	$\alpha' + \beta'' + \gamma' \leqq 0$,	$\alpha' + \beta' + \gamma'' >$
	$\alpha'' + \beta'' + \gamma'' \leqq 0$,	$\alpha' + \beta'' + \gamma'' \leqq 0$,	$\alpha'' + \beta' + \gamma'' > 0$,	$\alpha'' + \beta'' + \gamma' \leqq$
	oder	oder	oder	oder
	$\alpha + \beta + \gamma > 0$,	$-\alpha + \beta + \gamma > 0$,	$\alpha - \beta + \gamma < 0$,	$\alpha + \beta - \gamma > 0$
IV.	$\alpha' + \beta' + \gamma' > 0$,	$\alpha'' + \beta' + \gamma' > 0$,	$\alpha' + \beta'' + \gamma' > 0$,	$\alpha' + \beta' + \gamma'' \leqq$
	$\alpha'' + \beta'' + \gamma'' \leqq 0$,	$\alpha' + \beta'' + \gamma'' \leqq 0$,	$\alpha'' + \beta' + \gamma'' \leqq 0$,	$\alpha'' + \beta'' + \gamma' >$
	oder	oder	oder	oder
	$\alpha + \beta + \gamma > 0$,	$-\alpha + \beta + \gamma > 0$,	$\alpha - \beta + \gamma > 0$,	$\alpha + \beta - \gamma > 0$.

Es ist bemerkenswerth, dass Riemann selbst (der ja ganzzahlige Exponentendifferenzen ausschliesst) die Eigenart des Ausnahmefalles übersehen hat, dass die eine Classe verwandter Functionen, die es im allgemeinen Falle giebt, sich in zwei solche Classen scheidet. Auf diese Lücke in den Betrachtungen Riemann's hat zuerst Herr Klein aufmerksam gemacht in seiner Vorlesung über die hypergeometrische

Function, W. S. 93/94, pag. 413. Das Criterium für die Verwandtschaft zweier Functionen des Ausnahmefalles hat dann Frl. Winston im Annalen Bd. 46, pag. 157—160 aufgestellt und zwar vermittelst der Darstellung der P-Function durch hypergeometrische Reihen. Jedoch ist der höhere singuläre Fall, in dem einer oder alle drei Exponentendifferenzen ganzzahlig sind, von ihr nicht behandelt worden. Das vollständige Criterium für verwandte Functionen im Ausnahmefalle, also auch für ganzzahlige Exponenten, giebt dann Herr Schilling im § 7 seiner Arbeit: Die geometrische Theorie der Schwarz'schen s-Function für complexe Exponenten (Zweite Abhandlung) Math. Ann. Bd. 46, pag. 538, 1895. Dort findet er dieselben Resultate wie ich, jedoch auf ganz anderem Wege.

§ 3.

Lineare Darstellung durch zwei specielle Q-Functionen.

Es seien Q', Q'', Q''' drei „*benachbarte*" Q-Functionen, d. h. man soll jede aus den anderen durch Wandernlassen des Nebenpunktes s mit Festhalten der Stellen a, b, c und ihrer Exponenten erzeugen können. Hierfür genügt im allgemeinen Falle, dass die Exponenten derselben übereinstimmen, im Ausnahmefalle dagegen müssen die Differentialgleichungen, denen Q', Q'', Q''' genügen, denselben der beiden hier analytisch getrennten Ausdrücke A_1, A_2 enthalten, die auf Seite 7 angegeben sind.

Im *allgemeinen* Falle ist ferner durch die Exponenten λ', λ'', μ', μ'', ν', ν'' die Gruppe der Substitutionen, welche zwei Zweige Q_1, Q_2 der Schaar Q bei Umläufen von z erleiden, so weit bestimmt, dass man sie durch eine geeignete Auswahl der Zweige Q_1, Q_2 immer auf eine einzige wohlbestimmte Normalform bringen kann. Dementsprechend kann man aus jeder Functionsschaar Q', Q'', Q''' zwei Zweige Q_1', Q_2'; Q_1'', Q_2''; Q_1''', Q_2''' so auswählen, dass sie bei irgend welchen Umläufen von z geradezu stets dieselben Substitutionen erleiden.

Anders im *Ausnahmefalle*, wenn eine der Summen $\lambda' + \mu' + \nu'$, $\lambda'' + \mu' + \nu'$, $\lambda' + \mu'' + \nu'$, $\lambda' + \mu' + \nu''$ gleich 0 ist. Dann ist die Gruppe durch Angabe der Exponenten noch nicht eindeutig bestimmt, sondern sie kann immer nur auf eine von zwei möglichen Normalformen gebracht werden, die nicht durch eine lineare Transformation in einander überführbar sind.

Genaueres hierüber wird man in einer demnächst erscheinenden Abhandlung*) von Herrn Schilling finden, der die Gruppen der

*) „Die geometrische Theorie der symmetrischen S-Functionen mit einem einfachen oder zweifachen Nebenpunkt". — Die im Texte von Ritter angeführten Gruppensätze sind jedoch nur im Allgemeinen richtig, indem sie in gewissen

Q-Functionen von geometrischer Seite her zu untersuchen unternommen hat; ich werde daher in dieser Arbeit von den geometrischen Beziehungen nur das Nothwendigste bringen, was zum Verständniss der analytischen Unterscheidungen unumgänglich nöthig ist, und auch dies nur beispielsweise. Die geometrischen Figuren mögen gleichsam nur zur Illustration dienen, nicht zum Beweise der Resultate, die auf analytischem Wege gefunden sind. —

Wir kehren sogleich zu unserem Gegenstande zurück. Mögen ein oder zwei Möglichkeiten für die Gruppe der Q-Functionen vorliegen, wenn man den Nebenpunkt s continuirlich wandern lässt, kann man die Auswahl der Zweige Q_1, Q_2 in jedem Augenblicke so treffen, dass ihre Substitutionen dieselben bleiben, wie zu Anfang. Daraus folgt:

Wenn Q', Q'', Q''' in dem oben definirten Sinne benachbarte Q-Functionen sind, so kann man drei entsprechende Zweigpaare Q_1', Q_2'; Q_1'', Q_2''; Q_1''', Q_2''' so auswählen, dass sie bei denselben Umläufen von z immer dieselben Substitutionen erleiden.

Bildet man nun mit den irgendwie ausgewählten entsprechenden Zweigen die Determinanten D_{12}, D_{23}, D_{31} der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} Q_1' & Q_1'' & Q_1''' \\ Q_2' & Q_2'' & Q_2''' \end{matrix} \right\|,$$

so folgt aus der Gleichheit der Gruppe, dass es „multiplicative Functionen“*) in der z-Ebene sind, die sich bei Umlauf des Argumentes um einen der drei Punkte a, b, c nur mit der Determinante der zugehörigen Substitution multipliciren.

Des Genaueren folgt aus dem definitionsgemässen Verhalten der Q', Q'', Q''' an den einzelnen Stellen der z-Ebene und aus der Gleichung $\lambda' + \lambda'' + \mu' + \mu'' + \nu' + \nu'' = 0$, dass die D_{ik} von der Gestalt sind:

$$D_{ik} = \alpha_{ik} \cdot (z-a)^{\lambda'+\lambda''} (z-b)^{\mu'+\mu''} (z-c)^{\nu'+\nu''},$$

unter α_{ik} Constante verstanden, die sämmtlich von Null verschieden sind, wenn die drei Schaaren Q', Q'', Q''' wirklich von einander verschieden sind.

Bedeuten Q', Q'', Q''' drei beliebige, aber entsprechende Zweige der drei Schaaren, so ist identisch:

$$\begin{vmatrix} Q' & Q'' & Q''' \\ Q_1' & Q_1'' & Q_1''' \\ Q_2' & Q_2'' & Q_2''' \end{vmatrix} = 0,$$

Fällen ganzzahliger Exponenten Ausnahmen erleiden. Vgl. den diesbezüglichen Paragraphen meiner Arbeit. — Ich habe übrigens bisher nur die Gruppen für den sogenannten „symmetrischen“ Fall behandelt. Schilling.

*) Wegen der Bezeichnung vgl. meine Arbeit in Math. Ann. Bd. 44, 1894. Appell, Journal de Math. III, 9, Acta math. 13, 1890, spricht von „fonctions à multiplicateurs“.

also

$$\alpha_{23} Q' + \alpha_{31} Q'' + \alpha_{12} Q''' = 0.$$

Zwischen irgend drei benachbarten Q-Functionen besteht also eine lineare Relation mit constanten Coefficienten. Infolgedessen kann man die Q-Function mit beliebiger Lage des Nebenpunktes s durch irgend zwei Functionen Q', Q'' mit specieller Lage des Nebenpunktes in der Form zusammensetzen:

$$Q = \alpha_1 Q' + \alpha_2 Q'', \tag{12}$$

wo α_1 und α_2 Constante sind.

Umgekehrt ist jede solche lineare Verbindung zweier Q-Schaaren wieder eine Schaar, die allen in der Definition der Q-Schaaren angegebenen Bedingungen genügt, also selbst eine Q-Schaar.

Als Fundamentalschaaren Q', Q'' kann man etwa irgend zwei der sechs, bezw. im Ausnahmefalle der drei als Specialfälle der Q-Function auftretenden P-Functionen wählen. Wir wollen zunächst den *allgemeinen Fall* behandeln. Es sei, um eine bestimmte Wahl zu treffen:

$$\begin{cases} Q' = P \begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda'+1 & \mu' & \nu' & s \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}, \\ Q'' = P \begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu'+1 & \nu' & s \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}. \end{cases} \tag{13}$$

Greife ich irgend einen Zweig Q_1' von Q' heraus, so ist hierdurch der entsprechende Zweig Q_1'' von Q'' erst bis auf eine beliebige multiplicative Constante bestimmt; lege ich diese aber einmal für irgend ein Paar entsprechender Zweige Q_1', Q_1'' fest, so ist zu jedem beliebigen Zweige Q' der ersten Schaar der entsprechende Zweig Q'' der zweiten Schaar vollständig bestimmt. Eine solche Festlegung der entsprechenden Zweige ist in unserem Falle deswegen nothwendig, weil erst dann zu jedem Werte des Verhältnisses $\alpha_1 : \alpha_2$ eine bestimmte Functionsschaar Q gehören kann*).

Wenn dies aber geschehen ist, so gehört zu jedem Werte des Verhältnisses $\alpha_1 : \alpha_2$ eine und nur eine Schaar Q, also auch nur eine Lage des Punktes s; umgekehrt gehören zu jeder Lage des Punktes s im Allgemeinen zwei Scharen Q, also zwei Werte des Verhältnisses

*) Doch wolle man beachten, dass die Werte α_1 und α_2 selbst für die beiden linear unabhängigen Zweige keineswegs dieselben zu sein brauchen, wenn nur ihr Verhältnis das nämliche ist. Wir können also sehr wohl für die Zusammensetzung aus den zweiten Zweigen noch einen beliebigen constanten Proportionalitätsfactor zu α_1 und α_2 hinzufügen; dies wird späterhin für uns noch wichtig sein. Vgl. die Anm. zu pag. 30. Schilling.

$\alpha_1 : \alpha_2$. Daraus folgt, dass zwischen s und $\alpha_1 : \alpha_2$ eine Relation dieser Art bestehen muss:

$$s = \frac{A_1\alpha_1^2 + 2B_1\alpha_1\alpha_2 + C_1\alpha_2^2}{A_2\alpha_1^2 + 2B_2\alpha_1\alpha_2 + C_2\alpha_2^2}.$$

Als entsprechende Zweige Q' und Q'' will ich folgende beiden durch hypergeometrische Reihen dargestellten Functionen auswählen:

$$(14)\quad \begin{cases} Q_1' = (\lambda''+\mu'+\nu')\cdot x^{\lambda'+1}(1-x)^{\nu'}\cdot F(\lambda'+\mu'+\nu'+1,\ \lambda'+\mu''+\nu'+1,\ \lambda+2 \\ Q_1'' = (\lambda+1)\cdot x^{\lambda'}(1-x)^{\nu'}\cdot F(\lambda'+\mu'+\nu'+1,\ \lambda'+\mu''+\nu',\ \lambda+1,\ x), \end{cases}$$

wo $x = \frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}$ ist.

Wir können nun durch Reihenvergleichung leicht diejenigen speciellen Werthe des Verhältnisses $\alpha_1 : \alpha_2$ finden, für welche sich die übrigen 4 im Kreise enthaltenen P-Functionen ergeben. Die dem Zweige Q_1' oder Q_1'' entsprechenden Zweige Q_1 aller 6 P-Functionen sind nämlich bis auf beliebige constante Factoren durch folgende hypergeometrische Reihen auszudrücken:

$$P_1\begin{vmatrix} \lambda'+1 & \mu' & \nu' & \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & x \end{vmatrix}$$
$$= x^{\lambda'+1}(1-x)^{\nu'}\cdot F(\lambda'+\mu'+\nu'+1,\ \lambda'+\mu''+\nu'+1,\ \lambda+2,\ x),$$

$$P_1\begin{vmatrix} \lambda' & \mu' & \nu' & \\ \lambda''+1 & \mu'' & \nu'' & x \end{vmatrix}$$
$$= x^{\lambda'}(1-x)^{\nu'}\cdot F(\lambda'+\mu'+\nu',\ \lambda'+\mu''+\nu',\ \lambda,\ x),$$

$$P_1\begin{vmatrix} \lambda' & \mu'+1 & \nu' & \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & x \end{vmatrix}$$
$$= x^{\lambda'}(1-x)^{\nu'}\cdot F(\lambda'+\mu'+\nu'+1,\ \lambda'+\mu''+\nu',\ \lambda+1,\ x),$$

$$P_1\begin{vmatrix} \lambda' & \mu' & \nu' & \\ \lambda'' & \mu''+1 & \nu'' & x \end{vmatrix}$$
$$= x^{\lambda'}(1-x)^{\nu'}\cdot F(\lambda'+\mu'+\nu',\ \lambda'+\mu''+\nu'+1,\ \lambda+1,\ x),$$

$$P_1\begin{vmatrix} \lambda' & \mu' & \nu'+1 & \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & x \end{vmatrix}$$
$$= x^{\lambda'}(1-x)^{\nu'+1}\cdot F(\lambda'+\mu'+\nu'+1,\ \lambda'+\mu''+\nu'+1,\ \lambda+1,\ x),$$

$$P_1\begin{vmatrix} \lambda' & \mu' & \nu' & \\ \lambda'' & \mu'' & \nu''+1 & x \end{vmatrix}.$$
$$= x^{\lambda'}(1-x)^{\nu'}\cdot F(\lambda'+\mu'+\nu',\ \lambda'+\mu''+\nu',\ \lambda+1,\ x).$$

Durch Reihenvergleichung findet man, dass sich diese 6 Reihen aus denen für Q_1' und Q_1'' ergeben, wenn man der Reihe nach setzt:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 : \alpha_2 &= 1 : 0 \\ \alpha_1 : \alpha_2 &= (\lambda' + \mu'' + \nu') : \lambda \\ &= (\lambda - \mu + \nu) : 2\lambda \end{aligned}\right\} \quad s = a, \quad r = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 : \alpha_2 &= 0 : 1 \\ \alpha_1 : \alpha_2 &= \mu : (\lambda'' + \mu' + \nu') \\ &= 2\mu : (-\lambda + \mu + \nu) \end{aligned}\right\} \quad s = b, \quad r = \infty,$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 : \alpha_2 &= 1 : 1 \\ \alpha_1 : \alpha_2 &= (\lambda' + \mu'' + \nu') : (\lambda' + \mu'' + \nu'') \\ &= (\lambda - \mu + \nu) : (\lambda - \mu - \nu) \end{aligned}\right\} \quad s = c, \quad r = 1,$$

wo

$$r = \frac{(s-a)(c-b)}{(s-b)(c-a)}$$

ist.

Aus diesen Beziehungen bestimmen sich dann leicht die Constanten der Relation zwischen s oder r und $\alpha_1 : \alpha_2$. Man findet:

$$(16)\quad s = \frac{(-\lambda+\mu+\nu)a(b-c)\alpha_1^2 - 2\big(\mu a(b-c) + \lambda b(c-a)\big)\alpha_1\alpha_2 + (\lambda-\mu+\nu)b(c-a)\alpha_2^2}{(-\lambda+\mu+\nu)(b-c)\alpha_1^2 - 2\big(\mu(b-c) + \lambda(c-a)\big)\alpha_1\alpha_2 + (\lambda-\mu+\nu)(c-a)\alpha_2^2}$$

$$(16')\quad r = \frac{-2\lambda\alpha_1\alpha_2 + (\lambda-\mu+\nu)\alpha_2^2}{(-\lambda+\mu+\nu)\alpha_1^2 - 2\mu\alpha_1\alpha_2}.$$

Durch Auflösung nach $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ findet man:

$$(17)\quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{-\big(\mu a(b-c) + \lambda b(c-a)\big) + s\big(\mu(b-c) + \lambda(c-a)\big)}{(\lambda-\mu+\nu)(s-b)(c-a)} \pm \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)\Big(\lambda^2\cdot\frac{(a-b)(a-c)}{s-a} + \mu^2\frac{(b-a)(b-c)}{s-b} + \nu^2\frac{(c-a)(c-b)}{s-c}\Big)}}{(\lambda-\mu+\nu)(s-b)(c-a)},$$

$$(17')\quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\lambda - \mu r \pm \sqrt{\lambda^2 - (\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2)r + \mu^2 r^2}}{\lambda - \mu + \nu}.$$

Das Verhältnis $\alpha_2 : \alpha_1$ ist eine eindeutige, einwerthige Function auf der oben definirten Riemann'schen Fläche; dementsprechend lässt sich jede algebraische Function von s, welche gleichfalls auf der Fläche eindeutig ist, rational durch $\alpha_2 : \alpha_1$ ausdrücken. Dies gilt insbesondere für die Grösse A der Formel (3) und (4), und zwar muss A ebenso wie s ein in $\alpha_2 : \alpha_1$ quadratischer Ausdruck sein, da A eine ganze algebraische Function zweiten Grades von s ist. Am einfachsten stellt man den Ausdruck auf, indem man berücksichtigt, dass A nur dann unendlich wird, wenn s unendlich wird, und demnach denselben Nenner wie s besitzen muss. A hat also die Gestalt:

$$A = \frac{L\alpha_1^2 + 2M\alpha_1\alpha_2 + N\alpha_2^2}{(-\lambda+\mu+\nu)(b-c)\alpha_1^2 - 2\big(\mu(b-c) + \lambda(c-a)\big)\alpha_1\alpha_2 + (\lambda-\mu+\nu)(c-a)\alpha_2^2}.$$

L, M, N findet man aus den Bedingungen, dass für

$$\alpha_2 : \alpha_1 = 0 : 1, \quad A = \lambda''(a-b)(a-c),$$
$$\alpha_2 : \alpha_1 = 1 : 0, \quad A = \mu''(b-a)(b-c),$$
$$\alpha_2 : \alpha_1 = 1 : 1, \quad A = \nu''(c-a)(c-b)$$

wird.

Es ergiebt sich so:

$$(18) \qquad A = (a-b)(a-c)(b-c)$$
$$\cdot \frac{\lambda''(-\lambda+\mu+\nu)(\alpha_1^2-\alpha_1\alpha_2)+\mu''(\lambda-\mu+\nu)(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_2)+\nu''(\lambda+\mu-\nu)\alpha_1\alpha_2}{(-\lambda+\mu+\nu)(b-c)\alpha_1^2-2\big(\mu(b-c)+\lambda(c-a)\big)\alpha_1\alpha_2+(\lambda-\mu+\nu)(c-a)\alpha_2^2}$$

und analog für $a = 0$, $b = \infty$, $c = 1$

$$(18)\ A' = -\frac{\lambda''(-\lambda+\mu+\nu)(\alpha_1^2-\alpha_1\alpha_2)+\mu''(\lambda-\mu+\nu)(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_2)+\nu''(\lambda+\mu-\nu)\alpha_1\alpha_2}{(-\lambda+\mu+\nu)\alpha_1^2-2\mu\alpha_1\alpha_2}.$$

Im Ausnahmefalle, um nun die Formeln für ihn zusammenzustellen, vereinfachen sich diese bedeutend. Es sei die Benennung der Exponenten so gewählt, dass

$$\lambda' + \mu' + \nu' = 0$$

und damit auch

$$\lambda'' + \mu'' + \nu'' = 0$$

ist. Dann sind die im allgemeinen Falle ausgewählten Schaaren Q', Q'' der Formel (13) auch im Ausnahmefalle brauchbar. Zu dem Kreise benachbarter P-Functionen, die sich für specielle Werthe von $\alpha_1 : \alpha_2$ in $Q = \alpha_1 Q' + \alpha_2 Q''$ ergeben, gehören aber nur:

$$P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda'+1 & \mu' & \nu' & s \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}, \qquad P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu'+1 & \nu' & s \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix},$$

$$P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu'+1 & s \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix},$$

die sich, wie im allgemeinen Falle, für die besonderen Werthe:

$$\alpha_1 : \alpha_2 = 1 : 0, \quad s = a,$$
$$\alpha_1 : \alpha_2 = 0 : 1, \quad s = b,$$
$$\alpha_1 : \alpha_2 = 1 : 1, \quad s = c$$

ergeben.

Aber diese drei Angaben genügen wieder, um s als Function von $\alpha_1 : \alpha_2$ vollkommen zu bestimmen. Wir haben nämlich für die Bewegung von s jetzt nur ein schlichtes Blatt, da sich dasjenige Blatt, in dem im allgemeinen Fall die drei anderen P-Functionen liegen, durch Zusammenrücken der beiden Verzweigungspunkte abgeschnürt hat. Infolgedessen entspricht jetzt jeder Lage von s nur *eine* Q-Function,

also nur ein Werth von $\alpha_1 : \alpha_2$, während natürlich auch umgekehrt jedem Werthe von $\alpha_1 : \alpha_2$ nur ein Werth s entspricht. s ist also eine lineare Function von $\alpha_1 : \alpha_2$:

$$s = \frac{A_1\alpha_1 + B_1\alpha_2}{A_2\alpha_1 + B_2\alpha_2}.$$

Man findet:

$$(19) \qquad s = \frac{a(b-c)\alpha_1 + b(c-a)\alpha_2}{(b-c)\alpha_1 + (c-a)\alpha_2},$$

$$(19') \qquad r = \frac{(s-a)(c-b)}{(s-b)(c-a)} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

$$(20) \qquad A = (a-b)(a-c)(b-c) \cdot \frac{\lambda''\alpha_1 + \mu''\alpha_2}{(b-c)\alpha_1 + (c-a)\alpha_2}$$

und für $a = 0$, $b = \infty$, $c = 1$

$$(20') \qquad A' = -\lambda'' - \mu''\frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Nun drängt sich die Frage auf, wenn man vom allgemeinen Falle stetig zum Ausnahmefall übergeht, *was wird dann aus den drei Functionen*

$$P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda''+1 & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}, \qquad P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu''+1 & \nu'' & \end{vmatrix},$$

$$P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu''+1 & \end{vmatrix},$$

welche sich im allgemeinen Falle für die Parameterwerthe

$$\alpha_1 : \alpha_2 = (\lambda' + \mu'' + \nu') : \lambda, \qquad \alpha_1 : \alpha_2 = \mu : (\lambda'' + \mu' + \nu'),$$
$$\alpha_1 : \alpha_2 = (\lambda' + \mu'' + \nu') : (\lambda' + \mu'' + \nu'')$$

ergeben?

Diese drei Verhältnisse rücken im Ausnahmefalle in das einzige $\alpha_1 : \alpha_2 = -\mu : \lambda$ zusammen*). Die genannten drei P-Functionen

*) Wie überhaupt jeder Werth der Formel (17') für beliebige Lage von r bei Gültigkeit des oberen Vorzeichens in $-\frac{\lambda}{\mu}$ übergeht. — Wir haben hier ein elementares Beispiel vor uns, wie die Abbildung einer mehrblättrigen ebenen Fläche vom Geschlechte 0 auf die schlichte Ebene bei geeigneter Normirung sich verhält, wenn ein Blatt durch Zusammenrücken zweier Verzweigungspunkte sich abschnürt. Die Formel (17') vermittelt in der That im allgemeinen Falle die Abbildung der zweiblättrigen r-Ebene auf die schlichte $\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$-Ebene. Wird dann das eine Blatt der r-Ebene beim Grenzübergang $\lim \lambda + \mu + \nu = 0$ abgeschnürt, so entsprechen eben vor Eintreten der Grenze selbst alle Punkte dieses Blattes der unmittelbaren

arten also in eine einzige bestimmte Q-Function aus, die entsteht, wenn der Nebenpunkt s an die Abschnürungsstelle rückt. Es wird interessant sein, die Natur dieser Ausartungsfunction Q genauer zu untersuchen, die in sich die Eigenschaften aller 3 P-Functionen des allgemeinen Falles zu vereinigen hat, ohne selbst eine solche zu sein. Die Zweige Q_1', Q_1'' der beiden Fundamentalschaaren schreiben sich zufolge der Relation $\lambda' + \mu' + \nu' = 0$ jetzt so:

$$Q_1' = -\lambda x^{\lambda'+1}(1-x)^{\nu'} \cdot F(1,\ 1-\mu,\ 2+\lambda,\ x),$$
$$Q_1'' = (1+\lambda)\, x^{\lambda'}(1-x)^{\nu'} \cdot F(1,\ -\mu,\ 1+\lambda,\ x).$$

Dann ergiebt sich für den ihnen entsprechenden Zweig von Q:

$$Q_1 = -\mu Q_1' + \lambda Q_1'' = \lambda(\lambda+1) \cdot x^{\lambda'}(1-x)^{\nu'}$$
$$= \lambda(\lambda+1) \cdot (b-c)^{\lambda'}(a-c)^{\mu'}(a-b)^{\nu'} \cdot (z-a)^{\lambda'}(z-b)^{\mu'}(z-c)^{\nu'}.$$

Dies ist eine bei a, b, c mit den Exponenten λ', μ', ν' verzweigte multiplicative Function von z.

Diese Function muss aber mit einem zweiten Zweig Q_2 zusammen immer noch dieselbe Gruppe*) besitzen, wie Q_1' mit dem Q_2 entsprechenden Zweige Q_2' oder Q_1'' mit Q_2'' zusammen. Daraus können wir sofort schliessen, dass jeder Zweig Q, der nicht ein Multiplum von Q_1 ist, nothwendig identisch verschwindet.

Man bestätigt dies Resultat leicht, indem man wirklich zwei entsprechende Zweige Q_2' und Q_2'' bildet und zusammensetzt. Man kann etwa wählen:

$$Q_2' = -\lambda x^{\lambda''}(1-x)^{\nu''} \cdot F(\lambda''+\mu'+\nu'',\ \lambda''+\mu''+\nu'',\ -\lambda,\ x),$$
$$Q_2'' = (\lambda'+\mu''+\nu')\, x^{\lambda''}(1-x)^{\nu''} F(\lambda''+\mu'+\nu''+1,\ \lambda''+\mu''+\nu'',\ 1-\lambda,\ x),$$

und diese liefern im Ausnahmefalle:

$$Q_2' = -\lambda x^{\lambda''}(1-x)^{\nu''} \cdot F(\mu,\ 0,\ -\lambda,\ x) = -\lambda x^{\lambda''}(1-x)^{\nu''}$$
$$= -\lambda(b-c)^{\lambda''}(a-c)^{\mu''}(a-b)^{\nu''}(z-a)^{\lambda''}(z-b)^{\mu''}(z-c)^{\nu''},$$
$$Q_2'' = -\mu x^{\lambda''}(1-x)^{\nu''} \cdot F(1+\mu,\ 0,\ 1-\lambda,\ x) = -\mu x^{\lambda''}(1-x)^{\nu''}$$
$$= -\mu(b-c)^{\lambda''}(a-c)^{\mu''}(a-b)^{\nu''}(z-a)^{\lambda''}(z-b)^{\mu''}(z-c)^{\nu''},$$

so dass in der That

$$Q_2 = -\mu Q_2' + \lambda Q_2'' = 0$$

ist.

Umgebung eines einzigen Punktes der $\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$-Ebene, während das andere Blatt dem ganzen übrigen Theil der letzteren entspricht. Man vgl. den analogen Fall der Abbildung der Lemniscatenfläche, den ich in Schlömilch's Zeitschrift Bd. 40, pag. 370 (1895) behandelt habe. Schilling.

*) Diese Annahme ist nicht zutreffend; in dem fraglichen Grenzfalle braucht die Gruppe keineswegs dieselbe zu bleiben. (Vgl. die Anm. pag. 30). Dementsprechend haben auch die folgenden im Text gegebenen Entwicklungen Ritter's nur bedingte Gültigkeit. Schilling.

Wir haben also das merkwürdige Resultat:

Wenn der allgemeine Fall stetig in den Ausnahmefall übergeht, so gehen die drei verwandten P-Functionen

$$P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda''+1 & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}, \qquad P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu''+1 & \nu'' & \end{vmatrix},$$

$$P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu''+1 & \end{vmatrix}$$

alle in eine und dieselbe Functionsschaar über, deren linear unabhängige Zweige eine multiplicative Function mit den Exponenten λ', μ', ν' und eine identisch verschwindende Function sind.

Der erste Zweig behält also seinen guten Sinn, nur der zweite verschwindet bei allen dreien identisch, und das muss er auch. Denn in der allgemeinen Functionsschaar Q wird bei willkürlicher Lage von s Q_2 eine multiplicative Function, die an allen von a, b, c verschiedenen Punkten holomorph ist. Dies müsste also auch der Fall sein mit dem zweiten Zweige von

$$P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda''+1 & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}.$$

Nun sind aber die Exponenten dieses zweiten Zweiges an den Stellen a, b, c bezw. $\lambda''+1$, μ'', ν'', deren Summe gleich 1 ist. Eine multiplicative Function von positiver Exponentensumme kann aber an jeder von a, b, c verschiedenen Stelle nicht anders holomorph sein, als indem sie identisch verschwindet.

§ 4.

Die conforme Abbildung im symmetrischen Falle.

Ich bilde jetzt den Quotienten zweier linear unabhängiger Zweige einer Q-Function

$$\zeta = \frac{Q_1}{Q_2}.$$

ζ hängt dann nicht mehr von den Exponenten selbst, sondern nur noch von den Quadraten der Exponentendifferenzen ab. Wir betrachten nun *die conforme Abbildung, welche die Function $\zeta(z)$ von der passend zerschnittenen z-Ebene entwirft.* Wir legen von irgend einem Punkte O der z-Ebene einander nicht überkreuzende Schnitte nach den

Punkten a, b, c, etwa in der Anordnung der Figur 1, d. h. so, dass man bei positivem Umlauf um den Punkt O die Schnitte in der Reihenfolge A, B, C jeden von $-$ nach $+$ überschreitet. In der so zerschnittenen z-Ebene ist ζ eindeutig, doch so, dass seine Werthe auf dem positiven Ufer eines Querschnittes aus den Werthen auf dem negativen Ufer je durch eine bestimmte lineare Substitution hervorgehen. Das Abbild der zerschnittenen z-Ebene in der ζ-Ebene, der „Fundamentalbereich" der Function, wird daher durch einen aus 6 Stücken bestehenden Curvenzug begrenzt, von denen immer je zwei auf einander folgende durch eine lineare Substitution zusammengeordnet sind. Die Fläche des Abbilds muss nun diesen Curvenzug so ausfüllen, dass der Umgebung der Punkte a, b, c der z-Ebene je eine Ecke des Bereiches mit der Winkelöffnung $|R(\lambda)|2\pi$, $|R(\mu)|2\pi$, $|R(\nu)|2\pi$ entspricht, dass die Umgebung des Nebenpunktes s sich auf die doppelt überdeckte Umgebung eines Punktes ϱ im ζ-Bereich abbildet, und dass die Umgebung jedes anderen Punktes der z-Ebene conform in die ζ-Ebene abgebildet wird. Ein Beispiel dieser Art giebt Fig. 2 für $\lambda = \mu = \nu = \frac{1}{4}$.*)

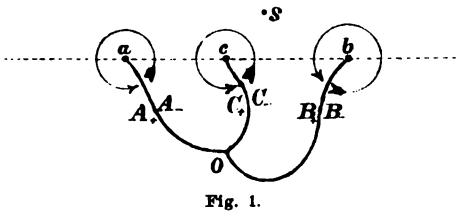


Fig. 1.

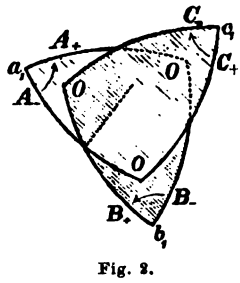


Fig. 2.

Die Lage des Verzweigungspunktes im Fundamentalbereich hängt natürlich von der Lage des Nebenpunktes in der z-Ebene oder vielmehr von seinem Doppelverhältniss zu den Punkten a, b, c ab. Die analytische Untersuchung dieser Abhängigkeit wird den Gegenstand des nächsten Paragraphen bilden. Hier mögen einige geometrische Betrachtungen ihre Stelle finden, die sich nur auf symmetrische Fälle beziehen sollen, ohne indess diesen Gegenstand zu erschöpfen, sondern sie mögen eben nur als Beispiele dienen. Eine genaue und erschöpfende geometrische

*) Um die in symmetrischer Begrenzung dargestellte Figur zu construiren, hat man in Rücksicht darauf, dass die successive Aufeinanderfolge der drei Substitutionen die Identität erzeugen muss, zunächst die 6 Fixpunkte der Substitutionen zu bestimmen. Am einfachsten geschieht dies, indem man die drei Kreise zeichnet, welche als Begrenzung der dieselben Fundamentalsubstitutionen besitzenden Kreisbogendreiecke ohne Nebenpunkt dienen. Mit Hülfe der 3 Fixpunktpaare ist es dann leicht die 6 Kreisbogen der Fig. 2 zu zeichnen, indem jene gerade die Schnittpunktpaare der einander zugeordneten Kreisbogen bezw. ihrer Verlängerung darstellen.

Schilling.

Untersuchung aller möglichen Gestalten wird man in der Arbeit von Schilling finden, auf die ich schon oben hingewiesen habe.

Es seien jetzt λ, μ, ν als reelle positive Zahlen vorausgesetzt. Statt z führe ich als unabhängige Variable das Doppelverhältniss

$$x = \frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}$$

ein. Die singulären Punkte a, b, c rücken so in die Punkte $0, \infty, 1$, und an die Stelle von s tritt das Doppelverhältniss

$$r = \frac{(s-a)(c-b)}{(s-b)(c-a)}.$$

ζ genügt als Function von x der Differentialgleichung:

$$\frac{d^3\zeta}{dx^3} : \frac{d\zeta}{dx} - \frac{3}{2}\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2} : \frac{d\zeta}{dx}\right)^2$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(1-\lambda^2)}{x^2} + \frac{1+\frac{1}{2}(\lambda^2-\mu^2+\nu^2)}{x(x-1)} + \frac{\frac{1}{2}(1-\nu^2)}{(x-1)^2} - \frac{3}{2(x-r)^2} + \frac{B+2r-1}{x(x-1)(x-r)},$$

wo

$$B = \pm\sqrt{\lambda^2 - (\lambda^2+\mu^2-\nu^2)r + \mu^2 r^2}$$

ist.

Wenn alle Coefficienten auf der rechten Seite dieser Differentialgleichung reell sind, so bilden sich die einzelnen Theile der reellen Zahlenaxe in der x-Ebene auf Kreisbogen ab. Wenn man daher die x-Ebene durch die reelle Axe in eine positive und negative Halbebene zerschneidet, so bildet ein beliebiger Zweig von ζ die positive Halbebene auf ein von Kreisbogen begrenztes Gebiet in der ζ-Ebene ab, und man findet die Abbilder der negativen Halbebene, sowie diejenigen der positiven Halbebene, die durch andere Zweige von ζ entworfen werden, wie überhaupt die ganze analytische Fortsetzung der Function ζ, indem man das zuerst erhaltene Kreisbogenpolygon an seinen einzelnen Seiten beliebig oft durch reciproke Radien spiegelt. Die Schlussweise ist eben ganz genau dieselbe, wie sie zuerst von Hrn. H. A. Schwarz auf den Fall der gewöhnlichen P-Function angewandt ist in seiner fundamentalen Abhandlung: „Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Argumentes darstellt“ *).

Damit die Coefficienten auf der rechten Seite der Differentialgleichung alle reell seien, müssen die Exponentendifferenzen λ, μ, ν entweder reelle oder rein imaginäre Zahlen, r und B reell sein. Dann

*) Crelle's Journal, Bd. 75, 1873, pag. 292—335, Ges. Abh. II, pag. 211—259 und 172—174.

besteht das Abbild der positiven x-Halbebene aus einem Kreisbogenviereck ohne Windungspunkte im Innern, von dem drei Winkel die Werthe $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ haben, während der vierte, der dem Nebenpunkt r entspricht, die Grösse 2π hat und so beschaffen ist, dass die beiden in ihm zusammentreffenden Seiten auf demselben Kreise liegen, dass also die eine Seite sich auf demselben Wege entfernt, auf dem die andere ankommt. Dabei müssen die Ecken mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$, 2π auf dem Rande des Vierecks in demselben Sinne auf einander folgen, wie die Punkte 0, ∞, 1, r auf dem Rande der positiven Halbebene x, also die Winkel $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ im Uhrzeigersinne. Lässt man den Punkt r auf der x-Axe wandern — aber nur in solchen Intervallen, dass B reell bleibt —, so bleibt die Gruppe dieselbe, das Viereck also in dasselbe System von 3 Kreisen eingehängt, nur der dem Nebenpunkte r entsprechende Rückkehrpunkt, den ich mit ϱ bezeichnen will, ändert seine Lage in stetiger Weise, während die den Punkten 0, ∞, 1 entsprechenden Ecken entweder fest bleiben oder auch sich in der Weise unstetig ändern können, dass sie von einem Schnittpunkt zweier Kreise plötzlich in den anderen Schnittpunkt übergehen.

Wir haben für reelle λ, μ, ν jetzt folgende 3 *Fälle* zu unterscheiden:

1) *Die Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche für r sind conjugirt complex, also*

$$(\lambda+\mu+\nu)(-\lambda+\mu+\nu)(\lambda-\mu+\nu)(\lambda+\mu-\nu)>0.$$

2) *Die Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche sind reell und getrennt*, d. h.

$$(\lambda+\mu+\nu)(-\lambda+\mu+\nu)(\lambda-\mu+\nu)(\lambda+\mu-\nu)<0.$$

3) *Die Verzweigungspunkte fallen in einem Punkte der reellen Axe zusammen:*

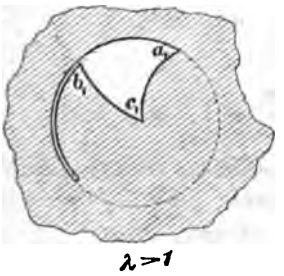
$$(\lambda+\mu+\nu)(-\lambda+\mu+\nu)(\lambda-\mu+\nu)(\lambda+\mu-\nu)=0.$$

Ich will die Benennungen jetzt so gewählt denken, dass immer $\lambda \geqq \mu \geqq \nu$ ist. Dann kann man die drei Fälle auch einfacher so charakterisiren:

$$1)\quad \lambda < \mu+\nu,$$
$$2)\quad \lambda > \mu+\nu,$$
$$3)\quad \lambda = \mu+\nu.$$

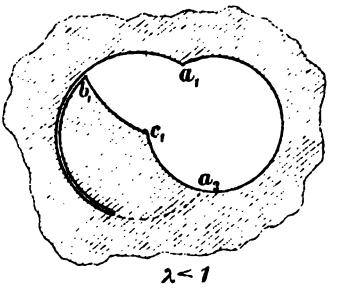
Im ersten Falle $\lambda<\mu+\nu$ ist B für jeden reellen Werth von r reell. Ich kann also r die ganze reelle Axe durchlaufen lassen; um aber alle möglichen Vierecke der ζ-Ebene zu bekommen, muss r dieselbe zweimal durchlaufen, da man bei einmaligem Durchlaufen auf der Riemann'schen Fläche noch keinen geschlossenen Weg beschreibt.

Diese doppelt überdeckte reelle Axe der x-Ebene zerfällt durch die singulären Punkte 0, ∞, 1 (bezw. a, b, c) in 6 Segmente, und der geometrische Charakter der Figur in der ζ-Ebene wird davon abhängen, in welchem der 6 Segmente der Nebenpunkt liegt. Man erhält so bei der zweimaligen Durchlaufung der reellen Axe einen Cyklus von 6 Figuren. Die Uebergänge zwischen den einzelnen Figuren werden durch 6 verschiedene demselben System von drei Kreisen eingehängte Kreisbogendreiecke gebildet, welche den 6 P-Functionen entsprechen, die aus unserer Q-Function entstehen, wenn der Nebenpunkt in einen der singulären Punkte tritt. In den 6 Vierecken besitzen die Ecken a_1, b_1, c_1 stets die Winkel $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ und dieselbe Lage in der Configuration der begrenzenden Kreise. In den Dreiecken ist einer dieser Winkel um π vermehrt oder vermindert, z. B. erhalten wir für $r = 0$ zwei Dreiecke mit den Winkeln $(\lambda + 1)\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ und $(\lambda - 1)\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ und analog für $r = \infty$, $r = 1$.



$\lambda > 1$

Fig. 3a.



$\lambda < 1$

Fig. 3b.

Je nachdem $(\lambda - 1)\pi$ positiv oder negativ d. h. $\lambda \gtrless 1$ ist, hat die Ecke im Dreieck dieselbe Lage wie in dem Viereck oder ist in den zweiten Schnittpunkt der bezüglichen Kreisbogen gerückt. Man wolle sich diese Verhältnisse an den Vierecken (Fig. 3a, b) klar machen, indem man den Nebenpunkt r in den Punkt 0 oder a hineinrücken lässt. Die gleiche Bemerkung gilt für die beiden folgenden Fälle. Ein Beispiel der 12 Figuren giebt für $\lambda = \frac{2}{3}$, $\mu = \frac{2}{3}$, $\nu = \frac{1}{3}$ die beigefügte Tafel unter Nr. I *).

*) In Ritter's Bearbeitung fanden sich für jeden der drei Fälle je 4 Serien von Figurenskizzen, den 4 Bedingungssystemen entsprechend:

1) $\lambda > 1$, $\mu > 1$, $\nu > 1$,
2) $\lambda > 1$, $\mu > 1$, $\nu < 1$,
3) $\lambda > 1$, $\mu < 1$, $\nu < 1$,
4) $\lambda < 1$, $\mu < 1$, $\nu < 1$.

Doch bieten diese keine wesentlichen Unterschiede. Ich glaubte daher die übergrosse Figurenzahl für den Druck in der Weise reduciren zu sollen, dass ich die

Im zweiten Falle $\lambda > \mu + \nu$ ist B nur reell für Werthe von r ausserhalb der Strecke zwischen den beiden Verzweigungspunkten:

$$R_1 = \frac{\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 - \sqrt{(\lambda + \mu + \nu)(\lambda - \mu - \nu)(\lambda - \mu + \nu)(\lambda + \mu - \nu)}}{2\mu^2},$$

$$R_2 = \frac{\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 + \sqrt{(\lambda + \mu + \nu)(\lambda - \mu - \nu)(\lambda - \mu + \nu)(\lambda + \mu - \nu)}}{2\mu^2}.$$

Diese liegen beide im Intervall zwischen 1 und ∞. Um das zu beweisen, brauche ich nur zu zeigen, dass $R_1 > 1$ ist. Ich kann schreiben:

$$R_1 = \frac{\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 - \sqrt{(\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2)^2 - 4\mu^2\nu^2}}{2\mu^2}$$

$$> \frac{\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 - \sqrt{(\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2)^2}}{2\mu^2}.$$

Nun ist $\lambda > \mu + \nu$, also auch $\lambda^2 > (\mu + \nu)^2 > \mu^2 + \nu^2$, folglich $\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 > 0$, d. h.

$$\sqrt{(\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2)^2} = \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2,$$

und so ergiebt sich:

$$R_1 > \frac{(\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2) - (\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2)}{2\mu_2} = 1, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Um alle möglichen Vierecke und Dreiecke zu erhalten, haben wir r nur ausserhalb der Strecke $R_1 R_2$ zu variiren, aber so, dass wir jeden Punkt zweimal überstreichen, einmal im oberen, einmal im unteren Blatt der Riemann'schen Fläche. Während der Punkt r bei R_1 oder R_2 in's andere Blatt übergeht und umkehrt, läuft der Rückkehrpunkt ϱ in der ζ-Figur auf derselben Kreislinie, auf der er sich befindet, in demselben Sinne weiter, ohne dass die Figur ihren morphologischen Charakter ändert. Ich werde dementsprechend für die Lage von r in dem Intervalle $1 < r \leqq R_1$ und in dem Intervalle $R_2 \leqq r < \infty$ nur je eine Figur zu zeichnen haben, während den Intervallen $-\infty < r < 0$ und $0 < r < 1$, ebenso den speciellen Lagen $r = 0, 1, \infty$ je zwei morphologisch verschiedene Dreiecke entsprechen. Der Cyklus besteht also wieder aus 12 Figuren, die durch stetiges Wandern des Rückkehrpunktes ϱ aus einander folgen. Ein Beispiel für $\lambda = \frac{2}{3}$, $\mu = \frac{1}{4}$, $\nu = \frac{1}{4}$ giebt die Tafel unter Nr. II.

Figuren 3a, b dem Texte hinzufügte, die den in Frage stehenden Unterschied angeben, dann jedoch allemal nur *eine* der Figurenserien beibehielt. Dieselben habe ich in derselben Weise, wie die Figurentafeln meiner eigenen citirten Arbeit, gezeichnet und angeordnet. Jedem Beispiel habe ich die doppelt überdeckte Axe hinzugefügt. Soweit sie zu reellem B gehört, ist sie stark ausgezogen; durch Zahlen ist angegeben, zu welchem Intervall bezw. welchem singulären Punkt die einzelne Figur gehört.

Schilling.

Im dritten Falle $\lambda = \mu + \nu$ endlich lassen sich die Figuren immer geradlinig darstellen, eine Eigenschaft, die indess auch in den vorigen Fällen unter Umständen statt haben kann. Denken wir uns das System der drei geraden Linien gegeben, zeichnen in dasselbe irgend ein Viereck mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ und einem Rückkehrpunkte ein und lassen letzteren stetig wandern, so bekommen wir nicht mehr einen Cyklus von Figuren, sondern eine Reihe, die beiderseits durch je eine Figur begrenzt ist, die nicht aus einem Viereck oder einem Dreieck, sondern entweder aus *einem* Winkelraum oder aus zwei getrennten Winkelräumen besteht. Ein Wandernlassen des Rückkehrpunktes über diese Grenzfiguren hinaus ist unmöglich. Durchläuft man die Figurenreihe von der einen Grenzfigur bis zur anderen, so läuft der Nebenpunkt r von der Stelle $\frac{\lambda}{\mu}$ aus längs der ganzen reellen Axe über ∞ hinweg, bis er wieder von der anderen Seite her in den Punkt $\frac{\lambda}{\mu}$ einläuft. $\frac{\lambda}{\mu}$ ist der Punkt, in dem sich beim stetigen Uebergang vom allgemeinen zum Ausnahmefall die Blätter der Riemannschen Fläche abschnüren.

Wir erhalten also, wenn wir die Figuren etwa mit denen des zweiten allgemeinen Falles $\lambda > \mu + \nu$ vergleichen, von den Figuren seines Cyklus nur die dem einen Blatte angehörende Hälfte. Versuchen wir, auch die dem anderen Blatte des allgemeinen Falles entsprechenden Figuren zu zeichnen, so findet man, dass sie sich in das gegebene System gerader Linien nur mit umgekehrter Aufeinanderfolge der Ecken, also bei richtiger Aufeinanderfolge nur in ein anderes, symmetrisch gebildetes System dreier gerader Linien einzeichnen lassen. Wir bekommen somit statt des ursprünglich geschlossenen Figurencyklus zwei gänzlich von einander getrennte Figurenreihen, die zu verschiedenen, nämlich symmetrisch gebauten Gruppen gehören, entsprechend der früher analytisch gefundenen Thatsache, dass der Cyklus verwandter Q-Functionen in zwei getrennte Reihen untereinander verwandter Functionen zerfällt *). Der geometrische Grund hierfür liegt, wie man sieht, darin, dass ein System dreier Kreise, welche nicht durch einen Punkt gehen, zu jedem Dreieck auch ein symmetrisches enthält, dass also eine Figur, wenn sie mit der einen Aufeinanderfolge von Ecken eingezeichnet werden kann, immer auch mit der anderen Aufeinanderfolge einzuzeichnen ist. Gehen aber die drei Kreise durch einen Punkt, sind es z. B. gerade Linien, so ist das symmetrische Dreieck in dem System nicht mit enthalten. Ein Beispiel für $\lambda = 1\frac{5}{12}$, $\mu = \frac{3}{4}$, $\nu = \frac{2}{3}$ sehe man auf der Tafel unter Nr. III.

*) Vgl. pag. 12 dieser Arbeit, sowie Schilling, geometrische Theorie der s-Function mit complexen Exponenten II. Math. Ann. Bd. 46 pag. 536 f. (1895.)

Bei der einen Figurenreihe liegt die Ecke a_1, wie man sieht, im Allgemeinen, d. h. wenn r nicht gleich 0, ∞, 1 ist, im Unendlichen, die Ecken b_1 und c_1 im Endlichen, bei der anderen umgekehrt b_1 und c_1 im Unendlichen und a_1 im Endlichen*).

*) Von Ritter ist übersehen worden, dass auch für die Lage $\frac{\lambda}{\mu}$ des Nebenpunktes stets ein wohl brauchbarer Bereich existirt. Ich habe denselben in dem Beispiel III der Tafel sogleich in Figur 15 hinzugefügt. Für ihn gehen alle drei Kreise durch dieselben *beiden* Punkte. Dem entspricht, dass jetzt die Gruppe nicht mehr dieselbe ist, wie für die übrigen Lagen des Nebenpunktes s. Genaueres über diese Verhältnisse wolle man in meiner bereits öfter genannten Arbeit nachsehen. Hier möchte ich im Anschluss an die von Ritter pag. 21 ff. gegebenen Entwickelungen nur noch den einfachen analytischen Grenzübergang für die zugehörigen Functionen geben, den man vorzunehmen hat, um continuirlich von den Bereichen, für die s in der Nähe von $\frac{\lambda}{\mu}$ liegt, zu unserem speciellen Bereich für $s = \frac{\lambda}{\mu}$ zu gelangen, ohne eine unbrauchbare Ausartung zu passiren.

Im Ausnahmefalle, d. h. für $\lambda + \mu + \nu = 0$ ist nach pag. 22.

$$Q_1' = -\lambda x^{\lambda'+1}(1-x)^{\nu'} \cdot F(1, 1-\mu, 2+\lambda, x),$$
$$Q_1'' = (1+\lambda) x^{\lambda'} (1-x)^{\nu'} \cdot F(1, -\mu, 1+\lambda, x)$$

und

$$Q_2' = -\lambda x^{\lambda''}(1-x)^{\nu''},$$
$$Q_2'' = -\mu x^{\lambda''}(1-x)^{\nu''}.$$

Wir bilden nun

$$Q_1 = \alpha_1 Q_1' + \alpha_2 Q_1'',$$
$$Q_2 = \frac{\alpha_1}{\varkappa} Q_2' + \frac{\alpha_2}{\varkappa} Q_2'',$$

wo $\varkappa$ einen beliebigen von x unabhängigen Factor bezeichnet, den wir gemäss der Anm. zu pag. 17 noch frei zur Verfügung haben. Es sei nun am einfachsten $\alpha_2 = \lambda$, $\alpha_1 = -\mu + \varepsilon$, $\varkappa = \varepsilon$ gesetzt, wo ε allgemein einen endlichen Werth haben möge, der bei Bewegung des Nebenpunktes s zu variiren ist und erst in der Grenze gegen 0 convergirt. Rückt also der Nebenpunkt s in die Stelle $\frac{\lambda}{\mu}$ hinein, so wird $\lim \varepsilon = 0$, d. h. $\alpha_1 : \alpha_2 = -\frac{\mu}{\lambda}$, und wir erhalten:

$$\lim Q_1 = \lambda(1+\lambda) x^{\lambda'} (1-x)^{\nu'},$$
$$\lim Q_2 = -\lambda x^{\lambda''} (1-x)^{\nu''}$$

und demnach

$$\lim \frac{Q_1}{Q_2} = -(1+\lambda) x^{\lambda} (1-x)^{\nu} = -(1+\lambda)(b-c)^{\lambda}(a-c)^{\mu}(a-b)^{\nu} \cdot (z-a)^{\lambda}(z-b)^{\mu}(z-c)^{\nu}.$$

$$\lambda + \mu + \nu = 0$$

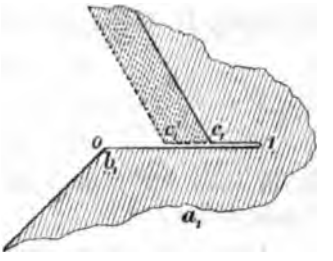
ist. Wir sehen also, und das ist in der That ein wichtiges Resultat —, *dass auch Q_2 eine nicht verschwindende Function bleibt, wenn s_2 in den Doppelpunkt $\frac{\lambda}{\mu}$ der Riemann'schen Fläche hineinrückt*

§ 5.

Der Verzweigungspunkt des Fundamentalbereichs als Function des Nebenpunktes.

Wir haben im vorigen Paragraphen an dem Beispiel des symmetrischen, d. h. reellen Falles geometrisch verfolgt, wie der Rückkehrpunkt des ζ-Vierecks stetig seine Lage ändert, wenn der Nebenpunkt längs der reellen Axe, oder längs eines Theiles derselben wandert. Das führt uns darauf, allgemein den Rückkehrpunkt, oder im nichtsymmetrischen Falle den Verzweigungspunkt des Bereichs als Function der Lage des Nebenpunktes s oder r anzusehen. Dabei werden wir für die Variable s oder r naturgemäss als geometrisches Substrat im allgemeinen Falle die zugehörige zweiblättrige Riemann'sche Fläche zu Grunde legen.

Diesen Grenzübergang können wir leicht auch durch unsere Bereiche, das Abbild des Quotienten $\frac{Q_1}{Q_2}$, veranschaulichen. Würden wir in Fig. 4 oder 5 des Beispiels III der Tafel den Einschnitt einfach sich zusammenziehen, oder in Fig. 11 oder 12 in den Bereich hinein sich weiter fortsetzen lassen, so würden wir allerdings in der Grenze einen oder zwei unbrauchbare Winkelräume erhalten. Doch können wir, ausgehend etwa von Fig. 11 den Grenzübergang auch in der Weise vornehmen, dass wir an die Seite $c_1 a_1$ einen Parallelstreifen ansetzen, wie in nebenstehender Figur angedeutet ist. Derselbe mag dann breiter und breiter werden, bis c_1 an dieselbe Stelle wie b_1 gerückt ist, d. h. wir zur Figur 15 gelangt sind. (Würde der Streifen noch breiter werden, so gelangen wir zur Figur 12 der Tafel, so dass dann der Nebenpunkt s über den Doppelpunkt $\frac{\lambda}{\mu}$ gelangt ist, ohne dass in dem Bereich irgend welche Ausartung stattfindet.)



Wollen wir jetzt völlige Uebereinstimmung zwischen diesen soeben geschilderten geometrischen und analytischen Grenzübergängen herbeiführen, so brauchen wir einmal den geradlinig begrenzten Bereich nur so gezeichnet zu denken, dass der Punkt b_1 in den Nullpunkt, der dem Nebenpunkt s entsprechende Punkt in den Einheitspunkt fällt, andererseits dementsprechend die abbildende Function so festzulegen, dass sie für $z = a, b, s$, wo $s = \frac{\lambda}{\mu - \varepsilon}$ ist, entsprechend die Werthe $\infty, 0, 1$ annimmt. Dieser analytischen Normirung entspricht, dass wir anstatt $\frac{Q_1}{Q_2}$ die lineare Verbindung $\frac{\alpha \frac{Q_1}{Q_2} + \beta}{\gamma \frac{Q_1}{Q_2} + \delta}$ wählen, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vom Parameter ε abhängige Constanten sind, die unserer Bedingung gemäss sofort zu bestimmen sind. Es ist wohl unnöthig, auch ihre ausgerechneten Werthe noch herzusetzen.

Schilling.

ϱ ist der Werth von ζ im Nebenpunkt. Gehen wir zur ursprünglichen homogenen linearen Differentialgleichung, d. h. zu der Functionsschaar Q zurück, so lautet die Frage also:

Welche Werthe haben die Zweige der Functionsschaar Q in ihrem Nebenpunkte s?

Ich will der Einfachheit halber statt mit dem Nebenpunkte s mit seinem Doppelverhältniss r zu den Punkten a, b, c operiren, d. h. a, b, c nach $0, \infty, 1$ gelegt denken. Das ist um so unwesentlicher, als ich schliesslich als unabhängige Variable gar nicht r selbst benutzen will, sondern eine auf der Riemann'schen Fläche eindeutige Variable, durch welche wir r erst quadratisch ausdrücken.

Eine solche auf der Riemann'schen Fläche eindeutige Variable ist uns unmittelbar durch das Verhältniss

$$\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

der Zusammensetzungscoefficienten von Q', Q'' gegeben. r drückt sich hierdurch in der That quadratisch aus:

$$r = \frac{-2\lambda\alpha_1\alpha_2 + (\lambda-\mu+\nu)\alpha_2^2}{(-\lambda+\mu+\nu)\alpha_1^2 - 2\mu\alpha_1\alpha_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{-2\lambda\alpha_1 + (\lambda-\mu+\nu)\alpha_2}{(-\lambda+\mu+\nu)\alpha_1 - 2\mu\alpha_2}.$$

Bezeichnen wir die Werthe zweier Zweige Q_1, Q_2 von Q im Nebenpunkte r mit $\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2$, so bilden die linearen Verbindungen von $\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2$ eine Functionsschaar auf der Riemann'schen Fläche, die sich nach pag. 17 folgendermaassen durch α_1, α_2 ausdrückt:

$$\mathsf{P} = \alpha_1 . P \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \lambda'+1 & \mu' & \nu' & r \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix} + \alpha_2 P \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \lambda' & \mu'+1 & \nu' & r \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix},$$

worin man für r den oben gegebenen quadratischen Ausdruck einzusetzen hat.

Der gegebene Ausdruck hängt aber gar nicht von dem Verhältniss $\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ allein ab, sondern auch von den Variablen α_1, α_2 selbst. Das führt uns mit zwingender Nothwendigkeit dazu, P nicht als eine Function einer einzigen unabhängigen Variablen α, sondern als eine homogene Function, eine „Form", der zwei unabhängigen Variablen α_1, α_2 selbst zu betrachten.

$\mathsf{P}(\alpha_1, \alpha_2)$ *ist also eine Formenschaar ersten Grades der homogenen Variablen α_1, α_2 in der schlichten α-Ebene, auf welche die zweiblättrige Riemann'sche Fläche über der r-Ebene ein-eindeutig abgebildet ist.*

In der Zusammensetzungsformel

$$Q(x) = \alpha_1 Q'(x) + \alpha_2 Q''(x)$$

müssen, damit die dargestellte Q-Function überhaupt einen Sinn hat,

die Coefficienten α_1, α_2 der Beschränkung unterworfen werden, dass keiner von ihnen unendlich werden darf, und dass nicht beide gleichzeitig verschwinden. Dies ist aber genau dieselbe Beschränkung, der man homogene Variablen bei formentheoretischen Betrachtungen stets zu unterwerfen hat, so dass auch diese hier ganz im Wesen der Sache liegt.

Es ist nun das functionentheoretische Verhalten der Formenschaar $\mathsf{P}(\alpha_1, \alpha_2)$ an den verschiedenen Stellen der α-Ebene zu charakterisiren.

Die Schaar ist offenbar holomorph und unverzweigt für alle Werthsysteme $\alpha_1 : \alpha_2$, für welche r von $0, \infty, 1$ verschieden ist, d. h. für alle Werthsysteme mit Ausnahme folgender sechs:

$$\alpha_1 : \alpha_2 = 1 : 0, \quad \alpha_1 : \alpha_2 = (\lambda - \mu + \nu) : 2\lambda,$$
$$\alpha_1 : \alpha_2 = 0 : 1, \quad \alpha_1 : \alpha_2 = 2\mu : (-\lambda + \mu + \nu),$$
$$\alpha_1 : \alpha_2 = 1 : 1, \quad \alpha_1 : \alpha_2 = (\lambda - \mu + \nu) \cdot (\lambda - \mu - \nu).$$

Beschreibt dagegen $\alpha = \alpha_1 : \alpha_2$ eine Umkreisung eines dieser Ausnahmepunkte, indem gleichzeitig α_1, α_2 selbst wieder zu ihren Anfangswerthen zurückkehren, so umkreist in

$$\mathsf{P} = \alpha_1 Q'(r) + \alpha_2 Q''(r)$$

r einen der Punkte $0, \infty, 1$. Zwei Zweige von Q' und die entsprechenden von Q'' erleiden also eine bestimmte, und zwar dieselbe, lineare Substitution A, B oder C. Da sich α_1, α_2 reproduciren, erleiden also die entsprechenden Zweige von P ebenfalls dieselben linearen Substitutionen A, B, C. Wir haben also den Satz:

Zwei Zweige der Formenschaar P *erleiden eine lineare Substitution* A *bei jeder Umkreisung eines der beiden Punkte* $\alpha = 0$ *und* $\alpha = \frac{2\lambda}{\lambda - \mu + \nu}$, *eine Substitution* B *bei Umkreisung eines der Punkte* $\alpha = \infty$ *und* $\alpha = \frac{-\lambda + \mu + \nu}{2\mu}$, *sowie eine Substitution* C *bei der Umkreisung der Punkte* $\alpha = 1$ *und* $\alpha = \frac{\lambda - \mu - \nu}{\lambda - \mu + \nu}$.

P ist also, was ich in Math. Ann. Bd. 47*) eine „*Riemann'sche Formenschaar*" nenne, und zwar ist in der dortigen Bezeichnungsweise $n = 2$, $p = 0$, $s = 6$ zu setzen.

Wir fragen vor allem nach den *Exponenten der Schaar* P *an ihren* 6 *Verzweigungsstellen.*

Es sei allgemein $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ eine solche Verzweigungsstelle, η_1, η_2 irgend eine willkürliche von den Verzweigungsstellen verschiedene feste Stelle. Ich verstehe unter $(\alpha\beta)$ allgemein die Determinante $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$, die an der Stelle β_1, β_2 in der ersten Ordnung verschwindet. Ich setze nun die Identitäten an:

*) „Ueber Riemann'sche Formenschaaren auf einem beliebigen algebraischen Gebilde". (1896), p. 157—221.

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 \cdot \frac{(\alpha\eta)}{(\varepsilon\eta)} - \eta_1 \frac{(\alpha\varepsilon)}{(\varepsilon\eta)},$$

$$\alpha_2 = \varepsilon_2 \cdot \frac{(\alpha\eta)}{(\varepsilon\eta)} - \eta_2 \frac{(\alpha\varepsilon)}{(\varepsilon\eta)}$$

und schreibe also

$$\mathsf{P} = \left(\varepsilon_1 Q'(r) + \varepsilon_2 Q''(r)\right) \frac{(\alpha\eta)}{(\varepsilon\eta)} - \left(\eta_1 Q'(r) + \eta_2 Q''(r)\right) \frac{(\alpha\varepsilon)}{(\varepsilon\eta)}.$$

Die Fundamentalzweige von P setzen sich aus den Fundamentalzweigen von Q' und Q'' zusammen.

Ein Zweig von Q' oder Q'' oder einer linearen Verbindung von Q' und Q'' mit constanten Coefficienten hat aber an einer Stelle ε_1, ε_2 in α gemessen denselben Exponenten, wie in r gemessen an der entsprechenden Stelle $r = 0$, $r = \infty$ oder $r = 1$. Denn r, $\frac{1}{r}$, $r - 1$ verschwinden ja jedes an der betreffenden Stelle ε_1, ε_2 in α gemessen in der ersten Ordnung, da die Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche r nicht in diesen Punkten liegen (wenn ich λ, μ, ν von 0 verschieden voraussetze).

Daher besitzt auch in dem letzten Ausdruck für P das erste Glied dieselben Exponenten, wie die Schaar

$$\varepsilon_1 Q'(r) + \varepsilon_2 Q''(r),$$

das zweite Glied um 1 höhere Exponenten, als die Schaar

$$\eta_1 Q'(r) + \eta_2 Q''(r).$$

Die 6 Werthsysteme ε_1, ε_2 sind aber gerade diejenigen auf Seite 19 angegebenen speciellen Werthsysteme α_1, α_2, für welche sich

$$\alpha_1 Q'(x) + \alpha_2 Q''(x)$$

auf eine P-Function reducirt; wir können danach die Exponenten der Fundamentalzweige des ersten Gliedes im Ausdruck für P sofort angeben, nämlich

für $\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = 1:0$	Exp.:	$\lambda'+1, \lambda''$	$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = (\lambda-\mu+\nu):2\lambda$	Exp.:	$\lambda', \lambda''+1,$
$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = 0:1$	„	$\mu'+1, \mu''$	$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = 2\mu:(-\lambda+\mu+\nu)$	„	$\mu', \mu''+1,$
$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = 1:1$	„	$\nu'+1, \nu''$	$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = (\lambda-\mu+\nu):(\lambda-\mu-\nu)$	„	$\nu', \nu''+1.$

Die Exponenten des zweiten Terms in P sind dagegen mindestens, in entsprechender Weise angeordnet:

$\lambda'+1, \lambda''+1$	$\lambda'+1, \lambda''+1,$
$\mu'+1, \mu''+1$	$\mu'+1, \mu''+1,$
$\nu'+1, \nu''+1$	$\nu'+1, \nu''+1,$

also nicht niedriger als die entsprechenden Exponenten des ersten Gliedes. Daher sind auch die Exponenten der Formenschaar P an den 6 Stellen jedenfalls mindestens gleich den für das erste Glied angegebenen.

Um zu beweisen, dass sie thatsächlich nicht grösser sind, und um gleichzeitig zu zeigen, dass die Formenschaar P keine Nebenpunkte in der α-Ebene besitzt, benutze ich jetzt einen Satz über die Anzahl der Nebenpunkte in einer Formenschaar von gegebenem Grade und gegebenen Exponenten, den ich in der oben genannten Arbeit*) bewiesen habe:

Die Anzahl der Nebenpunkte einer n-gliedrigen Riemann'schen Formenschaar auf einem algebraischen Gebilde vom Geschlechte p ist

$$\varrho = n\delta + n(n-1)(p-1) - \Sigma\lambda + s \cdot \frac{n(n-1)}{2},$$

unter δ den Grad der Formenschaar, unter s die Anzahl der Verzweigungspunkte, unter $\Sigma\lambda$ die Summe der Exponenten in denselben verstanden.

δ ist hierbei in multiplicativen Primformen zu messen.

In unserm Falle ist $n = 2$, $p = 0$, $\delta = 1$, $s = 6$, also

$$\varrho = 6 - \Sigma\lambda.$$

Unsere Formenschaar ist an allen von den Verzweigungsstellen verschiedenen Stellen holomorph, kann also höchstens Nebenpunkte von positiver Multiplicität besitzen, es muss also nothwendig $\varrho \geqq 0$ sein. Das giebt zuerst für die Exponentensumme die Ungleichung

$$\Sigma\lambda \leqq 6.$$

Nun ist aber die Summe der auf der vorigen Seite angegebenen Mindestwerthe für die Exponenten schon $= 6$; also kann kein Exponent einen grösseren Werth haben, als den angegebenen Mindestwerth, da sonst $\Sigma\lambda > 6$ wäre. Also haben die Exponenten genau die angegebenen Werthe. Dann ist aber $\Sigma\lambda = 6$, also $\varrho = 0$, d. h., die Formenschaar P besitzt keinerlei Nebenpunkte.

Wir können also unsere Formenschaar P jetzt so kennzeichnen:

P *besitzt an seinen* 6 *Verzweigungsstellen die folgenden genauen Exponenten:*

$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = 1:0$	*Exp.* $\lambda'+1, \lambda''$	$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = (\lambda-\mu+\nu):2\lambda$	*Exp.* $\lambda', \lambda''+1,$
$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = 0:1$	„ $\mu'+1, \mu''$	$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = 2\mu:(-\lambda+\mu+\nu)$	„ $\mu', \mu''+1$
$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = 1:1$	„ $\nu'+1, \nu''$	$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = (\lambda-\mu+\nu):(\lambda-\mu-\nu)$	„ $\nu', \nu''+1$

und besitzt nirgends einen Nebenpunkt.

*) Math. Ann. Bd. 47, pag. 163.

Dasselbe Resultat gilt natürlich bei Rückwärtsübertragung auf die Riemann'sche Fläche r, wenn man z. B. statt α_1, α_2 als homogene Coordinaten die Ausdrücke

$$r_1 = -2\lambda\alpha_1\alpha_2 + (\lambda - \mu + \nu)\alpha_2^2,$$
$$r_2 = (-\lambda + \mu + \nu)\alpha_1^2 - 2\mu\alpha_1\alpha_2$$

einführt; nur ist dann der Grad in r_1, r_2 natürlich $\frac{1}{2}$, und in den Verzweigungspunkten R der Fläche sind die Exponenten in $(r-R)^{\frac{1}{2}}$ zu messen.

P *muss als eine Riemann'sche Formenschaar von* α_1, α_2 *natürlich einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen**).

*) Wie Ritter die Fortsetzung dieser Untersuchungen dachte, ist mir nicht bekannt. Vor allem würde man wünschen, die Differentialgleichung in extenso aufzustellen, also auch ihre accessorischen Parameter zu bestimmen. Wann werden letztere insbesondere für reelle Grössen λ^2, μ^2, ν^2 gleichfalls reell sein, wie lässt sich der zugehörige Fundamentalbereich des Quotienten zweier linear unabhängigen Particularlösungen construiren? Sodann würden die Betrachtungen auch für den Ausnahmefall vollständig durchzuführen sein. Schilling.

Ueber ein discontinuirliches Integral.

Von

E. Gubler in Zürich.

Im 75ten Bande des Crelle'schen Journals für Mathematik hat Herr H. Weber den bekannten discontinuirlichen Integralen

$$\int_0^\infty \frac{\sin x \cos \alpha x}{x}\, dx$$

und verwandten das Integral

$$\int_0^\infty \overset{1}{J}(x)\, \overset{0}{J}(ax)\, dx$$

als Analogon an die Seite gestellt. Herr Sonine gab dann im 16. Band der „Mathematischen Annalen" pag. 38 und pag. 51 allgemeine Formeln, welche das Weber'sche Integral als speciellen Fall enthalten. Zu derjenigen dieser Formeln, welche eine Integraldarstellung der hypergeometrischen Reihe bietet, gelangte auf anderem Wege auch Herr Schafheitlin, Math. Annalen Bd. XXX. Die nachfolgende Arbeit hat keinen so allgemeinen Charakter. Sie hält sich an die Weber'sche Integralform, verallgemeinert aber die Parameter. Eine directe Berechnung des allgemeinen Weber'schen Integrals

$$\int_0^\infty \overset{a}{J}(x) \overset{b}{J}(cx)\, dx$$

habe ich in der mir zugänglichen Litteratur nicht gefunden. Die Anregung zur Untersuchung gab mir vor längerer Zeit mein seither gestorbener verehrter Lehrer Schläfli; ihm verdanke ich auch manchen fördernden Wink.

In Bezug auf die Bezeichnung schicke ich voraus, dass ich dem Integralzeichen $I(a)$ anhänge, wenn der Integrand auf seinen frühern Werth zurückkommt, nachdem die Variable den Pol a umlaufen hat, d. h. wenn der Integrationsweg geschlossen ist. Der Umlauf soll,

wenn nicht das Gegentheil gesagt ist, rechtläufig verstanden sein. Kehrt dagegen der Integrand nicht mehr auf seinen ursprünglichen Werth zurück, nachdem die Variable von einem Punkte b ausgehend den Pol a rechtläufig umkreist hat, ist also der Integrationsweg eine von b aus um a geworfene Schlinge, so füge ich dem Integralzeichen $II(b; a)$ bei.

I.

Das Integral

$$\int_0^\infty \overset{a}{J}(x)\, \overset{b}{J}(cx)\, dx$$

sei zur Abkürzung mit S bezeichnet. An der unteren Grenze verhält es sich wie

$$\text{const.} \asymp \int_0 x^{a+b}\, dx,$$

erfordert also zur Convergenz

$$a + b + 1 > 0.$$

Vermöge der für ein grosses x giltigen Formel

$$\overset{a}{J}(x) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \tfrac{\pi}{2}\left(a + \tfrac{1}{2}\right)\right)$$

ist für die obere Grenze die zu integrirende Function gleich

$$\frac{2}{\pi\sqrt{c}} \cos\left(x - \tfrac{\pi}{2}\left(a+\tfrac{1}{2}\right)\right) \cos\left(cx - \tfrac{\pi}{2}\left(b+\tfrac{1}{2}\right)\right) \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{c}} \left\{ \frac{\cos\left[(1-c)\,x - \frac{\pi}{2}(a-b)\right]}{x} + \frac{\cos\left[(1+c) - \frac{\pi}{2}(a+b+1)\right]}{x} \right\}.$$

Denkt man sich c positiv, so ist die Convergenz an der obern Grenze gesichert, wenn c von 1 verschieden ist. Das Integral convergirt dann hier wie

$$\int^\infty \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\varphi} \quad \text{und} \quad \int^\infty \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\varphi}.$$

Ist $c = 1$, so kommt im Product der beiden Cosinus der nicht oscillirende Term $\frac{1}{2}\cos(a-b)\frac{\pi}{2}$ in Betracht; das Integral divergirt dann wie $\int^\infty \frac{dx}{x}$. Nur wenn $a - b$ eine ungerade positive oder negative Zahl ist, convergirt das Integral auch für $c = 1$.

Wenn $c > 1$, so ersetze man x durch $\frac{x}{c}$, dann ist

$$S = \frac{1}{c}\int_0^\infty \overset{b}{J}(x)\,\overset{a}{J}\left(\frac{x}{c}\right) dx,$$

wo nun $\frac{1}{c} < 1$ ist. Man braucht also nur den Fall zu betrachten, wo $0 < c < 1$ ist.

II.

Um S zu berechnen, substituire man

$$\overset{b}{J}(cx) = \frac{1}{2i\pi}\int e^{\frac{1}{2}cx\left(t-\frac{1}{t}\right)} t^{-b-1}\,dt$$

Weg eine rechtläufige Schlinge aus $-N$ um O; sie gehe durch $-i$ und i, liege westlich ausserhalb, östlich innerhalb des Einheitskreises. Setzt man dann

$$T = \int_0^\infty \overset{a}{J}(x)\, e^{\frac{1}{2}cx\left(t-\frac{1}{t}\right)} dx,$$

so ist

$$S = \frac{1}{2i\pi}\int T t^{-b-1}\,dt$$

Weg die vorhin beschriebene Schlinge.

Wenn $u - \frac{1}{u} = -c\left(t - \frac{1}{t}\right)$, so dass u in der östlichen Halbebene ausserhalb des Einheitskreises liegt, so ist nach der Formel

$$\int_0^\infty \overset{a}{J}(x)\, e^{-bx}\,dx = \frac{2h^{1-a}}{h^2+1}, \quad \text{wo} \quad b = \frac{1}{2}\left(h - \frac{1}{h}\right)$$

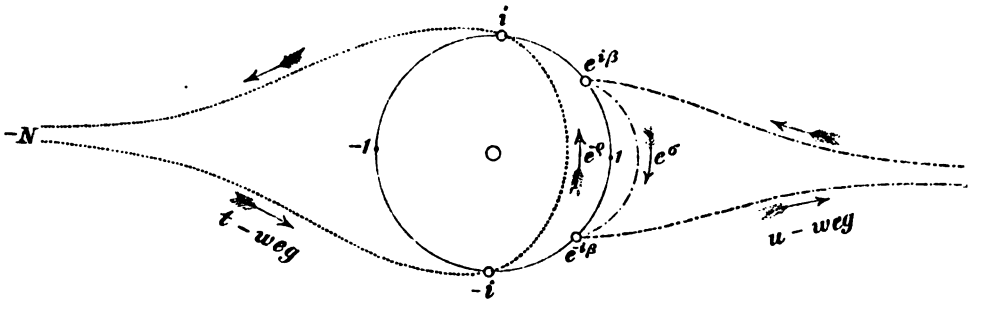
$$T = \frac{2u^{1-a}}{u^2+1}.$$

Wenn t im Westpunkt sich befindet, so ist $u = -ct$ im Ostpunkt. Während t vom Westpunkt bis -1 läuft, läuft u vom Ostpunkt bis 1.

Wenn $t = -e^{i\varphi}\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$, so sei $c = \sin\beta\left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$; dann wird $u - \frac{1}{u} = 2i\sin\beta\sin\varphi$. Setzt man $\sin\beta\sin\varphi = \sin\chi$, so läuft χ von 0 bis β, $u = e^{i\chi}(0 < \chi < \beta)$.

Weil t in der Westhälfte ausserhalb des Einheitskreises bleiben und vom Westpunkte bis nach $-i$, zum Beispiel in der Südhälfte gehen soll, so läuft der entsprechende Theil des u-Weges im nordöstlichen Viertel vom Ostpunkt bis $e^{i\beta}$ ausserhalb des Einheitskreises. In $u = e^{i\beta}\,(t = -i)$ ist $\frac{du}{dt} = 0$, der Punkt $e^{i\beta}$ ist also ein Verzweigungspunkt des u-Feldes. Wenn daher t in gerader Linie durch $-i$ geht,

um in den Einheitskreis einzutreten, so kehrt u vom Punkt $e^{i\beta}$ — in unmittelbarer Nähe gedacht — auf demselben Wege zurück, auf dem es hergekommen ist. Im Augenblick, wo t die positive Axe zwischen 0 und 1 im Punkte $e^{-\varrho}$, ϱ positiv, erreicht hat, hat auch u die positive Axe in einem östlich von 1 liegenden Punkte e^{σ}, $\sin\sigma = \sin\beta \cdot \sin\varrho$, erreicht. Die zweite Hälfte des u-Weges darf man sich zur ersten



in Bezug auf die Realitätslinie symmetrisch denken. Der u-Weg liegt also östlich ausserhalb des Einheitskreises, geht vom Ostpunkt aus in der Nordhälfte nach $e^{i\beta}$, kehrt hier zurück und geht hier in die Südhälfte, um noch ein Mal den Einheitskreis in $e^{-i\beta}$ anzutreffen und kehrt von hier nach dem Ostpunkt zurück.

III.

Die Gleichung zwischen t und u wird

$$u^2 - 1 + c\left(tu - \frac{u}{t}\right) = 0.$$

Man setze daher $tu = p$, $\frac{u}{t} = q$; dann ist $u^2 = pq$ und die Gleichung wird

$$pq - 1 + cp - cq = 0.$$

Sie giebt

$$p = \frac{cq+1}{q+c}, \quad u^2 = \frac{q(cq+1)}{q+c}, \quad t^2 = \frac{cq+1}{q(q+c)}.$$

Diese Substitutionen gestatten, die zu integrirende Function durch die Variable q allein auszudrücken. Die nächste Aufgabe ist, den q-Weg aufzufinden.

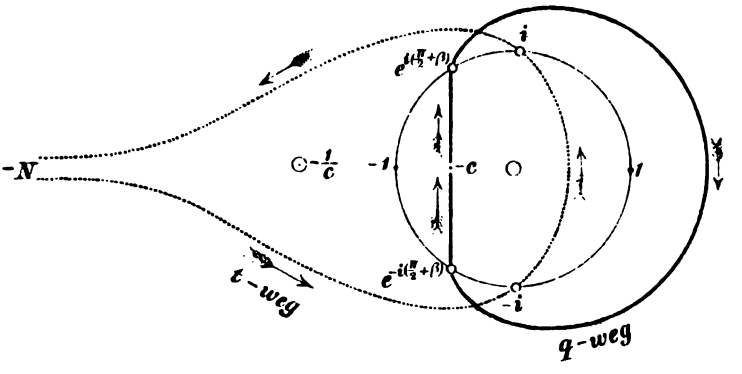
In Bezug auf t als Function von q hat die q-Ebene die vier Verzweigungspunkte 0, ∞, $-c$, $-\frac{1}{c}$. Um den q-Weg zu finden, wollen wir t von $-N$ bis -1 führen, dann in der Südhälfte des Einheitskreises bis 1, und erst nachdem wir den entsprechenden q-Weg gefunden haben, die Verschiebung vornehmen, welche macht, dass t

von $-N$ bis $-i$ ausserhalb, von $-i$ bis $+1$ innerhalb des Einheitskreises bleibt.

Wenn $t = -e^{+\lambda}$, wo λ alle positiven Werthe von ∞ bis 0 durchläuft, so sei $\mathfrak{lin}\,\mu = c\,.\,\mathfrak{lin}\,\lambda$; dann ist $\mu < \lambda$ und μ durchläuft auch die positiven Werthe von ∞ bis 0. Weil $u = e^{\mu}$, so ist $q = -e^{-(\lambda-\mu}$ und geht von $-c$ bis -1.

Wenn $t = -e^{i\varphi}$, wo φ von 0 bis π läuft, so sei $\sin\chi = \sin\beta\,\sin\varphi$; dann ist $\chi < \varphi$. χ geht von 0 bis β, wenn φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ geht und kehrt nach 0 zurück, wenn φ von $\frac{\pi}{2}$ bis π geht. Da $u = e^{i\chi}$ und der Factor -1 in $t = -e^{i\varphi}$ als $e^{i\pi}$ aufzufassen ist, so ist $q = e^{i(\pi+\chi-\varphi)}$ und geht von $e^{i\pi}$ in rückläufiger Richtung dem Rande des Einheitskreises entlang durch den Punkt $e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}$, welcher dem festzuhaltenden Punkt $t = -i$ entspricht, bis ans Ende 1 des nördlichen Halbkreises.

Nimmt man nun mit dem t-Wege die vorhin angezeigte Verschiebung vor, so verschiebt sich auch der q-Weg so, dass er von $-c$ innerhalb des nordwestlichen Quadrants des Einheitskreises nach dem Punkte $e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}$ hingeht, dann aus dem Einheitskreise heraustritt,



die laterale Axe nördlich von i passirt und ausserhalb des Einheitskreises im nordöstlichen Viertel der Ebene nach einem Punkte der positiven Axe hingeht, der östlich von 1 liegt. Der übrige Theil des Weges führt durch den Punkt $e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}$ nach $-c$ zurück und liegt in Bezug auf die Realitätslinie symmetrisch zum ersten Theile. Der ganze q-Weg ist also eine vom Pol $-c$ aus um den einzigen Pol 0 gelegte rückläufige Schlinge, welche den Pol $-\frac{1}{c}$ ausschliesst.

IV.

Nach Seite 39

$$S = \frac{1}{2i\pi}\int t^{-b}\, u^{1-a}\, \frac{2}{u^2+1}\, \frac{dt}{t},$$

wo nun

$$t^{-b} = (cq+1)^{-\frac{b}{2}}\, q^{\frac{b}{2}}\, (q+c)^{\frac{b}{2}},$$

$$u^{1-a} = q^{\frac{1-a}{2}}\, (cq+1)^{\frac{1-a}{2}}\, (q+c)^{\frac{a-1}{2}},$$

$$\frac{2}{u^2+1} = \frac{2(q+c)}{c(q^2+1)+2q},$$

$$\frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{c(q^2+1)+2q}{q(q+c)(cq+1)}\, dq;$$

also

$$t^{-b}\, u^{1-a}\, \frac{2}{u^2+1}\, \frac{dt}{t} = -\, q^{\frac{b-a-1}{2}}\, (q+c)^{\frac{b+a-1}{2}}\, (cq+1)^{-\frac{a+b+1}{2}}\, dq.$$

Macht man die Schlinge rechtläufig und multiplicirt daher den letzten Ausdruck mit -1, so bekommt man

$$S = \frac{1}{2i\pi}\int_{H(-c;\,0)} q^{\frac{b-a-1}{2}}\, (q+c)^{\frac{b+a-1}{2}}\, (cq+1)^{-\frac{a+b+1}{2}}\, dq.$$

Setzt man $q = cz$, so kommt

$$S = \frac{c^b}{2i\pi}\int_{H(-1;\,0)} z^{\frac{b-a-1}{2}}\, (1+z)^{\frac{b+a-1}{2}}\, (1+c^2 z)^{-\frac{a+b+1}{2}}\, dz.$$

Man nehme nun für einen Augenblick $\frac{b-a+1}{2}$ als positiv an, um die Schlinge um 0 zusammenziehen zu dürfen. Wenn das geschehen ist, setze man $z = -t$; auf dem Hinweg ist dann $\log z = \log t - i\pi$, auf dem Herweg $\log z = \log t + i\pi$, im sehr kleinen Kreis um 0 herum verschwindet das Integral. Man erhält dann

$$S = \frac{c^b}{\Gamma\left(\frac{a-b+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b-a+1}{2}\right)}\int_0^1 t^{\frac{b-a-1}{2}}\, (1-t)^{\frac{b+a-1}{2}}\, (1-c^2 t)^{-\frac{a+b+1}{2}}\, dt;$$

also

$$S = \frac{\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right)}{\Gamma(b+1)\,\Gamma\left(\frac{a-b+1}{2}\right)}\, c^b\, F\left(\frac{a+b+1}{2},\ \frac{b-a+1}{2},\ b+1,\ c^2\right),$$

wo nun die Bedingung hinsichtlich $\frac{b-a+1}{2}$ wieder wegfällt. Wir haben also das Ergebniss:

Wenn $a+b+1>0$, $0<c<1$, *so ist*

$$\text{(A)} \qquad \int_0^\infty \overset{a}{J}(x)\,\overset{b}{J}(cx)\,dx$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right)}{\Gamma(b+1)\,\Gamma\left(\frac{a-b+1}{2}\right)}\, c^b F\left(\frac{a+b+1}{2},\ \frac{b-a+1}{2},\ b+1,\ c^2\right).$$

Um das Integral für den Fall darzustellen, wo $c>1$ ist, ersetze man x durch $\frac{x}{c}$, multiplicire mit c und schreibe dann a, $\frac{1}{c}$ resp. statt b, c, so kommt

$$\text{(B)} \qquad \int_0^\infty \overset{a}{J}(x)\,\overset{b}{J}(cx)\,dx$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma\left(\frac{b-a+1}{2}\right)}\, c^{-a-1} F\left(\frac{a+b+1}{2},\ \frac{a-b+1}{2},\ a+1,\ \frac{1}{c^2}\right),$$

$$a+b+1>0, \quad c>1.$$

Diese zwei Functionen gelten auch für complexe Werthe von c und haben mit Ausnahme der Pole $c^2=0,\ 1,\ \infty$ den Charakter ganzer Functionen. Keine geht in die andere über. An der Stelle $c=1$ tritt also für das Integral ein Functionswechel ein. Hierauf will ich in einem spätern Paragraphen noch näher eingehen, vorerst aber die Fälle betrachten, wo $a-b$ eine positive oder negative ungerade Zahl ist, und in welchen, wie wir gesehen haben, $c=1$ werden darf.

V.

Wenn $a-b=-(2n+1)$ eine negative ungerade Zahl ist, so wird $\Gamma\left(\frac{a-b+1}{2}\right)=\Gamma(-n)$ unendlich gross, der dritte Parameter der hypergeometrischen Reihe in der Formel (A) bleibt positiv, die Reihe behält also einen endlichen Werth. Daher hat man

$$\text{(A')} \qquad \int_0^\infty \overset{a}{J}(x)\,\overset{a+2n+1}{J}(cx)\,dx = 0, \quad \text{wenn} \quad 0<c<1,$$

Wenn $a-b=2n+1$ eine positive ungerade Zahl ist, so bleiben die Gammafunctionen in der Formel (A) endlich, der zweite Parameter

in der hypergeometrischen Reihe wird $-n$, die Reihe bricht also mit dem $(n+1)$ Term ab. Man hat

$$\int_0^\infty J(x)^{b+2n+1} J(cx)\, dx = \frac{\Gamma(b+n+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(n+1)} c^b F(b+n+1, -n, b+1, c^2).$$

Diese Formel lässt den Grenzwerth, den das Integral erhält, wenn c gegen 1 hingeht, nicht erkennen. Die Anwendung der Gauss'schen Gleichung

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}$$

giebt die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$. Zu einer durchsichtigen Darstellung gelangen wir, wenn wir der allgemeinen Formel (A) zuerst die Gestalt geben

$$\int_0^\infty J(x)^a J(x)^b\, dx = c^b \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\frac{b-a+1}{2} \cdots \left(\lambda + \frac{b-a-1}{2}\right)}{1 \cdots \lambda} \cdot \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{a+b+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a-b+1}{2}\right)\Gamma(\lambda+b+1)} c^{2\lambda},$$

Setzt man

$$a = b + 2n + 1,$$

so geht sie über in

$$\int_0^\infty J(x)^{b+2n+1} J(cx)\, dx = c^b \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \binom{n}{\lambda} \binom{\lambda+n+b}{n} (-c^2)^\lambda.$$

Nach Cauchy's Formel ist

$$\binom{\lambda+n+b}{n} = \frac{1}{2i\pi} \int_{J(0)} (1+t)^{\lambda+n+b} \frac{dt}{t^{n+1}};$$

substituirt man dies in der letzten Gleichung, so kann man unter dem Integrationszeichen summiren, wodurch

$$\int_0^\infty J(x)^{b+2n+1} J(cx)\, dx = \frac{c^b}{2i\pi} \int \frac{(1+t)^{n+b}}{t^{n+1}} (1 - c^2 - c^2 t)^n\, dt$$

entsteht, wenn der t-Weg eine geschlossene Curve um 0 ist, welche -1 ausschliesst. Man kann $\{(1-c^2) - c^2 t\}^n$ in eine endliche Summe entwickeln und dann die Integration Term für Term vollziehen. Es ergiebt sich

$$\int_0^\infty J(x)^{b+2n+1} J(cx)\, dx = (-1)^n c^{2n+b} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \binom{n}{\lambda} \binom{n+b}{\lambda} \left(-\frac{1-c^2}{c^2}\right)^\lambda$$

oder, wenn man wieder zur hypergeometrischen Reihe zurückkehrt

$$(A'') \quad \int_0^\infty J^{b+2n+1}(x)\, J^{b}(cx)\, dx = (-1)^n c^{2n+b} F\left(-n, -n-b, 1, -\left(\frac{1}{c^2}-1\right)\right).$$

Auf demselben Wege erhält man aus der Formel (B), wenn

$$a - b = -(2n+1)$$

$$(B') \quad \int_0^\infty J^{a}(x)\, J^{a+2n+1}(cx)\, dx = (-1)^n c^{-2n-a-1} F(-n, -n-a, 1, -(c^2-1)),$$

aber wenn $a - b = 2n + 1$

$$(B'') \quad \int_0^\infty J^{b+2n+1}(x)\, J^{b}(cx)\, dx = 0.$$

Wir haben somit folgende zwei Integrale

$$(I) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty J^{a}(x)\, J^{a+2n+1}(cx)\, dx \\ = (-1)^n c^{-2n-a-1} F(-n, -n-a, 1, -(c^2-1)), \quad \text{wenn } 1 < c, \\ \text{aber } = 0 \quad \text{wenn } 0 < c < 1, \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty J^{b+2n+1}(x)\, J^{b}(cx)\, dx \\ = (-1)^n c^{2n+b} F\left(-n, -n-b, 1, -\left(\frac{1}{c^2}-1\right)\right), \text{ wenn } 0 < c < 1, \\ \text{aber } = 0 \quad \text{wenn } 1 < c. \end{cases}$$

Beide Integrale sagen nicht wesentlich Verschiedenes aus; ihre Herleitung ergiebt, dass sie auf dieselbe Art in einander übergeführt werden können, wie die Formel (A) in (B) verwandelt wurde.

Das Integral (I) giebt, wenn c auf 1 herabsinkt, den Grenzwerth $(-1)^n$, wenn dagegen c wachsend gegen 1 hingeht, den Grenzwerth 0. Beim Integral (II) findet das Umgekehrte statt.

Für $a = 0$, $n = 0$ giebt (I)

$$\int_0^\infty J^{0}(x)\, J^{1}(cx)\, dx = \frac{1}{c}, \quad \text{wenn } c > 1,$$

$$\text{aber } = 0 \quad \text{wenn } 0 < c < 1.$$

Für $a = -\frac{1}{2}$, $n = 0$

$$\int_0^\infty \frac{\sin cx \,.\, \cos x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}, \quad \text{wenn} \quad c > 1,$$
$$\text{aber} \quad = 0, \quad \text{wenn} \quad 0 < c < 1.$$

Für $n = 0$

$$\int_0^\infty J^a(x)\, J^{a+1}(cx)\, dx = \frac{1}{c^{a+1}}, \quad \text{wenn} \quad 1 < c,$$
$$\text{aber} \quad = 0, \quad \text{wenn} \quad 0 < c < 1.$$

Entsprechende Resultate liefern dieselben Specialisirungen beim Integral (II). Sie stimmen überein mit den von Herrn Weber (a. a. O. pag. 80) und Herrn Sonine (a. a. O. pag. 39) gegebenen Formeln.

VI.

Die hypergeometrischen Reihen in (A) und (B) sind gut definirte Functionen von c. Die rechten Seiten dieser Gleichungen mögen zur Unterscheidung mit $S'(c)$ und $S''(c)$ bezeichnet werden. Die Kummer'sche Gleichung

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x)$$
$$+ \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-x)$$

gestattet eine Transformation vom Argument x zum Argument $1-x$. Um die Gleichung auf unsere Function anwendbar zu machen, müssen wir den Grenzwerth der rechten Seite für $\gamma = \alpha+\beta$ bestimmen. Setzt man $\gamma = \alpha+\beta+\varepsilon$, wo ε zum Verschwinden bestimmt ist, und bezeichnet $\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$ mit $\Lambda(a)$, so folgt

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = -\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \log(1-x)\, F(\alpha, \beta, 1, 1-x)$$
$$+ \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma(\alpha+\lambda)\,\Gamma(\beta+\lambda)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\lambda!\,\lambda!} \big(2\Lambda(1+\lambda) - \Lambda(\alpha+\lambda) - \Lambda(\beta+\lambda)\big)\,(1-x)^\lambda.$$

Man erhält nun, wenn man

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+a\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{2}-a\right) = \frac{\pi}{\cos a\pi}$$

berücksichtigt

$$(A_1)\quad S'(c) = -\frac{\cos\frac{(a-b)\pi}{2}}{\pi} c^b \log(1-c^2) F\left(\frac{a+b+1}{2}, \frac{b-a+1}{2}, 1, 1-c^2\right)$$
$$+\frac{\cos\frac{(a-b)\pi}{2}}{\pi} c^b \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{a+b+1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{b-a+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b-a+1}{2}\right)\lambda!\,\lambda!}$$
$$\times\left(2\Lambda(\lambda+1) - \Lambda\left(\lambda+\frac{a+b+1}{2}\right) - \Lambda\left(\lambda+\frac{b-a+1}{2}\right)\right)(1-c^2)^\lambda.$$

Multiplicirt man mit c und schreibt dann b, a, $\frac{1}{c}$ resp. anstatt a, b, c so bekommt man

$$(B_1)\quad S''(c) = -\frac{\cos\frac{(a-b)\pi}{2}}{\pi} c^{-a-1} \log\frac{c^2-1}{c^2} F\left(\frac{a+b+1}{2}, \frac{a-b+1}{2}, 1, \frac{c^2-1}{c^2}\right)$$
$$+\frac{\cos\frac{(a-b)\pi}{2}}{\pi} c^{-a-1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{a+b+1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{a-b+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a-b+1}{2}\right)\lambda!\,\lambda!}$$
$$\times\left(2\Lambda(\lambda+1) - \Lambda\left(\lambda+\frac{a+b+1}{2}\right) - \Lambda\left(\lambda+\frac{a-b+1}{2}\right)\right)\left(\frac{c^2-1}{c^2}\right)^\lambda.$$

Die Formeln (A_1) und (B_1) zeigen, dass das Integral, wenn c gegen 1 hingeht, unendlich wird wie $-\frac{\cos\frac{(a-b)\pi}{2}}{\pi}\log(1-c^2)$.

Um die Vergleichung mit der Formel (A_1) zu ermöglichen, gebrauche man die durch

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, -\frac{x}{1-x}\right)$$

dargebotene Verwandlung. Der Logarithmus des Arguments wird $\log\frac{1-c^2}{c^2} - i\pi$ und führt man dann statt $i\cos\frac{(a-b)\pi}{2}$ die reelle Componente von $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{(a-b)\pi}{2}\right)}$ ein, so folgt

$$(A_2)\quad S'(c) = \left(-\frac{\cos\frac{(a-b)\pi}{2}}{\pi}\log\frac{1-c^2}{c^2} + \sin(a-b)\frac{\pi}{2}\right) c^{-a-1}$$
$$F\left(\frac{a+b+1}{2}, \frac{a-b+1}{2}, 1, -\frac{1-c^2}{c^2}\right)$$
$$+\frac{\cos\frac{(a-b)\pi}{2}}{\pi} c^{-a-1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{a+b+1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{a-b+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a-b+1}{2}\right)\lambda!\,\lambda!}$$
$$\times\left(2\Lambda(\lambda+1) - \Lambda\left(\lambda+\frac{a+b+1}{2}\right) - \Lambda\left(\lambda+\frac{a-b+1}{2}\right)\right)\left(-\frac{1-c^2}{c^2}\right)^\lambda.$$

Man führe jetzt in (A_2) die Variable c mittelst eines kleinen rückläufigen Halbkreises aus der Gegend westlich von 1 in die östliche Gegend der positiven Axe hinüber bis zu irgend einem Punkt, wo die Gleichung (B_1) ursprüngliche Geltung hat und ziehe dann $S'(c)$ von $S''(c)$ ab. Es ergiebt sich

$$S''(c) - S'(c) = e^{i(b-a-1)\frac{\pi}{2}} c^{-a-1} F\left(\frac{a+b+1}{2}, \frac{a-b+1}{2}, 1, \frac{c^2-1}{c^2}\right)$$

was für $b = a + 2n + 1$ und $c = 1$ in

$$\lim (c=1) \{S''(c) - S'(c)\} = (-1)^n$$

übergeht. Die Discontinuität hat also ihre Ursache in einem Functionswechsel und nicht etwa in der logarithmischen Unstetigkeit.

Zürich, im December 1895.

Concerning Transcendentally Transcendental Functions.

By

ELIAKIM HASTINGS MOORE of Chicago.

Introduction.

It is customary to classify numbers as algebraic or transcendental with respect to a given arithmetic realm of rationality $\mathfrak{R}$. We classify analytic functions as algebraic or transcendental and the latter as algebraically or transcendentally transcendental with respect to a given functiontheoretic realm of rationality $\mathfrak{R}\{x\}$. I know of but one*) investigation of this last class of functions.

Mr. Hölder: *Ueber eine Eigenschaft der Gammafunction keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen* (*Mathematische Annalen*, vol. 28, pp. 1—13, 1887): proves that

Every**) analytic-function integral $\varphi^*(x)$, $\Gamma^*(x)$ of the respective functional equations

$$\varphi(x+1) = \varphi(x) + \frac{1}{x}, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

satisfies no algebraic differential equation whose coefficients are rational functions of x.

The theorem for $\varphi^*(x)$ is established by the reductio ad absurdum process. That for $\Gamma^*(x)$ follows by the general theorem:

If $f(x)$ satisfies an algebraic differential equation where coefficients are rational functions of x, so does its logarithmic derivative

$$g(x) = \frac{df(x)}{dx} / f(x).$$

The three papers here published are properly grouped under the title *Concerning Transcendentally Transcendental Functions:*

I. Fundamental notions and theorems.

II. Two new transcendentally transcendental functions:

[*) A second paper is referred to in the concluding note of July 6, 1896].

**) Mr. Hölder makes certain unessential restrictions as to the singularities of $\varphi^*(x)$, $\Gamma^*(x)$.

Every analytic-function integral $\varphi^*(x)$, $\psi^*(y)$ of the respective functional equations

$$\varphi(x^a) = \varphi(x) - x, \quad \psi(ay) = \psi(y) - e^y \quad (a \text{ any integer} > 1)$$

is a transcendentally transcendental function with respect to the respective realms of rationality

$$\mathfrak{R}[x, \log x], \quad \mathfrak{R}[y, e^y].$$

III. A new proof of Hölder's theorem on the Gamma function.

The theorems (n, o, p, q, r, s) of I § 1 are worthy of note; the last includes as a very particular case Mr. Hölder's general theorem cited above. In I § 2 a theorem (C) is reached whereby one recognizes an analytic function as transcendentally transcendental if it satisfies a functional equation of a certain type whose associated algebraic transformation has no irreducible invariant form. The four functional equations given above are of this category. The new proof (III) of the theorem for $\Gamma^*(x)$ is given under this algebraic formulation of I § 2.

I.

Fundamental notions and theorems.

§ 1.

We take any n analytic functions

$$f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

of the independent variable x with a common region of existence as n fundamental functions, and consider the totality of rational functions of these n fundamental functions, the coefficients involved being constants. This totality constitutes the *finite* (functiontheoretic, analytic) *realm**) *of rationality*

$$\mathfrak{R}\{x\} \equiv \mathfrak{R}[f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)].$$

*) Mr. Weber (in his memoir: *Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie;* Mathematische Annalen, vol. 43, pp. 521—549, November 1893 — and in his book: *Lehrbuch der Algebra*, vol. 1, pp. 441—460, 1895) denotes by the term *Körper* any closed system whatever of say (Grössen, Elemente or, as I prefer) *marks* capable of combination without ambiguity by addition, subtraction, multiplication and division (division by 0 alone excluded) in accordance with the ordinary *operational identities of algebra.* I propose the term *field* as the English equivalent to *Körper.* [Indeed the *field* of my paper: *A doubly infinite system of simple groups:* presented August 25, 1893 to the Chicago Congress on Mathematics was exactly Mr. Weber's *endlicher Körper*].

Kronecker's term is *Rationalitätsbereich* (*realm of rationality*). Mr. Weber (*Algebra*, vol. I, p. 452) proposes to use this term instead of Körper (field) only when in a particular investigation the marks of the field are to be considered as known or rational. This is surely a desirable usage, and I follow it in using in these papers: *Concerning transcendentally transcendental functions:* the term realm of rationality.

The realm $\mathfrak{R}[1]$ is the *realm of constants*. Every realm contains the realm of constants. Certain functions of the realm $\mathfrak{R}\{x\}$, without vanishing formally, that is, for the $f_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots n)$ as indeterminates, vanish identically as functions of x; these equations are the *identities* of the realm $\mathfrak{R}\{x\}$.

If to the n fundamental functions $f_i(x)$ of $R\{x\}$ we adjoin certain N additional functions $F_I(x)$ and take these $n+N$ functions as fundamental functions for a new realm $\mathfrak{R}_1\{x\}$, $\mathfrak{R}_1\{x\}$ contains $\mathfrak{R}\{x\}$; we shall for brevity say that $\mathfrak{R}_1\{x\}$ is derived from $\mathfrak{R}\{x\}$ by *adjunction* of the N functions $F_I(x)$.

If to the realm $\mathfrak{R}\{x\}$ we adjoin the first derivations $f_i'(x)$ of the n fundamental functions $f_i(x)$ we obtain the *first derivative realm*,

$$\mathfrak{R}^{(1)}\{x\} \equiv \mathfrak{R}^{(1)}[f_1(x),,..f_n(x)] \equiv \mathfrak{R}[f_1(x),\ldots f_n(x), f_1'(x),\ldots f_n'(x)];$$

similarly by adjunction of all derivatives of order $1, 2, \ldots k$, we obtain the *k^{th} derivative realm*

$$\mathfrak{R}^{(k)}\{x\} \equiv \mathfrak{R}^{(k)}[f_1(x), \ldots f_n(x)],$$

and thus an *infinite succession of derivative realms* $(k=1, 2, 3, \ldots)$. The k^{th} derivative of any function of $\mathfrak{R}(x)$ belongs to $\mathfrak{R}^{(k)}\{x\}$.

If the n first derivatives

$$f_1^{(1)}(x), \ldots f_i^{(1)}(x), \ldots f_n^{(1)}(x)$$

belong to the original realm $\mathfrak{R}\{x\}$, then the first derivative of every function of $\mathfrak{R}\{x\}$ belongs to $\mathfrak{R}\{x\}$, and the original realm $\mathfrak{R}\{x\}$ contains the first derivative realm $\mathfrak{R}^{(1)}\{x\}$ and indeed every derivative realm $\mathfrak{R}^{(k)}\{x\}$ $(k=1, 2, \ldots)$. I call the original realm $R\{x\}$ in this case a *perfect realm*. Thus for instance the realm $\mathfrak{R}[x]$ is a perfect realm; likewise, $\mathfrak{R}[1]$, $\mathfrak{R}[x, e^x]$ and $\mathfrak{R}[\log x, x]$.

By a change of the independent variable x to ξ where x and ξ are functions of one another say

$$x = x(\xi), \quad \xi = \xi(x),$$

we *transform the realm*

$$\mathfrak{R}\{x\} = \mathfrak{R}[f_1(x), \ldots f_i(x), \ldots f_n(x)]$$

into the realm

$$\mathfrak{R}\{x(\xi)\} = \mathfrak{R}_1\{\xi\} = \mathfrak{R}[g_1(\xi), \ldots g_i(\xi), \ldots g_n(\xi)],$$

where

$$g_i(\xi) = f_i\big(x(\xi)\big) = f_i(x) \qquad (i=1, 2 \ldots n).$$

A perfect realm $\mathfrak{R}\{x\}$ transforms into a perfect realm

$$\mathfrak{R}\{x(\xi)\} = \mathfrak{R}_1\{\xi\}$$

if and only if $\frac{d\xi}{dx}$ belongs to $\mathfrak{R}\{x\}$. To illustrate: $\mathfrak{R}[x]$ is perfect. Its transformed realm $\mathfrak{R}[e^{\xi}]$ is perfect, while its transformed realm

$\mathfrak{R}[\log \xi]$ is imperfect. Again, the perfect realm $\mathfrak{R}[x, e^x]$ has a perfect transformed realm $\mathfrak{R}[\log \xi, \xi]$.

A rational integral function of any (finite) number of indeterminates whose coefficients belong to $\mathfrak{R}\{x\}$ is called a *form**) *of the realm* $\mathfrak{R}\{x\}$. A form of $\mathfrak{R}\{x\}$ which is the product of two or more forms of $\mathfrak{R}\{x\}$ is *reducible;* otherwise it is *irreducible* or say a *prime-form with respect to* $\mathfrak{R}\{x\}$. *A form is expressible in essentially only one way as a product of prime-forms,* the unessential variations of the one way being obtained by distributing into the various prime-forms various functions of $\mathfrak{R}\{x\}$ whose product is 1.

We take now any particular realm $\mathfrak{R}\{x\}$ as a realm of reference and the infinitude of indeterminates $(\!(z_g)\!)$ $(g = 0, 1, 2, \ldots)$, and attend exclusively to the forms $E(z_0, z_1, \ldots z_m)$ $(m \geqq 0)$ of the realm $\mathfrak{R}\{x\}$ with indeterminates $z_0, \ldots z_m$ selected from the infinitude $(\!(z_g)\!)$. We exclude from consideration forms which vanish identically for the z's and x as independent variables. Every form $E(z_0, z_1, \ldots z_m)$ of the realm which actually contains z_m has, we say, the *order* m.

If a function $\varphi(x)$ of x satisfies an equation

$$E(z_0) = 0,$$

where $E(z_0)$ is a form of the realm $\mathfrak{R}\{x\}$, by the substitution $z_0 = \varphi(x)$, the function is called an *algebraic function with respect to the realm* $\mathfrak{R}$. Non-algebraic functions are called *transcendental.*

Of all functions $z = \varphi(x)$ transcendental with respect to a realm $\mathfrak{R}\{x\}$, those are — to speak in general — most accessible which satisfy (differential) equations of the type

$$E(z_0, z_1, \ldots z_m) = 0,$$

where the $E(z_0, \ldots z_m)$ is a form of $\mathfrak{R}\{x\}$, by the substitution

$$z_0 = \varphi(x), \quad z_g = \frac{d^g \varphi(x)}{dx^g} \qquad (g = 1, 2, \ldots m).$$

I propose for brevity to call such transcendental functions *algebraically transcendental,* and all other transcendental functions *transcendentally transcendental with respect to the realm* $\mathfrak{R}\{x\}$.

Suppose $\varphi(x)$ is algebraic or algebraically transcendental with respect to $\mathfrak{R}\{x\}$. It satisfies by the appropriate substitutions an infinitude of equations

$$E(z_0, z_1, \ldots z_m) = 0$$

of various *orders* m (the order of the form E being the order of the equation $E = 0$). We call the lowest of these $m = m_{\varphi(x)}$ the *order* of

*) For the fundamental theorems concerning forms one may consult § 3 of Mr. Weber's memoir cited above.

$\varphi(x)$ itself. Let a particular $E_h(z_0, \ldots z_m)$ be separated into irreducible factor forms

$$E_h(z_0, \ldots z_m) \equiv \prod_{i=1\cdots r_h} E_{h_i}(z_0, z_1, \ldots z_m).$$

Then $\varphi(x)$ must satisfy at least one of the say *irreducible equations*

$$E_{h_i}(z_0, z_1, \ldots z_m) = 0.$$

$\varphi(x)$ satisfies one irreducible equation $E_{\varphi(x)} = 0$ of its own order $m_{\varphi(x)}$.

Let $F = 0$ be any other equation of order $m_{\varphi(x)}$ satisfied by $\varphi(x)$. Then $F \equiv Q E_{\varphi(x)}$ where Q is a form or a function belonging to $\mathfrak{R}\{x\}$ of order $\leqq m_{\varphi(x)}$. For the forms $E_{\varphi(x)}$, F lead (by the highest common factor process) to three other forms or functions K, L, M of order $\leqq m_{\varphi(x)}$, $m_{\varphi(x)}$, $m_{\varphi(x)} - 1$, respectively*), where

$$KF - LE_{\varphi(x)} \equiv M;$$

whence $\varphi(x)$ satisfies $M = 0$; but $\varphi(x)$ is of order $m_{\varphi(x)}$ while M is of order $\leqq m_{\varphi(x)} - 1$; hence M vanishes formally, $M \equiv 0$; hence $KF \equiv LE_{\varphi(x)}$; $E_{\varphi(x)}$ being irreducible, and K being a factor of $LE_{\varphi(x)}$, K is a factor of L, $L \equiv QK$; hence $F \equiv QE$, as stated. Thus to every $\varphi(x)$ algebraic or algebraically transcendental of order $m_{\varphi(x)}$ corresponds one and (essentially) only one irreducible form $E_{\varphi(x)}$ and equation $E_{\varphi(x)} = 0$ of the order $m_{\varphi(x)}$.

Denoting by $(\!(f(x))\!)$ any infinitude of functions of x, we define the *infinite* realm of rationality

$$\mathfrak{R}\{x\} = \mathfrak{R}[(\!(f(x))\!)]$$

as the totality of rational functions of *any finite* number of the fundamental functions $(\!(f(x))\!)$ the coefficients involved being constants, and we further define for infinite realms, as before for finite realms, the various connected notions. The theorems so far established for finite realms hold also for infinite realms. *Every realm finite or infinite lies in and defines a perfect (finite or infinite) realm.*

When we take for $(\!(f(x))\!)$ the totality of functions $h(x)$ algebraic or algebraically transcendental with respect to the realm of constants $\mathfrak{R}[1]$, we obtain the *natural infinite realm* $\mathfrak{R}_x = \mathfrak{R}[(\!(h(x))\!)]$ *with respect to the independent variable* x. It will be shown below that the totality $(\!(h(x))\!)$ and the whole realm $\mathfrak{R}_x = \mathfrak{R}[(\!(h(x))\!)]$ are identical.

The theorems of fundamental importance now to be enunciated depend for their proof on obvious *formal* considerations (of differentiation and elimination) and accordingly are to be understood with the tacit hypothesis that the functional expressions involved denote actual analytic functions with a common region of existence.

*) If $m_{\varphi(x)} = 0$, M is a function of $\mathfrak{R}\{x\}$.

If $z = \varphi(x)$ is algebraic or algebraically transcendental of order
(a) m with respect to the perfect realm*) $\mathfrak{R}\{x\}$, then so is dz/dx with respect to the same realm $\mathfrak{R}\{x\}$. We obtain another perfect realm
(b) by adjunction to $\mathfrak{R}\{x\}$ of $z = \varphi(x)$ and its first m derivatives with
(c) respect to x. Further $z = \varphi(x)$ is algebraic or algebraically transcendental with respect to $\mathfrak{R}[1]$ and hence belongs to the $((h(x)))$ of $\mathfrak{R}_z$. This applies to every function belonging to the perfect realm $\mathfrak{R}\{x\}$. (Thus every perfect realm $\mathfrak{R}\{x\}$ belongs to the $((h(x)))$ of $\mathfrak{R}_z$).

(d) The realm $\mathfrak{R}_z$ is perfect $\big((a)$ for $\mathfrak{R}\{x\} \equiv \mathfrak{R}[1]\big)$. Any finite
(e) realm $\mathfrak{R}\{x\}$ within $\mathfrak{R}_x$ may within $\mathfrak{R}_x$ be extended to a perfect finite
(f) realm (b, d). Hence every function belonging to or algebraic or algebraically transcendental with respect to $\mathfrak{R}_x$ belongs to the $((h(x)))$ of $\mathfrak{R}_x$ (e, c); thus $((h(x)))$ and $\mathfrak{R}_z$ are identical. Hence if a function is
(g) transcendentally transcendental with respect to *any particular* perfect realm it is so with respect to *every* perfect realm $\big($by (c), since every realm contains $\mathfrak{R}[1]\big)$, and so (e) with respect to $\mathfrak{R}_x$.

(h) $\mathfrak{R}_x$ may be defined as the totality of functions algebraic or algebraically transcendental with respect to *any* perfect realm $\mathfrak{R}\{x\}$, or also as that perfect infinite realm which contains all functions algebraic or algebraically transcendental with respect to its every included finite realm.

(i) $\mathfrak{T}_x$ is the totality of functions $t(x)$ not in $\mathfrak{R}_x$, that is, transcendentally transcendental with respect to $\mathfrak{R}[1]$ or (what is the same thing) with respect to any perfect $\mathfrak{R}\{x\}$, or with respect to $\mathfrak{R}_x$.

(j) Suppose that $z = \varphi(x)$ is algebraic or algebraically transcendental of order m with respect to the realm $\mathfrak{R}\{x\}$, and that we change the independent variable from x to ξ

$$x = x(\xi), \quad \xi = \xi(x),$$

thus obtaining

$$\mathfrak{R}\{x\} = \overline{\mathfrak{R}}\{\xi\}, \quad z = \varphi(x) = \varphi\big(x(\xi)\big) = \psi(\xi).$$

Then $z = \psi(\xi)$ is algebraic or algebraically transcendental of order m with respect to the realm $\mathfrak{R}_1\{\xi\}$ obtained by adjoining to $\overline{\mathfrak{R}}\{\xi\}$ the function $x(\xi)$ and its first m derivatives with respect to ξ.

(k) If $\mathfrak{R}\{x\}$ is a perfect realm then**) its transformed realm $\overline{\mathfrak{R}}\{\xi\}$ is perfect, if $\mathfrak{R}\{x\}$ contains $d\xi/dx$ that is, if $\mathfrak{R}\{\xi\}$ contains $dx/d\xi$.

(l) If $z = \varphi(x)$ belongs to $\mathfrak{R}_x$ and if $x = x(\xi)$ belongs to $\mathfrak{R}_\xi$, then $z = \varphi(x) = \varphi\big(x(\xi)\big) = \psi(\xi)$ belongs to $\mathfrak{R}_\xi$ (f, j, e, h).

---

*) (a, b) hold still if $\mathfrak{R}\{x\}$ be an infinite realm. Unless expressly stated to the contrary all realms are finite realms.

**) As has already been noticed.

If $\xi = \xi(x)$ belongs to $\mathfrak{R}_x$, then $x = x(\xi)$ belongs to $\mathfrak{R}_\xi$ (f). (m)

Let $y = h_1(x)$ exist over the whole x-plane except at certain singular points and curves the cutting out of which from the x-plane leaves it one connected region, and let $x = h_1^{-1}(y)$ exist similarly over the whole y-plane. Then if $y = h_1(x)$ belongs to $\mathfrak{R}_x$, so will $x = h_1^{-1}(y)$ belong to $\mathfrak{R}_y$ (m). Further $\mathfrak{R}_x$ and $\mathfrak{R}_y$ are identical, for if $h(y)$ is any function of $\mathfrak{R}_y$, then (l) $h(y) = hh_1(x) = h_2(x)$ belongs also to $\mathfrak{R}_x$, and conversely. (n) (o)

The functional equations (p)

$$h_1 f_1(x) = h_3(x), \qquad f_2 h_1(x) = h_4(x),$$

where $h_3(x)$ and $h_4(x)$ are any functions of $\mathfrak{R}_x$ have the respective solutions

$$f_1(x) = h_1^{-1} h_3(x), \qquad f_2(y) = h_4 h_1^{-1}(y),$$

which belong to $\mathfrak{R}_x$, $\mathfrak{R}_y$ respectively.

If $t(x)$ belongs to $\mathfrak{T}_x$ and $h(x)$ belongs to $\mathfrak{R}_x$, then $ht(x)$ and $th(x)$ both belong to $\mathfrak{T}_x$ (p). (q)

Consider the perfect (finite or infinite) realm (r)

$$\mathfrak{R}_{(\varphi(x))} = \mathfrak{R}[\{\!\{f(x)\}\!\}]$$

where the infinitude of fundamental functions $\{\!\{f(x)\}\!\}$ is $\varphi(x)$ itself and its successive derivatives with respect to x. If $\varphi(x)$ belongs to $\mathfrak{R}_x$, then so does the whole realm $\mathfrak{R}_{(\varphi(x))}$ (d); conversely, if any function (not a constant) of $\mathfrak{R}_{(\varphi(x))}$ belongs to $\mathfrak{R}_x$, then so does $\varphi(x)$ itself and with it $\mathfrak{R}_{(\varphi(x))}$. In this case the realm $\mathfrak{R}_{(\varphi(x))}$ is finite.

If $\varphi(x)$ belongs to $\mathfrak{T}_x$, then so does every function of $\mathfrak{R}_{(\varphi(x))}$, and conversely, if any function of $\mathfrak{R}_{(\varphi(x))}$ belongs to $\mathfrak{T}_x$, then so does $\varphi(x)$ itself and with it $\mathfrak{R}_{(\varphi(x))}$. (s)

§ 2.

A function is transcendentally transcendental if it satisfies a functional equation of a certain type whose associated algebraic transformation has no irreducible invariant form.

We consider an analytic function $F(x)$ which satisfies a *pure integral functional equation**)

$$F\big(G(x)\big) = H\big(F(x)\big) \tag{1}$$

*) In a later paper of this series I shall consider similarly the *general* pure functional equation belonging to $\mathfrak{R}\{x\}$, in which $G(x)$ is a function and $H(s_0)$ is either a form or the quotient of two forms belonging to $\mathfrak{R}\{x\}$.

belonging to the realm $\mathfrak{R}\{x\}$, that is, one in which $G(x)$ is a functio and $H(z_0)$ is a form belonging to $\mathfrak{R}\{x\}$. If $F(x)$ or $G(x)$ or an function of $\mathfrak{R}\{x\}$ is a many-valued function of x, the functiona equation (1) is of course to be understood as holding when ever function has been *continued* from a certain point $x = x_0$ to (the) (a point $x = G(x_0)$ by a certain *path of Weierstrassian-continuation.*

We consider the transformation T associated with the functiona equation (1)

$$\mathsf{T}x = \bar{x} = G(x), \tag{2}$$

and introduce (for this § 2) for every function $f(x)$ of x the notation

$$\mathsf{T}f(x) = \bar{f}(x) = f(\bar{x}) = f\big(G(x)\big), \tag{3}$$

$$\frac{d^g f(x)}{dx^g} = f^{(g)}(x) = f_g(x) \qquad (g = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

We suppose further that $\mathfrak{R}\{x\}$ is a perfect (finite or infinite) realm and that $\mathfrak{R}\{x\}$ contains its transformed realm

$$\overline{\mathfrak{R}}\{x\} = \mathfrak{R}\{G(x)\}.$$

We have then for $F(x)$ the pure integral functional equation

$$\bar{F} = \bar{F}_0 = H(F) = H_0(F_0) \tag{1'}$$

belonging to $\mathfrak{R}\{x\}$, and for $F_k = F^{(k)}(x)$ the mixed integral functiona equation

$$\bar{F}_k = H_k(F_0, F_1, \ldots F_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

where $H_k(z_0, z_1, \ldots z_k)$ is a form belonging to the *perfect* $\mathfrak{R}\{x\}$, an where indeed the z_k enters linearly with the coefficient $G_1{}^{-k}\frac{\partial H(z_0)}{\partial z_0}$ we may set then

$$H_k(z_0, z_1, \ldots z_k) = G_1{}^{-k} L(z_0) z_k + M_k(z_0, z_1, \ldots z_{k-1}) \tag{6}$$

where $L(z_0) = \frac{\partial H(z_0)}{\partial z_0}$ and the $M_k(z_0, \ldots z_{k-1})$ $(k = 1, 2, \ldots)$ are form or functions of $\mathfrak{R}\{x\}$.

We let T transform the infinitude of indeterminates

$$(\!(z_k)\!) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

by the one-way rational integral transformation (like (5), (6))

$$\mathsf{T}z_0 = \bar{z}_0 = H_0(z_0) \tag{7}$$

$$\mathsf{T}z_k = \bar{z}_k = H_k(z_0, z_1, \ldots z_k) = G_1{}^{-k} L(z_0) z_k + M_k(z_0, z_1, \ldots z_{k-1})$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots)$$

belonging to $\mathfrak{R}\{x\}$.

By (3) and (7) T transforms every form $E(z_0, z_1, \ldots z_m)$ of $\mathfrak{R}\{x\}$ with indeterminates chosen from $(\!(z_k)\!)$ into another form

(8) $$\underline{\bar{E}}(z_0, z_1, \ldots z_m) \equiv \bar{E}(\bar{z}_0, \bar{z}_1, \ldots \bar{z}_m)$$

of $\mathfrak{R}\{x\}$. A form E is *invariant under* T *with respect to* $\mathfrak{R}\{x\}$ if a form or a function $Q_E(z_0)$ of $\mathfrak{R}\{x\}$ exists so that

$$\mathsf{T}E = \underline{\bar{E}} \equiv Q_E(z_0)E.$$

Theorem A. *If E is invariant under* T *with respect to* $\mathfrak{R}\{x\}$, *so is* $\mathfrak{R}(x)E$ *where* $\mathfrak{R}(x)$ *is any function of* $\mathfrak{R}\{x\}$.

Theorem B. *If $F(x)$ is algebraic or algebraically transcendental of order m with respect to $\mathfrak{R}\{x\}$ and so satisfies its peculiar* (§ 1) *equation*

(9) $$E(z_0, z_1, \ldots z_m) = 0$$

where $E(z_0, z_1, \ldots z_m)$ is a form belonging to and irreducible in $\mathfrak{R}\{x\}$, by the substitution

(10) $$z_g = F_g(x) = F^{(g)}(x) \qquad (g = 0, 1, \ldots m),$$

then this form E is invariant under T *with respect to* $\mathfrak{R}\{x\}$.

For by the substitution (10) $F(x)$ satisfies also the equation

$$\underline{\bar{E}}(z_0, z_1, \ldots z_m) = 0.$$

[This is seen by a line of reasoning strictly analogous to that given in II § 2 for a particular function $F(x)$]. Hence (§ 1) the identity

$$\underline{\bar{E}} \equiv Q_E(z_0, z_1, \ldots z_m)E$$

where $Q_E(z_0, z_1, \ldots z_m)$ is a form or a function of $\mathfrak{R}\{x\}$. Now this quotient Q_E is surely independent of $z_1, \ldots z_m$, as is evident in view of (7) when the terms of $\underline{\bar{E}}$, E, Q_E are arranged according to descending powers successively of $z_m, z_{m-1}, \ldots z_0$. Hence Q_E is indeed a form or a function $Q_E(z_0)$ of $\mathfrak{R}\{x\}$, and E is as stated invariant. We enunciate the equivalent

Theorem C. *If an analytic function $F(x)$ satisfies a pure integral functional equation*

$$F\big(G(x)\big) = H\big(F(x)\big)$$

with respect to a perfect (finite or infinite) realm of rationality $\mathfrak{R}\{x\}$ which includes its transformed realm $\mathfrak{R}\{G(x)\}$, and if under the transformation T *associated with the functional equation there is no irreducible invariant form, then is $F(x)$ transcendentally transcendental with respect to $\mathfrak{R}\{x\}$.*

On the hypothesis that an analytic function $F(x)$ *exists* satisfying the functional equation belonging to the realm $\mathfrak{R}\{x\}$, we have deduced a certain algebraic transformation T of the infinitude of forms E belonging to $\mathfrak{R}\{x\}$ with indeterminates chosen from the infinitude (z_k). But obviously enough the realm and the functional equation

with its path of continuation (whether a function $F(x)$ satisfying the equation exists or not) determine T; only *formal* use is made of $F(x)$. The fundamental question arises of determining all invariant forms and the relations between them. This question belongs to the *algebra of the realm* $\mathfrak{R}\{x\}$.

II.

Two new transcendentally transcendental functions.

§ 1.

Introduction. Formulation of the theorems A and B.

Theorem A*. *The analytic function* $\varphi(x)$ *defined by the power series*

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} x^{a^\nu} \quad \begin{pmatrix} |x| < 1 \\ a \text{ is any positive integer} > 1 \end{pmatrix}$$

is a transcendentally trancendental function of the complex variable x *with respect to the realm of rationality*

$$\mathfrak{R}[x, \log x].$$

Theorem B*. *The analytic function* $\psi(y)$ *defined by the series*

$$\psi(y) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} e^{a^\nu y} \quad \begin{pmatrix} \text{The real part of } y \text{ is negative} \\ a \text{ is any positive integer} > 1 \end{pmatrix}$$

is a transcendentally transcendental function of the complex variable y *with respect to the realm of rationality*

$$\mathfrak{R}[y, e^y].$$

*The two theorems are equivalent***). In fact, the transformation

$$x = e^y, \quad y = \log x$$

transforms each of the two realms into the other, and, by the use of

$$\frac{dx}{dy} = x,$$

expresses in the first place $\psi(y)$ and its successive derivatives with respect to y as linear homogenous functions of $\varphi(x)$ and its successive derivatives with respect to x with coefficients belonging to the realm $\mathfrak{R}[x, \log x]$, belonging indeed to the realm $\mathfrak{R}[x]$, and, in the second place, $\varphi(x)$ and its successive derivatives with respect to x as linear

*) By the remark at the middle of II § 1 theorems A and B hold for the general analytic-function integrals $\varphi^*(x)$, $\psi^*(y)$ of the functional equations

$$\varphi(x^a) = \varphi(x) - x, \quad \psi(ay) = \psi(y) - e^y \qquad (a \text{ any integer} > 1)$$

**) In accordance with the general theorems (e, h) of I § 2.

homogeneous functions of $\psi(y)$ and its successive derivatives with respect to y with coefficients belonging to the realm $\mathfrak{R}[y, e^y]$, belonging indeed to the realm $\mathfrak{R}[e^y]$.

$\varphi(x)$, $\psi(y)$ satisfy within their respective regions of existence the functional equations *)

$$\varphi(x^a) = \varphi(x) - x, \qquad \psi(ay) = \psi(y) - e^y.$$

Denoting by $\varphi^*(x)$, $\psi^*(y)$ the general and by $\varphi(x)$, $\psi(y)$ any particular analytic-function integrals of these functional equations for certain well-defined paths of Weierstrassian-continuation of $\varphi(x)$ from $x = x_0$ to $x = x_0^a$ and of $\psi(y)$ from $y = y_0$ to $y = ay_0$, where x_0, y_0 are certain points in the x-, y-planes, we have

$$\varphi^*(x) = \varphi(x) + f(x), \qquad \psi^*(y) = \psi(y) + g(y),$$

where $f(x)$, $g(y)$ are the general analytic-function integrals of the functional equations

$$f(x^a) = f(x), \qquad g(ay) = g(y)$$

for the same paths of continuation as before. These latter equations do have other than the obvious integrals

$$f(x) = c, \qquad g(y) = c,$$

where c is a constant; for instance,

$$f(x) = e^{\frac{2\pi i}{\log a}\log\log x}, \qquad g(y) = e^{\frac{2\pi i}{\log a}\log y}$$

where the branches of the various logarithm-functions are properly chosen (with respect to one another and the paths of continuation).

The proof of theorems A and B given in this paper depends fundamentally**) upon the fact that $\varphi(x)$ *and* $\psi(y)$ *satisfy respectively the pure integral functional equations*

$$\varphi(x^a) = \varphi(x) - x, \qquad \psi(ay) = \psi(y) - e^y$$

belonging to the realms $\mathfrak{R}[x, \log x]$ *and* $R[y, e^y]$, *which are perfect and each of which contains the realm derived from itself by the substitution*

$$x \mid x^a, \qquad y \mid ay$$

connected with its functional equation. Indeed the proof applies also to the *general* analytic-function integrals $\varphi^*(x)$, $\psi^*(y)$ of these functional equations, after certain obvious generalizations of the phrasings of § 2 are made.

---

*) This functional property of $\varphi(x)$ was used by Mr. Stäckel in his proof (to be cited in a moment) that $\varphi(x)$ exists only within the unit circle in the x-plane.

**) Compare theorem C of I § 2 and closing remark of II § 2.

The functions $\varphi(x)$, $\psi(y)$ have limited regions of existence*), namely, within the unit circle in the x-plane and to the left of the imaginary axis in the y-plane respectively.

Not all analytic functions $\Phi(x)$ having limited regions of existence are transcendentally transcendental, for instance with respect to the realm $\mathfrak{R}[x]$. For example: *The analytic function* $\Phi(x)$ *defined by the power series*

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} x^{\nu^a} \qquad (a \text{ is any positive integer greater than } 1)$$

exists only within the unit circle in the x*-plane and, at least for* $a = 2$*, is algebraically transcendental with respect to the realm* $\mathfrak{R}[x]$. The function $\Phi(x)$ for $a = 2$ occurs in the theory of elliptic functions whence Jacobi**) deduces its algebraic differential equation. Further this same function $\Phi(x)$ for $a = 2$ furnished perhaps the earliest***) example of an analytic function with a limited region of existence. An interesting proof that the function $\Phi(x)$ (for any a a positive integer > 1) has this property was published by Mr. Méray†) in 1888. The question — Are the functions $\Phi(x)$ for $a > 2$ algebraically or transcendentally transcendental? — invites attention.

§ 2.

Theorem B.

The analytic function $\psi(y)$ *defined by the infinite series*

$$\psi(y) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} e^{a^\nu y} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{The real part of } y \\ \text{is negative.} \\ a \text{ is any positive integer greater than } 1\end{array}\right)$$

*) See, for instance, for $\varphi(x)$, Stäckel: Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen; Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 112, pp. 262—264, 1893.

**) Jacobi: Ueber die Differentialgleichung, welcher die Reihen

$$1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9 + \text{etc.}, \quad 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \text{etc.}$$

Genüge leisten; Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 36, pp. 97—112, 1834, or Gesammelte Werke, vol. II, pp. 173—190.

***) Communicated to Mr. Schwarz by Kronecker in 1863. Schwarz: Ueber diejenigen Fälle in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt. Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 75, pp. 292—335, 1873, or Gesammelte Mathematische Abhandlungen, vol. II, p. 211—259. (See page 241.)

†) Méray: Sur l'impossibilité de franchir par la formule de Taylor les cercles de convergence de certaines séries entières: Bulletin des Sciences mathématiques, series 2, vol. 12, pp. 248—252, 1888.

is a transcendentally transcendental function of the complex variable y with respect to the realm of rationality

$$\Re[y, e^y].$$

The function $\psi(y)$ and its successive derivatives with respect to y exist only upon the left half of the y-plane, the imaginary axis excluded and the point at infinity included; I denote this region by Ψ.

e^y has at $y = \infty$ its sole (essential) singularity. For any*) function $f(y)$ of the realm $\Re[y, e^y]$ any point of the finite plane is an ordinary point or a pole; the poles and zeroes are isolated. If we cut out of the whole plane $y = \infty$ and every pole and every zero of $f(y)$ each by a small surrounding circle, the function $f(y)$ will exist without singularity or zero upon the remaining region $\mathsf{P}_{f(y)}$. Similarly if we have a finite system E of a finite number of functions of the realm $\Re[y, e^y]$ — for instance, the coefficients of a form $E(z_0, z, \ldots z_m)$ of the realm — this system E determines a region P_E upon which every function of the system exists without singularity or zero.

If from a system E we form another system E' by dividing the functions of E by one of their number, the two regions P_E, $\mathsf{P}_{E'}$ are identical. The addition of a finite number of functions to the system in general decreases the region, but it never destroys it. Two regions P_E, $\mathsf{P}_{E'}$ have a region $\mathsf{P}_{E,E'}$ in common.

I denote by Ω_E the region common to the regions Ψ, P_E.

The proof**) of the the theorem is indirect. Hypothesis H: (H)

(1) $$E(z_0, z_1, \ldots, z_m)$$

is a form of the realm $\Re[y, e^y]$ no one of whose coefficients

(2) $$\Re_i(y, e^y) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

has singularity or zero upon Ω_E. By the substitution

(3) $$z_0 = \psi(y) = \psi_0(y), \quad z_g = \frac{d^g \psi(y)}{dy^g} = \psi_g(y) \qquad (g = 0, 1, \ldots m)$$

the function $\psi(y)$ satisfies the equation

(4) $$E(z_0, z_1, \ldots z_m) = 0$$

everywhere upon Ω_E.

If $\psi(y)$ is with respect to the realm $\Re[y, e^y]$ either algebraic or algebraically transcendental, then the hypothesis H made is valid for $m = 0$ or for $m > 0$ respectively, and can not for every m lead to

*) Not identically 0.

**) The method of proof is much the same as that used by Mr. Hölder (*loc. cit.*) for the functions $\left(\text{in particular } \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)$ satisfying the functional equation

$$\varphi(x+1) = \frac{1}{x} + \varphi(x).$$

a contradiction. It does however for every m lead to a contradiction; hence the truth of theorem B. The contradiction is put in evidence by use of a reduction process*) connected with the functional equation

$$\psi(ay) = \psi(y) - e^y. \tag{5}$$

Introducing for every $f(y)$ the notation $\bar{f}(y)$ for $f(ay)$

$$f(ay) = \bar{f}(y), \tag{6}$$

we have for the functions (2), (3)

$$f(y) = y, \quad e^y, \quad \mathfrak{R}_i(y, e^y), \quad \psi_g(y) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots \\ g = 0, 1, \dots, m \end{pmatrix} \tag{7}$$

the *transformation-equations***)

$$\bar{y} = ay, \quad \bar{e}^y = e^{ay}, \quad \bar{\mathfrak{R}}_i(y, e^y) = \mathfrak{R}_i(ay, e^{ay}), \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots \\ g = 0, 1, \dots, m \end{pmatrix} \tag{8_1}$$

$$a^g \bar{\psi}_g(y) = \psi_g(y) - e^y. \tag{8_2}$$

I recall the fundamental hypothesis H. Let us now set everywhere in place of y $\bar{y} = ay$, that is, $f(\bar{y}) = \bar{f}(y)$ in place of $f(y)$ and, as quite a formal matter, $\underline{z}_g$ in place of $z_g (g = 0, 1, \dots, m)$.

(H) We have then as (a new formulation) a consequence of that hypothesis:

$$\bar{E}(\underline{z}_0, \underline{z}_1, \dots \underline{z}_m) \tag{$\bar{1}$}$$

is a form of the realm $\mathfrak{R}[y, e^y]$ no one of whose coefficients

$$\bar{\mathfrak{R}}_i(y, e^y) \qquad (i = 1, 2, \dots) \tag{$\bar{2}$}$$

has singularity or zero upon a certain region $\Omega_{\bar{E}}$. By the substitution

$$\underline{z}_0 = \bar{\psi}(y) = \bar{\psi}_0(y), \quad \underline{z}_g = \bar{\psi}_g(y) \qquad (g = 0, 1, \dots m) \tag{$\bar{3}$}$$

the function $\bar{\psi}(y)$ satisfies the equation

$$\bar{E}(\underline{z}_0, \underline{z}_1, \dots \underline{z}_m) = 0 \tag{$\bar{4}$}$$

everywhere upon $\Omega_{\bar{E}}$. The regions Ω_E and $\Omega_{\bar{E}}$ are similar and similarly placed with a ratio of similitude of $a : 1$, and with the origin as center of similitude.

(H') Or, by use of (8), we may say that by the substitution

---

*) We might proceed otherwise, introducing for reduction purposes first the functional relation

$$\psi(y + 2\pi i) = \psi(y)$$

and later the relation (5).

**) To prevent ambiguity I write out in full

$$\bar{\psi}_g(y) = \psi_g(\bar{y}) = \frac{d^g \psi(\bar{y})}{d\bar{y}^g} = \frac{1}{a^g} \frac{d^g \psi(y)}{dy^g}.$$

No brief notation for $\frac{d^g \bar{\psi}(y)}{dy^g}$ is introduced.

$(\overline{3})$ $\quad \underline{z}_0 = \psi(y) - e^y, \quad \underline{z}_g = a^{-g}(\psi_g(y) - e^y) \qquad (g = 0, 1, \ldots, m)$

the function $\psi(y)$ satisfies the equation $(\overline{4})$

$(\overline{4})$ $\quad \overline{E}(\underline{z}_0, \underline{z}_1, \ldots, \underline{z}_m) = 0$

everywhere upon $\Omega_{\overline{E}}$.

By the substitution (3) $\psi(y)$ satisfies the equation (4) everywhere upon Ω_E, and now by the substitution $(\overline{3})$ the equation $(\overline{4})$ every where upon $\Omega_{\overline{E}}$. The two regions Ω_E, $\Omega_{\overline{E}}$ have a region $\Omega_{E,\overline{E}}$ in common. By the proper substitution $\psi(y)$ satisfies simultaneously the two equations everywhere upon $\Omega_{E,\overline{E}}$.

It is convenient to introduce the transformation, akin to (8_2)

$(8_2'')$ $\quad \underline{z}_0 = z_0 - e^y, \quad \underline{z}_g = a^{-g}(z_g - e^y) \qquad (g = 0, 1, \ldots, m)$

and by $(8_1, 8_2'')$ transform $E(z_0, z_1, \ldots, z_m)$ to

$$\overline{E}(\underline{z}_0, \underline{z}_1, \ldots, \underline{z}_m) \equiv \underline{\overline{E}}(z_0, z_1, \ldots, z_m).$$

Then by the substitution (3) $\psi(y)$ satisfies both equations (H)

$(4'')$ $\quad E(z_0, z_1, \ldots, z_m) = 0, \quad \underline{\overline{E}}(z_0, z_1, \ldots, z_m) = 0$

everywhere upon $\Omega_{E,\overline{E}}$.

It is now necessary to arrange the *terms* t_i of the form

$$E(z_0, z_1, \ldots, z_m)$$

in a certain order. A general term t has two factors, its coefficient $\mathfrak{R}(y, e^y)$ and its *type* $T = z_{f_1}^{\alpha_1} z_{f_2}^{\alpha_2} \ldots z_{f_r}^{\alpha_r}$ or 1, where to fix the notation the factors $z_{f_h}^{\alpha_h}$ of the type are arranged with *decreasing indices* f_h,

[1]) $t = \mathfrak{R}T$; $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(y, e^y)$, $T = z_{f_1}^{\alpha_1} z_{f_2}^{\alpha_2} \ldots z_{f_r}^{\alpha_r}$ or 1 $\quad \left(\begin{matrix} \alpha_h > 0, \ h = 1, 2, \ldots f_r \\ f_1 > f_2 > \cdots > f_r \end{matrix}\right)$

The term t or the type T has the *degree* d and the *weight* w

$$(10) \qquad d = \sum_{h=1}^{h=r} \alpha_h, \qquad w = \sum_{h=1}^{h=r} \alpha_h f_h.$$

The type 1 has degree and weight each 0. We arrange the terms first according to degree and then those of same degree according to weight, the terms of greater degree and weight preceding. The terms of same degree and weight are set down in any definite (arbitrary) order.

We say that one *form* is of *higher type* then a second when the leading term of the first is of higher type then the leading term of

the second, and in case the leading terms are of the same degree and weight when the number of terms of that degree and weight in the first form is greater then the number in the second form. A succession of forms

$$E_1, E_2, \ldots E_s, E_{s+1} \ldots$$

where every form is of higher type then the one following it in the succession contains a *finite* number of forms.

By $(8, 8_2')$ a term $t = \mathfrak{R}T$ (9) of $E(z_0, z_1, \ldots, z_m)$ with weight w leads to an expression

$$(11) \quad \underline{t} = \overline{\mathfrak{R}}\,\underline{T}, \quad \overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}(ay, e^{ay}), \quad \underline{T} = a^{-w} \prod_{k=1}^{k=r} (z_{f_k} - e^y)^{\alpha_k}$$

of $\underline{E}(z_0, z_1, \ldots, z_m)$; the leading two terms of the expansion of $\underline{T}$ are

$$(12) \qquad a^{-w} T, \quad -a^{-w} \alpha_r e^y z_{f_1}^{\alpha_1} z_{f_2}^{\alpha_2} \ldots z_{f_{r-1}}^{\alpha_{r-1}} z_{f_r}^{\alpha_r - 1};$$

the only term in $\underline{T}$ of the same degree as t or T has the type T; the other terms are of lower degree.

The form E has the leading term $t_1 = \mathfrak{R}_1 T_1$ and the general term $t_i = \mathfrak{R}_i T_i$. By division by the leading coefficient $\mathfrak{R}_1$ we obtain a *prepared* form E_p with coefficients $\frac{\mathfrak{R}_i}{\mathfrak{R}_1}$, and with leading coefficient unity.

(K_1) *Preparation theorem.* The hypothesis H holding for E holds if we replace E by E_p; the region Ω_{E_p} is the same as Ω_E.

We have then (to omit the suffix p and return to the original-notations) in the hypothesis H a prepared form E with leading coefficient unity $(\mathfrak{R}_1 = 1)$.

(K_2) *Reduction theorem.* The form E of the original hypothesis H being a prepared form, the form E^*

$$(13) \qquad E^* \equiv a^{w_1} \overline{\underline{E}} - E \quad \begin{pmatrix} w_1 \text{ is the weight of the} \\ \text{leading term of } E \end{pmatrix}$$

is a form of *lower type* than E, since in E^* the leading term of E has disappeared and no term of new type, higher or of the same degree and weight has been introduced. The coefficients of E^* which are all without singularity on $\Omega_{E, \overline{E}}$ do not all vanish everywhere on $\Omega_{E, \overline{E}}$, the proof of which principal lemma (L) I reserve for § 3; hence (omitting from E^* those terms whose coefficients do vanish everywhere on $\Omega_{E, \overline{E}}$ and are then formally 0) we see that there is a region Ω_{E^*} contained*) in $\Omega_{E, \overline{E}}$ upon which no (remaining) coefficient of E^*

*) Ω_{E^*} is obtained from $\Omega_{E, \overline{E}}$ by cutting out the isolated zeroes of the (remaining) coefficients of E^*.

has singularity or zero. Further (H, 4″, 13) by the substitution (3) $\psi(y)$ satisfies the equation

$$E^*(z_0, z_1, \ldots z_m) = 0 \tag{14}$$

everywhere upon $\Omega_{E,\overline{E}}$ and so everywhere upon Ω_{E^*}.

Hence if the hypothesis (H) is true for any form E it is by (K_1, K_2) true for the form E^* of lower type than itself; after a finite number of such reductions we obtain for E^* a form independent of the $z's$, that is, a function of the realm $\mathfrak{R}[y, e^y]$ which at the same time does not and does vanish everywhere on Ω_{E^*}: which contradiction demonstrates the falsity of the hypothesis H whatever the value of m and *hence the truth of the theorem B.*

The latter part of this § 2 has proved the algebraic theorem: *The transformation* $(8_2')$ *of the infinitude of indeterminates* $((z_g))$ $(g = 0, 1, 2 \ldots)$ *has no invariant form* $E(z_0, z_1, \ldots, z_m)$ $(m \geqq 0)$ *belonging to* $\mathfrak{R}[y, e^y]$. For (I § 2) if E is invariant, so is the *prepared* E, and (for the prepared E) a form or a function $Q_E(z_0)$ of $\mathfrak{R}[y, e^y]$ exists such that $\underline{\overline{E}} \equiv Q_E(z_0)\, E$; by comparison of leading terms of E, $\underline{\overline{E}}$ the only possible $Q_E(z_0)$ is $Q_E(z_0) = a^{-w_1}$ where w_1 is the weight of the leading term of E. But we have seen that for no prepared E is $\underline{\overline{E}} \equiv a^{-w_1} E$.

§ 3.

The principal lemma L of the reduction theorem K_2 of § 2.

Principal lemma L. From the prepared form* $E(E \neq 1)$ by the (L) substitutions $(3, 8_2')$ we obtain the form $\underline{\overline{E}}$. Some of the coefficients of the reduced form E^*

$$E^* \equiv a^{w_1}\, \underline{\overline{E}} - E \quad \begin{pmatrix} w_1 \text{ is the weight of the} \\ \text{leading term of } E \end{pmatrix} \tag{13}$$

persist, that is, do not vanish everywhere on $\Omega_{E,\overline{E}}$, or, since every function of the realm $\mathfrak{R}[y, e^y]$ is an analytic function of y, what amounts to the same thing, do not vanish everywhere in the y-plane.

The secondary lemmas $L_1, L_2 \ldots$ used in the proof of this principal lemma L are proved in § 4.

The general term $t = \mathfrak{R}T$ of E with weight w gives rise in E^* to the term of the same type

$$(a^{w_1 - w}\, \overline{\mathfrak{R}} - \mathfrak{R})\, T \tag{15}$$

and terms of lower degree.

---

*) It is proper to *assume* that the prepared form E is not independent of the $z's$, $E \neq 1$, since as soon as E is independent of the $z's$ the reduction process $(K_1 K_2)$ has reached its contradictory conclusion.

The leading type T_1 of E disappears in E^*, for $\mathfrak{R}_1 = \overline{\mathfrak{R}}_1 = 1$, $w = w_1$.

There may be several terms $t = \mathfrak{R}T$ of the same degree as t_1, say for brevity of highest degree. If so a term of every such type T will persist in E^* unless the coefficient $\mathfrak{R}$ and the weight w of the term t be such that

$$a^{w_1 - w}\overline{\mathfrak{R}} - \mathfrak{R} \tag{16}$$

vanishes everywhere in the y-plane, that is, (by L_2, L_5 of § 4) unless

$$\mathfrak{R} = dy^{w - w_1} \tag{17}$$

where d is an arbitrary constant. If any such term does not have its coefficient of the form (17), its type will persist in E^*, and for this case the lemma L is proved.

If however every term of highest degree has its coefficient of the form (17) — and it will be noticed that this case and the case just disposed of cover all possible cases, viz., this case includes the case with only one term of highest degree — then in E^* there are no persisting terms of this degree and we must seek a persisting term of lower degree. The leading term $t_1 = \mathfrak{R}_1 T_1 = T_1$

$$T_1 = z_{g_1}^{\beta_1} z_{g_2}^{\beta_2} \cdots z_{g_s}^{\beta_s} \qquad \begin{pmatrix} \beta_h > 0, & h = 1, 2, \ldots, s \\ g_1 > g_2 > \cdots > g_s \end{pmatrix} \tag{18}$$

has as its leading term in $E^* = a^{w_1}\overline{E} - E$,

$$-\beta_s e^y T_{1^*}, \qquad T_{1^*} = z_{g_1}^{\beta_1} z_{g_2}^{\beta_2} \cdots z_{g_{s-1}}^{\beta_{s-1}} z_{g_s}^{\beta_s - 1}. \tag{19}$$

I affirm that this type T_{1^*} persists in E^*. T_{1^*} is of degree one less than that of T_1, the highest of E. This type T_{1^*} of E^* could come only from terms of the following type in E

$$T_{1^*} z_l, \quad T_{1^*} \qquad (l = 0, 1, \ldots, m) \tag{20}$$

but terms of the type $T_{1^*} z_l$ with $l > g_s$ do not occur in E, for the weight $w_1 - g_s + l$ would exceed the weight w_1 of the leading term $T_1 = T_{1^*} z_{g_s}$. The type T_{1^*} of E^* comes from the following terms of E

$$d_l y^{-g_s + l} T_{1^*} z_l, \quad \mathfrak{R}_{1^*} T_{1^*} \qquad (l = 0, 1, \ldots, g_s) \tag{21}$$

where the d_l's are constants ($d_{g_s} = 1$) for $l < g_s$ perhaps 0 and where $\mathfrak{R}_{1^*}$ belongs to the realm $\mathfrak{R}$ and may be 0, and has in fact the coefficient

$$-e^y\left(\beta_s + \sum_{l=0}^{g_s - 1} d_l y^{-g_s + l}\right) + (a^{g_s}\overline{\mathfrak{R}}_{1^*} - \mathfrak{R}_{1^*}) \qquad (\beta_s > 0) \tag{22}$$

and (by L_2, L_6 of § 4) this coefficient persists.

The principal lemma has been proved.

§ 4.

Secondary lemmas: Certain formal identities in the realms $\mathfrak{R}[y]$, $\mathfrak{R}[y, w]$.

$R(y)$, $R(x, w)\ldots$ denote rational functions*) of the argument (y), $(y, w)\ldots$, respectively, the coefficients involved being unrestricted constants. a denotes always a positive integer greater than unity.

If $R(y)$ vanishes everywhere in the y-plane, then $R(y)$ vanishes in form or „formally", that is, the numerator of $R(y)$ vanishes formally. I express this meaning by the notation (L_1)

$$R(y) \equiv 0.$$

If $R(y, e^y)$ vanishes everywhere in the y-plane then $R(y, w) \equiv 0$, where y, w are independent variables. For e^y is not an algebraic function of y with respect to the realm $\mathfrak{R}[y]$. (L_2)

If $R(y, w) \not\equiv 0$, then $R(ay, w^a) = \overline{R}(y, w) \not\equiv 0$. (L_3)

The formal identity (L_4)

$$a^k S(ay) - S(y) \equiv 0, \tag{1}$$

where k is a constant, is possible if and only if k is an integer (positive, negative or zero) and

$$S(y) \equiv dy^{-k}, \tag{2}$$

where d is an arbitrary constant.

That the function (2) $S(y) \equiv dy^{-k}$ is a solution of the identity (1) is obvious. I must show further that every particular solution falls under the general solution (2).

$S(y) \equiv 0$ is a solution of (1), and is found under (2), viz. for $d = 0$.

$S(y) \equiv d'$, where d' is a constant, is a solution of (1) for $k = 0$, and is found under (2) for $k = 0$, viz., $d = d'$.

Any other function $S(y)$ has a positive finite number of poles (zeroes). Let $y = y_0$ be a pole (zero) of a function $S(y)$ which satisfies (1); from $S(y_0) = \infty(0)$, we have by (1) $a^k S(ay_0) = \infty(0)$, so that $y = ay_0$ is likewise a pole (zero) of $S(y)$. In this way, from the one pole (zero) $y = y_0$ we obtain the infinitude of poles (zeroes) $y = a^\nu y_0$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, which are distinct unless $y_0 = 0$ or ∞. Whence $S(y)$ has its sole (perhaps multiple) pole at $y = 0$, and zero at $y = \infty$, or vice versa, and is in either event of the form

$$S(y) \equiv dy^t \tag{3}$$

where d is a constant $d \neq 0$ and t is a positive or negative integer. But $S(y)$ must satisfy (1). Hence

*) We exclude from consideration those rational functions whose denominators vanish identically.

$$d(a^{k+t} - 1)\, y^t \equiv 0,$$

which is satisfied if and only if $t = -k$, which is a requirement in the first place on the k in (1) that it be an integer $\neq 0$, and in the second place on the t in (3) that $t = -k$. We have then in

$$S(y) \equiv dy^{-k} \qquad \begin{pmatrix} d \neq 0 \\ k \text{ an integer} \neq 0 \end{pmatrix} \tag{3'}$$

a solution of (1) for k an integer, and it also is contained under (2).

The theorem L_4 is thus fully established.

(L_5) *The formal identity*

$$a^k R(ay, w^a) - R(y, w) \equiv 0 \tag{4}$$

where k is a constant, is possible if and only if k is an integer and

$$R(y, w) = dy^{-k} \tag{5}$$

where d is an arbitrary constant.

(5) is obviously a solution of (4). Every solution of (5) falls under (4), for:

Let $R(y, w)$ be any particular solution of (4). $R(y, w)$ — I take it in reduced form — has no factor w^b (b a positive integer) in its denominator, for then $R(ay, w^a)$ would have the factor w^{ab} and the identity (4) could not subsist. Hence, where for brevity we denote $R(y, 0)$ by $S(y)$, $S(y)$ is a rational function of y whose denominator does not formally vanish and which in accordance with (4) satisfies the formal identity

$$a^k S(ay) \equiv S(y). \tag{6}$$

Whence (L_4) k is an integer and

$$R(y, 0) \equiv S(y) \equiv dy^{-k}, \tag{7}$$

where d is a constant.

Now consider the function

$$R(y, w) - R(y, 0) \equiv T(y, w). \tag{8}$$

$T(y, w)$ satisfies (4); from (8) $T(y, 0) = 0$; hence $T(y, w)$ either vanishes identically or has a factor w^b (b a positive integer) in its numerator; the latter alternative is impossible by (4); hence

$$T(y, w) \equiv 0 \quad \text{and} \quad R(y, w) \equiv R(y, 0) \equiv dy^{-k}.$$

(L_6) *The formal identity*

$$\frac{w}{y^f} \sum_{g=0}^{g=f} d_g y^g + a^f R(ay, w^a) - R(y, w) \equiv 0, \tag{9}$$

where f is a positive integer and the $d_g (g = 0, 1, \ldots, f)$ are constants not all of which vanish is impossible.

Suppose that $R(y, w)$ is a solution of (4). Then $R(y, w)$ (which cannot be merely a constant) has no factor w^b (b a positive integer) in its denominator. Hence (applying L_4 as in proof of L_5)

$$R(y, 0) \equiv dy^{-f}$$

where d is a constant $d \neq 0$. I introduce $U(y, w)$ by the identity

$$U(y, w) \equiv \frac{R(y, w)}{R(y, 0)} - 1. \tag{11}$$

$U(y, w)$ satisfies the identity

$$w \sum_{g=0}^{g=f} d_g' y^g + U(ay, w^a) - U(y, w) \equiv 0 \qquad \left(d_g' = \frac{d_g}{d}\right). \tag{12}$$

Now from (12) $U(y, w) \not\equiv 0$, since not every d_g' vanishes. From (11) $U(y, 0) = 0$. Hence we may write

$$U(y, w) \equiv \frac{w^b N(y, w)}{D(y, w)} \tag{13}$$

where b is a positive integer and $N(y, w)$, $D(y, w)$ are rational integral functions of y, w, of degrees b', b'' in the w respectively, neither of which has a factor w. We have

$$U(ay, w^a) \equiv \bar{U}(y, w) \equiv \frac{w^{ab} \bar{N}(y, w)}{\bar{D}(y, w)}. \tag{14}$$

The identity (12) takes the form

$$-w \sum_{g=0}^{g=f} d_g' y^g \equiv \frac{w^{ab} \bar{N}(y, w)}{\bar{D}(y, w)} - \frac{w^b N(y, w)}{D(y, w)}, \tag{12'}$$

where not all the d_g' vanish. If the impossibility of such an identity (12'), and hence of (9), be not obvious, it may be proved in this way. The right of (12') is

$$\frac{w^{ab} \bar{N}_{ab'} D_{b''} - w^b N_{b'} \bar{D}_{ab''}}{\bar{D}_{ab''} D_{b''}}, \tag{15}$$

where the notation exhibits the degrees in the w of the various polynomials; this must reduce to a linear integral function of w. To this end one condition involves the degrees in w of the terms of highest degree in w of the three parts of the expression (15),

$$a(b+b') + b''; \ (b+b') + ab''; \ (a+1)b'', \tag{16}$$

viz., there are two possibilities: *first*, the first and second of these three numbers (16) are equal and each exceeds the third by more than 1, and this is not the case, for if the first and second are equal, then $b + b' = b''$ and each equals the third; and *second*, one or each of the first and second exceeds the third by exactly 1 while neither exceeds the third by more than 1, and this is not the case, for the first cannot exceed the third by exactly 1, and if the second exceeds

the third by exactly 1, then $b + b' = b'' + 1$, and the first exceeds the third by a, that is, by more than 1. Thus we have fully proved this lemma L_6.

III.

A new proof of Hölder's theorem on the Gamma function.

§ 1.

Algebraic formulation of the theorem.

Theorem. *Every analytic-function integral* $\Gamma^*(x)$ *of the functional equation*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

is transcendentally transcendental with respect to the realm of rationality $\mathfrak{R}[x]$.

By theorem C of I § 2 this is an immediate consequence of the following theorem in the *algebra of the realm* $\mathfrak{R}[x]$.

Theorem. *Let us consider the effect on the totality of forms* E *of the realm* $\mathfrak{R}[x]$ *with indeterminates chosen from the infinitude*

$$y_k \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

of the transformation T, *which transforms the realm* $\mathfrak{R}[x]$ *into itself,*

$$\mathsf{T}x = \bar{x} = x + 1,$$

and which transforms the y_k*'s by a linear homogeneous substitution belonging to the realm* $\mathfrak{R}[x]$

$$\mathsf{T}y_0 = \bar{y}_0 = xy_0; \quad \mathsf{T}y_k = \bar{y}_k = xy_k + ky_{k-1} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

and which therefore transforms every form E *into another form* $\bar{E}$,

$$\mathsf{T}E = \bar{E}.$$

Every form

$$E = \mathfrak{R}(x) y_0^m,$$

where $\mathfrak{R}(x)$ *is an arbitrary function of the realm* $\mathfrak{R}[x]$ *and* m *is any positive integer, is (relatively to* $\mathfrak{R}[x]$*) invariant* (I § 2) *under* T,

$$\mathfrak{R}(x)\bar{E} - x^m \mathfrak{R}(\bar{x}) E \equiv 0.$$

There are no other invariant forms E.

We seek the most general invariant form E

$$E(y_0, y_1, \ldots y_n)$$

of (*positive*) degree m in the arguments $y_0, y_1, \ldots y_n$. We arrange the terms of E according to the normal order of II § 2.

Since E is invariant, $\mathfrak{R}(x) E$ where $\mathfrak{R}(x)$ is any function of $\mathfrak{R}[x]$ is invariant (I § 2), and in particular, *the prepared* form corresponding

to E (with leading coefficieut unity) is invariant. We seek then the most general *prepared* invariant form E. This must turn out to be $E \equiv y^m$, where the positive integer m is the degree of the leading term of E.

I now define a transformation P_μ (where μ is an integer) applicable to any form F of the totality of forms E under consideration, viz.,

$$\mathsf{P}_\mu F = \mathsf{T}F - x^\mu F = \bar{F} - x^\mu F,$$

and later consider (with the aid of certain lemmas which are proved in § 2) the transformations by T and P_μ of the terms of E, and then apply P_m to the prepared invariant E. In $\mathsf{P}_m E$ the type of the leading term of the *prepared* E is no longer present; but E is invariant under the *homogeneous* substitution T; hence we must have

$$\mathsf{P}_m E = \bar{E} - x^m E \equiv 0;$$

from this identity the desired conclusion

$$E \equiv y_0^m$$

will follow.

Transformation by T *and* P_μ *of the terms of* E.

The general term of E actually present will have the form

$$t = \mathfrak{R}T; \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(x) \not\equiv 0, \quad T = y_{f_1}^{\alpha_1} y_{f_2}^{\alpha_2} \cdots y_{f_r}^{\alpha_r} \text{ or } 1 \begin{pmatrix} \alpha_h > 0, h = 1,2,\ldots r \\ f_1 > f_2 > \cdots > f_r \end{pmatrix};$$

t or T has the *degree*

$$d = \sum_{h=1}^{h=r} \alpha_h$$

and the *weight*

$$w = \sum_{h=1}^{h=r} f_h \alpha_h.$$

From $t = \mathfrak{R}T(T+1)$ as *source* we obtain by T

$$\mathsf{T}t = \bar{t} = \bar{\mathfrak{R}}\bar{T} = \mathfrak{R}(x+1) \prod_{h=1}^{h=r} (\bar{y}_{f_h})^{\alpha_h} = \mathfrak{R}(x+1) \prod_{h=1}^{h=r} (x y_{f_h} + f_h y_{f_h - 1})^{\alpha_h}$$

[where, if $f_r = 0$, we understand by $x y_{f_r} + f_r y_{f_r - 1}$, $\bar{y}_0 = x y_0$]. We expand $\bar{t}$, arrange the terms in normal order, and notice:

(*a*) The terms of $\bar{t}$ are all of the degree d of the source t and of weight the same as or lower than the weight w of the source t.

(*b*) The leading term of $\bar{t}$ is $\mathfrak{R}(x+1)x^d T$ $\left(\mathfrak{R}(x+1) \not\equiv 0, \text{ since } \mathfrak{R}(x) \not\equiv 0\right)$ of the same type T as the source $t = \mathfrak{R}T$. This is the only term of $\bar{t}$ of the same weight w as the source.

(*c*) If $f_r > 0$, the lowest term of $\bar{t}$ is

$$\mathfrak{R}(x+1) \cdot \prod_{h=1}^{h=r} (f_h y_{f_h - 1})^{\alpha_h}$$

with the weight $w - d$. The various types of weight w and degree d with final suffix greater than 0 give rise in this way to just as many *distinct* types of weight $w - d$ and degree d.

(*d*) Every term of weight $w - k$ has in its coefficient a factor

$$x^{d-k}\mathfrak{R}(x+1).$$

By $\mathsf{P}_\mu t$ the term $t = \mathfrak{R}T$ becomes

$$\mathsf{P}_\mu t = \bar{t} - x^\mu t = \left(\mathfrak{R}(x+1)x^d - \mathfrak{R}(x)x^\mu\right) T +$$

(*e*) terms of lower type. The type T of the source t *persists* as the leading type of $\mathsf{P}_\mu t$, unless

$$\mathfrak{R}(x+1)x^d - \mathfrak{R}(x)\, x^\mu \equiv 0,$$

that is (by lemma L_2, § 2), unless $d = \mu$ and $\mathfrak{R}(x) = c =$ a constant. If however we do have $\mu = d$, $\mathfrak{R}(x) = c \neq 0$, and so $t = cT$, then

(*f*) in $\mathsf{P}_d t$ the type T is wanting, but all other terms of $\bar{t}$ persist, and, unless $t = cy_0^d$, $\mathsf{P}_d t$ really contains such persisting term(s).

Transformation by P_m *of the prepared invariant form* E *of degree* m.

$$\mathsf{P}_m E = \bar{E} - x^m E \equiv 0; \qquad \text{hence:} \quad E = y_0^m.$$

E contains no term of degree $d < m$, for all types of leading weight of that degree really present in E would persist in $\mathsf{P}_m E$ (*a*, *b*, *e*), while $\mathsf{P}_m E$ must vanish identically. E is then *homogeneous* in the $y_0, y_1, \ldots y_n$ of degree m. I prove that $E \equiv y_0^m$ is *the only* prepared invariant form of degree m, by proving that *for any other prepared homogeneous form* E of degree m $\mathsf{P}_m E$ *does not vanish identically.* We may without loss of generality and do suppose further that E has no factor y_0^α. Any such form E has a leading weight w_1 *positive.*

If any term $t^* = \mathfrak{R}^* T^*$ *of* E *has a coefficient* $\mathfrak{R}^*(x)$ *not a constant, then* $\mathsf{P}_m E$ *does not vanish identically.* If the term t^* is one of the highest weight $w = w_1$ this follows from (*a*, *b*, *e*). For the general proof let the coefficients of all terms of weight $w' > w^*$ be constant and let $t^* = \mathfrak{R}^* T^*$ be a term of weight w^* with coefficient $\mathfrak{R}^*(x)$ not a constant. The type T^* of weight w^* could arise in $\mathsf{P}_m E$ only (*a*, *b*) from the term $t^* = \mathfrak{R}^* T^*$ of weight w^* and from various terms t' of higher weight w' having constant coefficients; the coefficient of T in $\mathsf{P}_m E$ will have the form (*b*, *d*)

$$\sum_{k=1}^{k=w_1-w^*} c_k x^{m-k} + x^m \left(\Re^*(x+1) - \Re^*(x)\right) \qquad \begin{pmatrix} w^* = w' - k \\ w' = w^*+1, \dots w_1 \\ k = 1, \dots w_1 - w^* \end{pmatrix}$$

(where the c_k's are constants) which *persists* (lemma L_3, § 2) since $\Re^*(x)$ is not a constant.

We suppose then that all terms of E have constant coefficients $\Re(x) \equiv \varrho$. But the general type T^* of weight w^* still persists in $\mathsf{P}_m E$ unless every $c_k (k = 1, 2, \dots \bar{w}_1 - \bar{w})$ is 0 (lemma L_3, § 2). Now a *particular* c_k arises by combining additively the coefficients of the type T^* in the expansion $\underline{t}$ from the various sources of the *particular* weight $w' = w^* + k$. Whence (we see, by fixing w' and letting w^* vary from $w' - 1$ to 0), if $\mathsf{P}_m E$ does vanish identically, so does $\mathsf{P}_m E^{(w')}$ where $E^{(w')}$ denotes the collection of terms of (any) weight w' in E.

We suppose then that E is a form of homogeneous degree m and of homogeneous weight w with constant coefficients ($m > 0$, $w > 0$). Since E has no factor y_0^a, at least one term of E has the form

$$t = \varrho\, T = \varrho \prod_{h=1}^{h=r} y_{f_h}^{\alpha_h}$$

with $\varrho \neq 0$ and $f_r > 0$. Then in $\mathsf{P}_m E$ we have from the source t as lowest term (c)

$$\varrho \prod_{h=1}^{h=r} f_h\, y_{f_h-1}^{\alpha_h};$$

this type *persists*, since (c) it arises from no other source-type of E than T. *The theorem has been fully proved.*

§ 2.

Three lemmas: certain formal identities in the realm $\Re[x]$.

I state the three lemmas (L_1, L_2, L_3) already used in § 1. They relate to a rational function $\Re(x)$ of x. Mr. Hölder (loc. cit.) proves and uses (L_1) and (L_3). (L_2) depends upon (L_1), since

$$[\Re(x+1) / \Re(x)]_{x=\infty} = 1.$$

(L_1) If $\Re(x)$ satisfies the functional identity

$$\Re(x+1) - \Re(x) \equiv 0,$$

then $\Re(x)$ is a constant c,

$$\Re(x) \equiv c.$$

(L_2) If $\mathfrak{R}(x)$ satisfies the functional identity

$$x^\nu \mathfrak{R}(x+1) - x^\mu \mathfrak{R}(x) \equiv 0,$$

where μ and ν are integers, then

$$\mu = \nu, \quad \mathfrak{R}(x) \equiv c.$$

(L_3) If the functional identity

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{c_k}{x^k} + \mathfrak{R}(x+1) - \mathfrak{R}(x) \equiv 0$$

holds, where the c_k's are constants, then

$$c_k = 0 \quad (k = 1 \ldots l), \qquad \mathfrak{R}(x) \equiv c.$$

Chicago, December 2, 1895.

[Addition of July 6, 1896. Professor Klein has kindly called my attention to a second paper in the literature of transcendentally transcendental functions:

Hurwitz: *Sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle algébrique* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, ser. 3, vol. 6, pp. 327—332, 1889).]

Sur les résidus des fonctions définies par les équations differentielles.

Par

Mr. Michel Petrovitch à Belgrade (Serbie).

Je me propose de montrer comment on peut calculer d'une manière simple les résidus des fonctions satisfaisant aux équations différentielles algébriques du premier ordre, lorsqu'une telle équation satisfait à une certaine condition générale et directement reconnaissable sur l'équation elle-même. Il s'en suivra un moyen efficace et commode pour calculer les differentes valeurs que certaines intégrales curvilignes générales peuvent acquerir le long des contours donnés.

Les pôles de l'intégrale générale d'une équation differentielle du premier ordre peuvent varier avec la constante d'intégration ou être fixes. Les résidus d'une telle intégrale, relatifs à ses pôles fixes ou mobiles, peuvent eux-mêmes être fixes ou varier avec la constante d'integration d'une intégrale à une autre. Je me propose, en premier lieu, de montrer comment les résidus varient lorsque les pôles, auxquels ils se rapportent, sont des pôles *simples* de l'intégrale générale, variant avec la constante d'intégration, et comment on peut reconnaitre si des tels résidus sont eux-mêmes fixes ou dépendent de la valeur attribuée à cette constante.

Commençons par rappeler un procédé général et pratique servant à reconnaître si l'intégrale générale d'une équation algébrique du premier ordre

$$F = \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x)\, y^{m_i} \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n_i} = 0$$

admet, on non, des pôles simples variant avec la constante d'intégration,

Formons le tableau de $2s$ nombres entiers et positifs

$$\xi_i = m_i + n_i \qquad \eta_i = n_i;$$

traçons dans un plan deux axes 0ξ et 0η et, marquons y les s points (ξ_i, η_i). Joignons les points le plus rapproché et le plus éloigné de 0η

par une ligne polygonale, dont chaque sommet serait un des points (ξ_i, η_i) et telle qu'il n'y ait aucun de ces points audessus d'elle.

Ceci étant, j'ai démontré antérieurement (Thèse de doctorat, Paris 1894) le théorème général suivant:

Pour que l'intégrale ait des infinis mobiles d'ordre λ, il faut et il suffit que la ligne polygonale précédente ait un coté à coefficient angulaire égal à $-\lambda$.

Pour que l'intégrale ait des pôles simples mobiles, il faut, donc, et il suffit que la ligne polygonale ait un coté à coefficient angulaire égal à -1.

La circonstance que nous avons en vue: l'existence des pôles simples mobiles, se reconnait donc très-aisément sur l'équation donnée, au moyen des seuls exposants de y et y' dans son premier membre.

Soit $x = a$ un tel pôle; dans son voisinage on aura

$$y = \frac{A}{x-a} + \psi(x)$$

où A est le résidu cherché et $\psi(x)$ une fonction holomorphe au voisinage de $x = a$. En posant

$$f(x) = A + (x-a)\,\psi(x)$$

on aura

$$y = (x-a)^{-1} f(x),$$

$$\frac{dy}{dx} = (x-a)^{-1} f'(x) - (x-a)^{-2} f(x)$$

et le terme général de F prendra la forme

$$\varphi_i(x)\,(x-a)^{-(m_i+2n_i)}\left[(-1)^{n_i} f(x)^{m_i+n_i} + \Theta_i(x)\right]$$

où $\Theta_i(x)$ est un polynome en $f(x)$ et $(x-a)f'(x)$, à coefficients constants, mais dans lequel il n'y a pas de terme dépendant uniquement de $f(x)$.

L'ensemble de termes dans F, pour lesquels l'éxposant $-(m_i+2n_i)$ est le plus petit, est précisement la somme de tous les termes de l'équation proposé correspondant aux indices des points (ξ_i, η_i) situes sur le coté à coefficient angulaire -1. Il s'en suit que si l'on convient de représenter par

Σ_1 la sommation étendue aux indices de tous les points (ξ_i, η_i) situés sur le coté à coefficient angulaire -1,

Σ_2 la sommation relative à tous les autres points,

F pourra s'écrire

$$F = (x-a)^M\left[\Sigma_1 \Omega_i(x) + \Sigma_2 (x-a)^{N_i}\,\Omega_i(x)\right] \tag{1}$$

où M et N_i sont des exposants entiers, positifs et tous différents de zèro, et

$$\Omega_i(x) = \varphi_i(x)\left[(-1)^{n_i} f(x)^{m_i+n_i} + \Theta_i(x)\right].$$

La fonction y étant intégrale de $F = 0$, l'expréssion entre parenthèses dans la formule (1) doit être identiquement nulle, donc

$$\Sigma_1 \Omega_i(x) + \Sigma_2 (x-a)^{N_i} \Omega_i(x) = 0. \tag{2}$$

Supposons maintenant que x tend vers a. Toutes les expréssions $\Theta_i(x)$, d'après leur définition: tendent vers zèro; la fonction $f(x)$ tend vers la limite A et l'on aura ainsi

$$\lim \Omega_i(x) = (-1)^{n_i} \varphi_i(a) A^{m_i + n_i}.$$

La formule (2) donnera donc à la limite

$$\Sigma_1 (-1)^{n_i} \varphi_i(a) A^{m_i + n_i} = 0 \tag{3}$$

et *le résidu cherché A est racine de l'équation algébrique* (3), *après y avoir supprimé les racines nulles.* Il est, d'ailleurs, evident que l'équation a au moins une racine différente de zèro, puisque les exposants $m_i + n_i$, correspondant aux indices des points situés sur le coté de coefficient angulaire -1 sont tous distincts entre eux.

On a ainsi, après avoir reconnu que l'intégrale générale a des pôles simples mobiles, la régle pratique suivante pour calculer les résidus relatifs à ces pôles:

Supposons construite la ligne polygonale relative au premier membre de l'équation, et soient

$$\alpha, \beta, \gamma \ldots . \varkappa$$

les indices des termes correspondant aux points (ξ_i, η_i) qui se trouvent sur le coté à coefficient angulaire -1; les résidus cherchés sont racines non nulles de l'équation algébrique

$$(-1)^{n_\alpha} \varphi_\alpha(a) A^{m_\alpha + n_\alpha} + (-1)^{n_\beta} \varphi_\beta(a) A^{m_\beta + n_\beta} + \cdot \cdot$$
$$\cdot \cdot + (-1)^{n_\varkappa} \varphi_\varkappa(a) A^{m_\varkappa + n_\varkappa} = 0 \tag{4}$$

resolue par rapport à A.

Ces résidus sont, donc, fonctions algébriques des fonctions $\varphi_i(a)$ correspondant aux indices des points situés sur le coté de coefficient angulaire -1; pour qu'ils coient fonctions algébriques des ces pôles mobiles, il faut et il suffit que les rapports de deux quelconques de ces fonctions $\varphi_i(x)$ soient fonctions algébriques de x. *Pour que les résidus en question ne varient pas avec la constante d'intégration, il faut et il suffit que ces rapports soient tous indépendants de x.*

Ce qui précéde donne souvent moyen de calculer les différentes valeurs qu'une intégrale curviligne $\int y(z, C) dz$ (où y est l'intégrale générale d'une équation du premier ordre et C la constante d'intégration) peut prendre le long des contours donnés, sans qu'on ait besoin de connaitre l'expréssion explicite de la fonction y et ses pôles.

Ainsi soit

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

une équation à points critiques fixes. On saura toujours reconnaitre si l'intégrale générale d'une telle équation est, ou n'est pas méromorphe à l'intérieur d'un contour donné Γ dans le plan des imaginaires; supposons qu'il en soit ainsi. Si de plus les pôles de y sont des pôles simples (ce qu'on reconnait facilement d'après ce qui précéde), l'intégrale

$$\int y(z, C)\, dz$$

prise le long d'un tel contour Γ est égale à zèro on a un multiple entier de l'une des quantités

$$2\pi A_1\sqrt{-1},\quad 2\pi(A_1+A_2)\sqrt{-1},\quad 2\pi(A_1+A_2+A_3)\sqrt{-1}\ldots$$

$A_1 \ldots A_n$ étant les racines non nulles de l'équation algébrique (4). Et si, en particulier, les rapports de deux quelconques des coefficients $\varphi_i(x)$, correspondant au coté de la ligne polygonale de F à coefficient angulaire -1, sont indépendants de x, les résidus A_i sont fixes et la valeur de l'intégrale curviligne le long de Γ ne variera pas avec la constante d'intégration. On connaitra donc toutes les valeurs que l'intégrale peut prendre le long des contours Γ.

Si p. ex. $y(z, C)$ est intégrale générale de l'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dz} = \alpha y^2 + f(z)y + \varphi(z)$$

(où α est une constante, f et φ des polynomes en z) l'équation (4) se reduit à $\alpha A - 1 = 0$; l'intégrale curviligne précédente, prise le long d'un contour quelconque dans le plan des z est nulle ou égale à un multiple entier de $\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\alpha}$, ce qu'on vérifie, d'ailleurs en remarquant que la fonction

$$u = e^{-\alpha\int y\, dz}$$

est l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2u}{dz^2} + f(z)\frac{du}{dz} - \alpha\varphi(z) = 0$$

et par suite l'intégrale $\int y\, dz$ ne peut avoir d'autres périodes que

$$\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\alpha}.$$

Prenons comme second exemple la fonction

$$y = sn\,[f(x) + C]$$

satisfaisant à l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - [f'(x)]^2 (1-y^2)(1-k^2y^2) = 0.$$

La ligne polygonale n'a qu'un seul coté à coefficient angulaire négatif, et ce coefficient est -1; les pôles mobiles sont donc tous des pôles simples. L'équation (4) est ici

$$A^2k^2[f'(a)]^2 - 1 = 0$$

(où a est le pôle mobile), d'où les deux résidus

$$A = \pm \frac{1}{k f'(a)}$$

a étant donné, en fonction de la constante C, par la formule

$$f(a) + C = \text{pôle de } sn.$$

Mais c'est surtout lors'quon cherche les résidus des fonctions méromorphes simplement ou doublement périodiques, *n'ayant que des pôles simples*, que la régle précédente devient utile. On formera l'équation

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

à laquelle satisfait une telle fonction et l'on y appliquera directement la régle. Les pôles de l'intégrale générale d'une telle équation seront tous mobiles et simples; les coefficients $\varphi_i(x)$ figurant dans l'équation (4) sont alors constants et par conséquent les résidus seront indépendants de la constante d'intégration et donnés comme racines de l'équation (4). Même pour ces calculs il n'y a pas besoin de connaitre les pôles de la fonction.

Cherchons p. ex. les résidus de la fonction

$$y = \frac{\frac{1}{2g} sn^2 x + \frac{1}{2} cn\, x \cdot dn\, x - \frac{g}{2}}{sn\, x}$$

où $sn\, x$ est définie par

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = g(1-u^2)(1-k^2u^2).$$

En choisissant convenablement g et k, la fonction y satisfait à l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^6 - 4 = 0^*).$$

*) Voir Briot et Bouquet, Journal de l'Ecole Polytechnique, cahier 36, tome XXI. 1856, p. 239.

La ligne polygonale a pour coordonnées des sommets

$$(\xi_1 = 3,\ \eta_1 = 3),$$
$$(\xi_3 = 6,\ \eta_3 = 0),$$
$$(\xi_4 = 0,\ \eta_4 = 0),$$

par conséquent y n'a que des pôles simples. Les sommets qui se trouvent sur le coté à coefficient angulaire -1, sont ceux d'indice 1 et 3. L'équation (4) est donc ici

$$A^3 - 1 = 0$$

et par suite les résidus de y sont les racines cubiques de l'unité.

Ueber die Irreductibilität ganzzahliger ganzer Functionen.

Von

Eugen Netto in Giessen.

Eisenstein hat den Beweis der Irreductibilität der Kreistheilungsgleichung für Primzahlen und Primzahlpotenzen auf den Satz gestützt: *Wenn in einer ganzzahligen ganzen Function*

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_n \tag{1}$$

alle Coefficienten c_λ durch eine Primzahl p theilbar sind, c_n aber durch keine höhere Potenz von p, dann ist f unzerlegbar.

Herr Königsberger hat im 115. Bande des Journ. f. Math. Erweiterungen dieses Satzes gegeben. Nach anderer Richtung und mit anderen Hülfsmitteln als dies dort geschehen ist, wollen wir hier den Eisenstein'schen Satz als Anfangsglied einer ganzen Reihe ähnlicher Theoreme nachweisen.

I. *Ein Polynom von der Gestalt*

$$z^n + \gamma_1 p z^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-\varkappa-1} p z^{\varkappa+1} + \gamma_{n-\varkappa} p^2 z^\varkappa + \gamma_{n-\varkappa+1} p^2 z^{\varkappa-1} + \cdots + \gamma_n^0 p^2, \tag{2}$$

in welchem γ_n^0 eine gegen p theilerfremde ganze Zahl bedeutet, und $n > 2\varkappa$ ist, besitzt keinen Theiler von geringerem als dem $(\varkappa+1)^{ten}$ Grade. Auch im Folgenden soll der obere Index 0 an einer Constanten andeuten, dass diese Constante zu p theilerfremd ist.

Gilt für (2) die Zerlegung

$$(z^\mu + a_1 z^{\mu-1} + \cdots + a_\mu)(z^\nu + b_1 z^{\nu-1} + \cdots + b_\nu) \qquad (\mu + \nu = n), \tag{3}$$

dann folgt aus $a_\mu b_\nu = \gamma_n^0 p^2$ entweder, dass einer der beiden Coefficienten a_μ, b_ν durch p^2, oder dass jeder durch p theilbar ist. Der erste Fall

$$a_\mu = \alpha_\mu^0 p^2, \quad b_\nu = \beta_\nu^0$$

leitet auf dem durch Eisenstein gegebenen Wege durch

$$c_{n-1} = \gamma_{n-1} p^2 = \alpha_\mu^0 p^2 b_{\nu-1} + a_{\mu-1} \beta_\nu^0 \equiv 0 \pmod{p}$$

u. s. w. zu der Einsicht, dass $a_{\mu-1}$ und dann ebenso $a_{\mu-2}, \ldots$ durch p theilbar sein müssen. Bei $a_0 = 1$ tritt dann ein Widerspruch heraus.

Man darf deshalb nur

$$a_\mu = \alpha_\mu^0 p, \quad b_\nu = \beta_\nu^0 p \tag{4}$$

setzen, und nun wollen wir annehmen, es wäre schon bewiesen, dass

$$\begin{aligned} a_{\mu-1} &= \alpha_{\mu-1} p, \ldots a_{\mu-\lambda} = \alpha_{\mu-\lambda} p, \\ b_{\nu-1} &= \beta_{\nu-1} p, \ldots b_{\nu-\lambda} = \beta_{\nu-\lambda} p \end{aligned} \tag{5}$$

ist, was ja nach (4) für $\lambda = 0$ wirklich feststeht. Daraus leiten wir dann her, dass, wenn λ eine gewisse Grenze nicht überschreitet, auch

$$a_{\mu-\lambda-1} = \alpha_{\mu-\lambda-1} p, \quad b_{\nu-\lambda-1} = \beta_{\nu-\lambda-1} p \tag{5a}$$

sein muss. Dazu betrachten wir

$$c_{n-\lambda-1} \equiv 0 \pmod{p^2} \quad \text{und} \quad c_{n-2\lambda-2} \equiv 0 \pmod{p};$$

das ergiebt

$$\begin{aligned} a_\mu b_{\nu-\lambda-1} + \cdots + a_{\mu-\lambda-1} b_\nu &\equiv 0 \pmod{p^2}, \\ a_{\mu-\lambda-1} b_{\nu-\lambda-1} + \cdots\cdots\cdots\cdots &\equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned} \tag{6}$$

Wir haben in diese Congruenzen die Werthe aus (4) und (5) einzusetzen. Dann werden in der ersten alle nicht hingeschriebenen Mittelglieder durch p^2, die hingeschriebenen äusseren Glieder durch p theilbar. Dividirt man durch p, dann entsteht

$$\alpha_\mu^0 b_{\nu-\lambda-1} + a_{\mu-\lambda-1} \beta_\nu^0 \equiv 0 \pmod{p}. \tag{7}$$

In der zweiten Congruenz aus (6) werden alle nicht hingeschriebenen Glieder durch p theilbar; das erste muss daher auch durch p theilbar sein, und somit ist auch

$$(\alpha_\mu^0 b_{\nu-\lambda-1}) \cdot (a_{\mu-\lambda-1} \beta_\nu^0) \equiv 0 \pmod{p}, \tag{8}$$

woraus dann in Verbindung mit (7) sofort die Behauptung (5a) folgt.

Da bei uns in der Form (2) der Coefficient $\gamma_{n-\varkappa} p^2$ noch durch p^2 und $\gamma_1 p$ noch durch p theilbar ist, so können wir in (5) bis $\lambda = \varkappa$ gehen, und erst dann bricht die Folgerungsmöglichkeit ab. Dabei muss aber gleichzeitig noch $\gamma_{n-2\varkappa} p$ zu den Coefficienten von (2) gehören, und daher erklärt sich die Nothwendigkeit der Annahme von $n > 2\varkappa$.

In die Reihe (5) für $\lambda = \varkappa$ darf nun weder $a_0 = 1$ noch $b_0 = 1$ eingehen, d. h. es ist $\mu > \varkappa$, $\nu > \varkappa$, so dass also keiner der beiden Factoren von geringerem als dem $(\varkappa+1)^{\text{ten}}$ Grade sein kann. Damit ist I. bewiesen.

Ist $n = 2\varkappa + 1$, dann folgt die Irreductibilität von (2), da ja kein Factor von geringerem als dem $(\varkappa+1)^{\text{ten}}$ Grade existiren kann. Ist $n = 2\varkappa + 2$, dann kann (2) nach I. nur in zwei irreductible Factoren $(\varkappa+1)^{\text{ten}}$ Grades zerfallen, deren Coefficienten sämmtlich als durch p theilbar nachgewiesen sind. So erhalten wir den Satz:

II. *Das Polynom*

$$z^{2\varkappa+1} + \gamma_1 p z^{2\varkappa} + \cdots + \gamma_\varkappa p z^{\varkappa+1} + \gamma_{\varkappa+1} p^2 z^\varkappa + \cdots + \gamma_{2\varkappa+1}^0 p^2$$

ist irreductibel (vgl. Königsberger). *Das Polynom*

$$z^{2\varkappa+2} + \gamma_1 p z^{2\varkappa+1} + \cdots + \gamma_{\varkappa+1} p z^{\varkappa+1} + \gamma_{\varkappa+2} p^2 z^{\varkappa} + \cdots + \gamma^0_{2\varkappa+2} p^2$$

kann nur in der Form

$$(z^{\varkappa+1} + \alpha_1 p z^{\varkappa} + \cdots + \alpha^0_{\varkappa+1} p)(z^{\varkappa+1} + \beta_1 p z^{\varkappa} + \cdots + \beta^0_{\varkappa+1} p)$$

zerfallen; die beiden dabei auftretenden Factoren sind irreductibel.

Wir knüpfen weiter an das Theorem I. an.

III. *Ein Polynom von der Gestalt*

$$\begin{aligned} &z^n + \gamma_1 p z^{n-1} && + \cdots + \gamma_{n-2\varkappa-2} p z^{2\varkappa+2} \\ &+ \gamma_{n-2\varkappa-1} p^2 z^{2\varkappa+1} && + \cdots + \gamma_{n-\varkappa-1} p^2 z^{\varkappa+1} \qquad (n > 3\varkappa) \\ &+ \gamma_{n-\varkappa} p^3 z^{\varkappa} && + \cdots + \gamma_{n-1} p^3 z + \gamma^{(0)}_n p^3 \end{aligned} \tag{9}$$

kann nur so in zwei Factoren zerfallen, dass der Grad des einen nicht geringer als $(\varkappa+1)$, *der der andern nicht geringer als* $(2\varkappa+2)$ *ist.*

Gilt wieder für (9) die Zerlegung (3) und setzt man

$$a_\mu = \alpha^0_\mu p^3, \quad b_\nu = \beta^0_\nu,$$

so zeigt sich auf dem bereits oben angedeuteten Wege der Widerspruch gegen die Zerlegbarkeit. Es muss demnach

$$a_\mu = \alpha^0_\mu p^2, \quad b_\nu = \beta^0_\nu p \tag{10}$$

gesetzt werden. Aus

$$c_{n-1} = a_\mu b_{\nu-1} + a_{\mu-1} b_\nu = \gamma_{n-1} p^3$$

ergiebt sich sofort wegen (10)

$$a_{\mu-1} = \alpha'_{\mu-1} p. \tag{11}$$

Wir setzen voraus, es gälte, was für $\lambda = 1$ eben bewiesen ist,

$$\begin{aligned} &a_{\mu-1} = \alpha_{\mu-1} p^2, \ldots a_{\mu-\lambda+1} = \alpha_{\mu-\lambda+1} p^2, \\ &a_{\mu-\lambda} = \alpha'_{\mu-\lambda} p, \ldots a_{\mu-2\lambda+1} = \alpha'_{\mu-2\lambda+1} p, \\ &b_{\nu-1} = \beta_{\nu-1} p, \ldots b_{\nu-\lambda+1} = \beta_{\nu-\lambda+1} p; \end{aligned} \tag{12}$$

dann wollen wir zeigen, dass, wenn λ eine gewisse Grenze nicht überschreitet, auch noch

$$\begin{aligned} &a_{\mu-\lambda} = \alpha_{\mu-\lambda} p^2; \quad a_{\mu-2\lambda} = \alpha'_{\mu-2\lambda} p, \quad a_{\mu-2\lambda-1} = \alpha'_{\mu-2\lambda-1} p; \\ &b_{\nu-\lambda} = \beta_{\nu-\lambda} p \end{aligned} \tag{13}$$

sein muss. Dazu brauchen wir die vier Congruenzen

$$\begin{aligned} &c_{n-\lambda} \equiv 0 \pmod{p^3}, \quad c_{n-2\lambda} \equiv 0 \pmod{p^2}, \\ &c_{n-2\lambda-1} \equiv 0 \pmod{p^2}, \quad c_{n-3\lambda} \equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned} \tag{14}$$

Setzen wir die Werthe (10), (11), (12) in diese Congruenzen ein, dann liefert $c_{n-2\lambda} \equiv 0$ nach Division durch p, und $c_{n-3\lambda} \equiv 0$ nach Multiplication mit $\beta^0_\nu \cdot \alpha'_{\mu-\lambda}$ die beiden Congruenzen

$$\begin{matrix}(\beta_\nu^0 a_{\mu-2\lambda}) + (\alpha'_{\mu-\lambda} b_{\nu-\lambda}) \equiv 0 \\ (\beta_\nu^0 a_{\mu-2\lambda}) \quad (\alpha'_{\mu-\lambda} b_{\nu-\lambda}) \equiv 0\end{matrix} \pmod{p},$$

und deshalb ergiebt sich, wie unmittelbar ersichtlich ist,

(13a) $$a_{\mu-2\lambda} = \alpha'_{\mu-2\lambda} p,$$

(15) $$\alpha'_{\mu-\lambda} \cdot b_{\nu-\lambda} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Hier ist durch (13a) schon ein Theil der Behauptungen (13) bewiesen. Mit (15) combiniren wir die erste Congruenz aus (14), tragen wieder (10), (11), (12) in sie ein, heben durch p^2 und erhalten

$$\alpha'_{\mu-\lambda}\beta_\nu^0 + \alpha_\mu^0 b_{\nu-\lambda} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Das liefert mit (15) zusammen weitere Theile von (13), nämlich

(13b) $$\begin{aligned} b_{\nu-\lambda} &= \beta_{\nu-\lambda} p, \\ a_{\mu-\lambda} &= \alpha'_{\mu-\lambda} p = \alpha_{\mu-\lambda} p^2. \end{aligned}$$

Der noch fehlende Theil der Behauptung geht ohne Weiteres aus $c_{n-2\lambda-1} \equiv 0 \pmod{p^2}$ hervor. Denn hierin bleibt, wenn man alle bisherigen Resultate einträgt, nur $a_{\mu-2\lambda-1}\beta_\nu^0 p \equiv 0 \pmod{p^2}$ zurück, und damit ist auch

(13c) $$a_{\mu-2\lambda-1} = \alpha'_{\mu-2\lambda-1} p$$

nachgewiesen.

Bei der Form (9) des Polynoms sieht man, dass (12) bis zu $\lambda = (\varkappa+1)$ fortgesetzt werden kann. Nur darf $a_0 = 1$ und $b_0 = 1$ nicht unter den in (12) enthaltenen Coefficienten auftreten; daher muss $\mu \geqq 2\varkappa + 2$, $\nu \geqq \varkappa + 1$ sein. Damit ist III. bewiesen.

Es war $n > 3\varkappa$ zu nehmen. Ist $n = 3\varkappa + 1$ oder $n = 3\varkappa + 2$, so wird $\mu + \nu \geqq 3\varkappa + 3 > n$; in diesen Fällen ist demnach eine Zerlegung nicht möglich. Ist dagegen $n = 3\varkappa + 3$, dann kann $\mu = 2\varkappa + 2$, $\nu = \varkappa + 1$ sein, und daher ist ein Zerfallen des Polynoms nicht ausgeschlossen.

In beiden Factoren müssen die Coefficienten den Gleichungen (12) gemäss gebildet sein. So liefert

$$(z^2 + \alpha_1' p z + \alpha_2^0 p^2)(z + \beta^0 p) = z^3 + (\alpha_1' + \beta^0) p z^2 + (\alpha_2^0 + \alpha_1' \beta^0) p^2 z + \alpha_2^0 \beta^0 p^3$$

ein Beispiel für eine solche Zerlegung. Wir haben also:

IV. *Die Polynome von der Form*

$$\begin{matrix} z^n + \gamma_1 p z^{n-1} & + \cdots + \gamma_{n-2\varkappa-2} p z^{2\varkappa+2} \\ + \gamma_{n-2\varkappa-1} p^2 z^{2\varkappa+1} & + \cdots + \gamma_{n-\varkappa-1} p^2 z^{\varkappa+1} \\ + \gamma_{n-\varkappa} p^3 z^\varkappa & + \cdots + \gamma_{n-1} p^3 z + \gamma_n^0 p^3 \end{matrix} \qquad (n = 3\varkappa+1, 3\varkappa+2)$$

sind irreductibel, diejenigen von der Form

$$\begin{aligned} z^{3x+3} &+ \gamma_1 p z^{3x+2} &&+ \cdots + \gamma_{x+1} p z^{2x+2} \\ &+ \gamma_{x+2} p^2 z^{2x+1} &&+ \cdots + \gamma_{2x+2} p^2 z^{x+1} \\ &+ \gamma_{2x+3} p^3 z^x &&+ \cdots + \gamma_{3x+2} p^3 z + \gamma^0_{3x+3} p^3 \end{aligned}$$

können, wenn sie überhaupt reductibel sind, nur in zwei Factoren

$$z^{2x+2} + \alpha_1 p z^{2x+1} + \cdots + \alpha_{x+1} p z^{x+1} + \alpha_{x+2} p^2 z^x + \cdots + \alpha^0_{2x+2} p^2,$$

$$z^{x+1} + \beta_1 p z^x + \cdots + \beta_x p z + \beta^0_{x+1} p$$

zerfallen, deren zweiter irreductibel ist, und deren erster auch nur eine Zerfällung in zwei irreductible Factoren des Grades $(x+1)$ *zulassen kann.*

Die hier abgeleiteten Theoreme II. und IV. schlagen in die Richtung hinein, welche von Herrn Königsberger angegeben ist. — Der Eisenstein'sche Satz kann aber auch als das Anfangsglied einer Kette anderer Theoreme angesehen werden, deren nächstes das folgende ist:

V. *Wenn im Polynome*

$$z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_{n-1} z + c_n \tag{16}$$

alle Coefficienten c_λ *durch* p *theilbar sind,* c_{n-1} *aber durch keine höhere Potenz von* p *als die erste, dann ist es entweder irreductibel oder es zerfällt in der Weise, dass es einen Factor des Grades* 1 *und einen anderen irreductiblen Factor des Grades* $(n-1)$ *besitzt.*

Es sei den Voraussetzungen entsprechend

$$c_n = \gamma^0_n p^\tau, \quad c_{n-1} = \gamma^0_{n-1} p \qquad (\tau \geqq 1);$$

wenn dann $a_\mu = \alpha^0_\mu p^\tau$, $b_\nu = \beta^0_\nu$ gesetzt wird, dann stossen wir in der schon mehrfach dagewesenen Art auf den Widerspruch, dass $a_0 = 1$ durch p theilbar sein müsste. Es ist also allein möglich

$$a_\mu = \alpha^0_\mu p^{\tau-\varrho}, \quad b_\nu = \beta^0_\nu p^\varrho \qquad (\tau - \varrho, \varrho \geqq 1) \tag{17}$$

zu setzen. Aus der Gleichung

$$c_{n-1} = \gamma^0_{n-1} p = \alpha^0_\mu b_{\nu-1} p^{\tau-\varrho} + a_{\mu-1} \beta^0_\nu p^\varrho$$

folgt dann, dass nicht beide Exponenten $(\tau - \varrho)$ und ϱ grösser als 1 sein können. Wir dürfen demnach etwa $\varrho = 1$, d. h. statt (17)

$$a_\mu = \alpha^0_\mu p^{\tau-1}, \quad b_\nu = \beta^0_\nu p \tag{18}$$

annehmen, und dann zeigt die vorangehende Gleichung, dass für $\tau > 2$ nicht $a_{\mu-1}$, und für $\tau = 2$ nicht gleichzeitig $a_{\mu-1}$ und $b_{\nu-1}$ durch p theilbar sein kann. Weiter ergiebt sich aus

$$c_{n-2} = \alpha^0_\mu b_{\nu-2} p^{\tau-1} + a_{\mu-1} b_{\nu-1} + a_{\mu-2} \beta^0_\nu p \equiv 0 \pmod{p},$$

dass eine der beiden Grössen $a_{\mu-1}$ und $b_{\nu-1}$ durch p theilbar ist. Den so gefundenen Forderungen wird, abgesehen von einer Aenderung der Bezeichnung nur durch

$$a_{\mu-1} = \alpha^0_{\mu-1}, \quad b_{\nu-1} = \beta_{\nu-1} p \tag{19}$$

genüge geleistet. Geht man mit (18), (19) in die Congruenz

$$c_{n-3} \equiv 0 \pmod{p},$$

dann folgt, dass $b_{\nu-2} = \beta_{\nu-2} p$ werden muss, und nun gelangt man genau wie früher zu

$$b_{\nu-2} = \beta_{\nu-2} p, \quad b_{\nu-3} = \beta_{\nu-3} p, \ldots$$

und kommt daher im Allgemeinen zu dem Widerspruch, dass $b_0 = 1$ durch p theilbar sein müsste. Der Widerspruch wird aber dann und nur dann vermieden, wenn b_0 nicht durch eine Congruenz (mod. p) sondern durch die Gleichung

$$c_0 = \alpha^0_{\mu-1} b_{\nu-\nu} = 1$$

eingeführt wird. Dann ist also $n = (\nu+1)$ d. h. $\mu = 1$, und die Factorenzerlegung wird, da $\alpha^0_{\mu-1} = b_0 = 1$ sein muss,

$$(z + \alpha^0_\mu p^{\tau-1})(z^{n-1} + \beta_1 p z^{n-2} + \cdots + \beta_{\nu-1} p z + \beta^0_\nu p)$$

werden, wobei der zweite Factor nach dem Eisenstein'schen Satze irreductibel ist.

VI. *Wenn im Polynome* (16) *alle Coefficienten c_i durch p theilbar sind, c_{n-2} aber durch keine höhere Potenz von p als die erste, dann ist* (16) *entweder irreductibel, oder es besitzt einen irreductiblen Factor vom Grade* $(n-1)$ *oder* $(n-2)$.

Es sei, der Voraussetzung entsprechend,

$$c_n = \gamma^0_n p^\tau, \quad c_{n-1} = \gamma^0_{n-1} p^\sigma, \quad c_{n-2} = \gamma^0_{n-2} p,$$

wobei $\tau, \sigma > 1$ angenommen werden können und sollen, da man ja sonst auf den Fall des Eisenstein'schen Satzes oder auf V. zurückkommt. Wenn dann

$$a_\mu = \alpha^0_\mu p^\tau, \quad b_\nu = \beta^0_\nu$$

gesetzt wird, dann stossen wir in der schon mehrfach dagewesenen Weise auf den Widerspruch, dass $a_0 = 1$ durch p theilbar sein müsste. Es ist also allein möglich

$$a_\mu = \alpha^0_\mu p^{\tau-\varrho}, \quad b_\nu = \beta^0_\nu p^\varrho \qquad (\tau - \varrho, \varrho \geqq 1) \tag{20}$$

zu setzen. Aus der Gleichung

$$c_{n-2} = \gamma^0_{n-2} p = \alpha^0_\mu b_{\nu-2} p^{\tau-\varrho} + a_{\mu-1} b_{\nu-1} + a_{\mu-2} \beta^0_\nu p^\varrho \tag{21}$$

geht dann hervor, dass mindestens eine der beiden Grössen $a_{\mu-1}$, $b_{\nu-1}$ durch p theilbar ist.

Ist nur eine von beiden, etwa $b_{\nu-1}$ durch p theilbar, dann wird

$$a_{\mu-1} = \alpha^0_{\mu-1}, \quad b_{\nu-1} = \beta_{\nu-1} p. \tag{22}$$

Jetzt aber stehen wir genau auf dem Boden der an (19) geknüpften Schlüsse, und wir ersehen daher, dass wenn (16) reductibel ist, die Annahme (22) auf einen irreductiblen Theiler vom Grade $(n-1)$ führen wird. In diesem Falle zeigt

$$c_{n-1} = \gamma^0_{n-1} p^\sigma = \alpha^0_\mu \beta_{\nu-1} p^{\tau-\varrho+1} + \alpha^0_{\mu-1} \beta^0_\nu p^\varrho,$$

dass nicht beide Zahlen ϱ und $(\tau-\varrho+1)$ grösser als σ sein können.

Gilt aber (22) nicht, und sind beide Zahlen $a_{\mu-1}$, $b_{\nu-1}$ durch p theilbar

$$a_{\mu-1} = \alpha_{\mu-1} p, \quad b_{\nu-1} = \beta_{\nu-1} p, \tag{22a}$$

so folgt aus (21), dass eine der beiden Zahlen ϱ und $(\tau-\varrho)$ gleich 1 sein muss. Da in (20) beide mit einander vertauscht werden können, so dürfen wir, ohne eine Beschränkung einzuführen,

$$a_\mu = \alpha^0_\mu p^{\tau-1}, \quad b_\nu = \beta^0_\nu p \qquad (\tau-1 \geqq 1) \tag{20a}$$

setzen. Ist $(\tau-1) > 1$, dann kann wegen

$$\gamma^0_{n-2} p = \alpha^0_\mu b_{\nu-2} p^{\tau-1} + \alpha_{\mu-1} \beta_{\nu-1} p^2 + a_{\mu-2} \beta^0_\nu p \tag{21a}$$

$a_{\mu-2}$ nicht durch p theilbar sein. Ist $(\tau-1) = 1$, dann kann, auch wegen (21a), nicht gleichzeitig $a_{\mu-2}$ und $b_{\nu-2}$ durch p theilbar werden. Auch hier können wir aber $a_{\mu-2}$ als prim zu p ansehen, da bei $(\tau-1) = 1$ wieder die a und b in (20a), (22a) vertauscht werden könnten. Es ist also jedenfalls

$$a_{\mu-2} = \alpha^0_{\mu-2}. \tag{23}$$

Aus den weiteren Congruenzen mod. p

$$c_{n-4} \equiv 0, \; c_{n-5} \equiv 0, \ldots$$

entnimmt man dann der Reihe nach

$$b_{\nu-2} \equiv 0, \; b_{\nu-3} \equiv 0, \ldots \pmod{p};$$

und so sind wir durch (23) auf unseren alten Weg gelangt.

Will man den hier auftretenden Widerspruch beseitigen, so muss an Stelle der Congruenz, durch welche b_0 eingeführt werden würde, die Gleichung

$$c_0 = \alpha^0_{\mu-2} b_{\nu-\nu} = 1$$

treten. Dann ist also $n = (\nu+2)$ d. h. $\mu = 2$, und die Factorenzerlegung wird, da $\alpha^0_{\mu-2} = b_{\nu-\nu} = 1$ entsteht,

$$(z^2 + \alpha_{\mu-1} p z + \alpha^0_\mu p^{\tau-1})\,(z^{n-2} + \beta_1 p z^{n-3} + \cdots + \beta_{1-1} p z + \beta^0_\nu p)$$

werden, wobei der zweite Factor nach dem Eisenstein'schen Satze irreductibel ist.

Es ist klar, dass wir in gleicher Weise fortgehen können. Die Resultate der Untersuchung werden sich dabei ganz ähnlich den zuletzt gewonnenen beiden Sätzen ausdrücken lassen.

On the Stability of a Frictionless Liquid. Theory of Critical Planes.

By

A. B. Basset M. A.; F. R. S.

1. In a recent paper*) Lord Rayleigh has attempted to investigate the conditions of stability of a frictionless liquid when there are *critical planes*. The statement of the problem is as follows: —

Liquid is flowing in steady motion between the two planes $y = 0$ and $y = a$, the velocity being parallel to the axis of x and equal to V, where V is some function of y. A *small* disturbance is communicated to the liquid, it is required of investigate the conditions of stability, the motion being supposed to be in two dimensions.

In steady motion the component velocities are $(V, 0)$; after disturbance they an $(V+u, v)$, where u and v are small quantities *in the beginning of the disturbed motion*, and Lord Rayleigh proves that v is determined by the equation**)

$$\left(\frac{n}{k} + V\right)\left(\frac{d^2v}{dy^2} - k^2v\right) = \frac{d^2V}{dy^2}v. \tag{1}$$

This equation is obtained in the following manner. Whatever the character of the disturbance may be, the velocity v can be expressed by means of Fourier's theorem in a series of (or definite integrals involving) sines and cosines of x. It is therefore sufficient, so far as the coordinate x is concerned, to consider the typical term ε^{ikx}. Also if the disturbed motion is stable, the time factor must be a periodic function, and therefore expressible in the form ε^{int}. It will thus be found that if these substitutions be made, and the pressure and velocity u be eliminated from the equations of motion and continuity, the result will be expressed by (1).

In steady motion the molecular rotation is equal to $-\frac{1}{2}dV/dy$; accordingly if this quantity is constant, the right hand side of (1)

*) Proc. Lond. Math. Soc. vol. XXVII, p. 5.

**) Ibid. vol. XI, p. 57.

vanishes and the equation splits up into two factors, the second of which when equated to zero furnishes the differential equation for v. It may however happen that certain planes exist, which are called *critical* planes, at which the first factor vanishes; and at such a plane it cannot be asserted without further investigation that the second factor vanishes. This circumstance has led Lord Kelvin*) to throw doubts upon the universal application of results which are based upon the solution of the differential equation which is formed by equating the second factor to zero: and Lord Rayleigh has therefore attempted to meet this objection by examining what takes place when a critical plane exists, but the results on pages 10 and 11 are erroneous owing to the fact that they make the molecular rotation infinite at such planes. Some observations are added at the end of the paper which are apparently intended to meet this objection, but they miss the points at issue.

2. The fallacy of the results to which a wrong method of approximation has led him can be shown as follows: —

In questions relating to stability, the velocities produced by the disturbance are by hypothesis small quantities *in the beginning of the disturbed motion;* but a statement of this kind has no meaning unless the standard of measurement is defined. In cases like the present, the meaning of the phrase is, *a velocity whose numerical value is a small quantity in comparison with the numerical value of the velocity in steady motion.* Moreover by Newton's second Law of Motion, the forces required to produce these small velocities must be proportional to them, and the numerical values of these forces must therefore be small quantities compared with the numerical values of the forces required to generate the steady motion in a liquid at rest. Under these circumstances it is an obvious impossibility for a small disturbance to suddenly change the value of the molecular rotation from a finite to an infinite one; and any solution which leads to this result must necessarily be erroneous.

3. The quantity $d^2v \mid dy^2 - k^2v$ is proportional to the difference between the molecular rotation just before and just after disturbance, and must therefore be a small quantity in the beginning of the disturbed motion. Accordingly if the molecular rotation is *not* constant in steady motion, in which case $d^2V|dy^2$ will not be zero, it follows that at a critical plane we must have $d^2V|dy^2 = 0$ or $v = 0$. But the first condition is one which cannot be satisfied except for special values of V; and if the form of the function which determines the velocity in steady motion is *not* of this special form, it follows that $v = 0$ at a critical plane.

*) Phil. Maj. vol. XXIV, p. 275.

4. We are now prepared to work out the theory of critical planes.

For simplicity we shall suppose that the steady motion is such that there are no vortex sheets, in which case

$$V = \varphi(y) \tag{2}$$

where φ is a given function which is finite and continuous throughout the space occupied by the liquid. If possible, let $y = c$ be a critical plane, the condition for which is that

$$-n/k = \varphi(c). \tag{3}$$

This equation determines the value of the time constant n in terms of the wave constant k, provided a real value of c exists which lies between 0 and a. If no value of c exists which lies between these limits, equation (3) represents an impossible state of motion and a critical plane cannot exist.

Substituting the value of n/k from (2) in (1) and integrating, we shall obtain

$$v = Af_1(y) + Bf_2(y) \tag{4}$$

where A and B are the constants of integration, and f_1, f_2 are two independent functions whose form depends upon that of φ. The boundary conditions require that $v = 0$, when $y = 0$ and $y = a$.

Case I. We shall first suppose that $d^2V/dy^2 = 0$ at the critical plane; and also that neither of the functions f becomes infinite between $y = 0$ and $y = a$. In this case the boundary conditions will enable us to eliminate the two constants of integration, and we shall thus obtain an equation of the form

$$F(a, k, c) = 0$$

which is the equation for determining c. The condition for the existence of a critical plane is, that the above equation should have at least one real root lying between 0 and a.

It may however happen that one of the functions, say f_2, becomes infinite between the limits, in which case $B = 0$, and the boundary conditions then require that $f_1(0) = 0$ and $f_1(a) = 0$; is other words that 0 and a should be roots of the equation $f_1(y) = 0$. These conditions cannot be satisfied except for special forms of the function f_1, and when they cannot, the existence of a critical plane is impossible.

Case II. In this case d^2V/dy^2 does not vanish at a critical plane, and consequently v must satisfy the three conditions of vanishing when $y = 0$, $y = c$ and $y = a$; but as the value of v cannot certain more than two arbitrary constants, these three conditions cannot in general be satisfied, in which case a critical plane cannot exist.

5. If the steady motion is such that vortex sheets exist, the

equations must be separately applied to each region bounded by two consecutive vortex sheets; and the relations between the various constants of integration which occur in the solutions must be determined by means of the boundary conditions which exist at a vortex sheet.

6. When the molecular rotation is constant in steady motion, the problem is one which is best treated by special methods. In this case d^2V/dy^2 is zero throughout the whole space occupied by the liquid, and consequently the second factor of (1) must vanish except at a critical plane.

In steady motion

$$V = A - 2\omega y \tag{5}$$

where A is a constant, and ω is the constant molecular rotation. If $\omega + \zeta$ be the the molecular rotation after disturbance, ζ satisfies the equation

$$\frac{d\zeta}{dt} + (V+u)\frac{d\zeta}{dx} + v\frac{d\zeta}{dy} = 0. \tag{6}$$

Since u and v are small quantities in the beginning of the disturbed motion, equation (6) reduces to

$$\frac{d\zeta}{dt} + V\frac{d\zeta}{dx} = 0$$

so that putting

$$\zeta = F(y)\, \varepsilon^{ikx+int}$$

where F is an undetermined function of y, we obtain

$$(n/k + V)\, F(y) = 0. \tag{7}$$

This equation shows that $F(y)$ must be zero except at a critical plane.

Let ψ be the difference between Earnshaw's current function before and after disturbance; then

$$\nabla^2\psi = -2\zeta = -2F(y)\, \varepsilon^{ikx+int}. \tag{8}$$

Equations (7) and (8) shew that ψ is the potential of a surface distribution of matter upon the critical plane, whose density is proportional to $F(c)$; consequently unless $F(c)$ be zero, the critical plane must be a vortex sheet. But it is known from the general principles of Hydrodynamics that a vortex sheet cannot be generated by a disturbing force; hence $F(c)$ must be zero unless the critical plane be a vortex sheet in steady motion.

7. To investigate the conditions for the existence of a critical plane, we must therefore suppose that a vortex sheet exists in steady motion. Let $y = c$ be the equation of the vortex sheet, and on the positive side of this plane let

$$V = V_1 = A - 2\omega(y-c)$$

and on the negative side, let

$$V = V_2 = B - 2\omega(y-c).$$

The condition that the vortex sheet should be a critical plane is that A or B should be equal to $-n/k$; and we shall adopt the former alternative. Writing $\psi\varepsilon^{ikx+int}$ for ψ in (8) we obtain

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} - k^2\psi = -2F(y) \tag{9}$$

and since $F(y)=0$ except at the critical plane, are must have on the positive side of the plane

$$\psi_1 = C\sinh k(y-a). \tag{10}$$

and on the negative side

$$\psi_2 = D\sinh ky \tag{11}$$

the constants being determined so that v or $-d\psi/dx$ vanishes when $y=0$ and $y=a$.

At the critical plane where $y=c$, we must have

$$-\frac{d\psi_1}{dy} + \frac{d\psi_2}{dy} = 2F(c)$$

which gives

$$F(c) = \tfrac{1}{2}k\{C\cosh(a-c) + D\cosh kc\} \tag{12}$$

which determines the surface density $F(c)$.

After disturbance, the particles which originally lay on the critical plane will lie on a surface whose equation may be taken to be

$$y - c - E\varepsilon^{ikx+int} = f(x, y, t) = 0. \tag{13}$$

This surface fulfills the conditions of a bounding surface, and therefore

$$\frac{df}{dt} + V\frac{df}{dx} + v\frac{df}{dy} = 0. \tag{14}$$

Applying (14) to the positive side we get

$$E(n+kV_1) + Ck\sinh k(c-a) = 0;$$

and since by hypothesis

$$n + kV_1 = 0,$$

it follows that $C=0$.

Applying (14) to the negative side we get

$$E(n+kV_2) + Dk\sinh kc = 0$$

which determines the relation between E and D.

From these results it follows that, to the first order of small quantities, the liquid on the positive side of the vortex sheet is uninfluenced by the disturbance. The only effect of the latter is to

displace the particles of liquid which originally formed the vortex sheet into the sinuous surface (14), whilst the surface itself moves forward with the same velocity V_1 which the particles on its positive side had in steady motion.

8. We have lastly to determine the value of c, which fixes the position of the critical plane.

The pressure equation is

$$\frac{du}{dt} + v\frac{dV}{dy} = -\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx} - V\frac{du}{dx}$$

whence recollecting that x and t enter in the form of the factor $\varepsilon^{ikx+int}$, we easily obtain:

$$\left(\frac{n}{k} + V\right)\frac{dv}{dy} - v\frac{dV}{dy} = -\frac{ikp}{\varrho}, \tag{15}$$

whence the condition of continuity of pressure requires that the left hand side of (15) should be continuous. Since v_1 and dv_1/dy are zero, the condition becomes

$$\left(\frac{n}{k} + V_2\right)\frac{dv_2}{dy} + 2\omega v_2 = 0$$

or

$$\tanh kc = k(V_1 - V_2)/2\omega. \tag{16}$$

Now c must be a positive quantity lying between a and zero; moreover since $2\pi/k$ is the wave-length of the disturbance, k must also be positive; hence the *first* condition that the vortex sheet may be critical plane is that

$$0 < k(V_1 - V_2)/2\omega < 1. \tag{17}$$

If this condition is satisfied, let m be the value of kc furnished by (16); then if λ be the wave-length, we shall have $c = \lambda m/2\pi$; and since c cannot be greater than a, we obtain the second condition that

$$\lambda < 2\pi a/m. \tag{18}$$

Unless both the conditions (17) and (18) are satisfied, a critical plane cannot exist.

9. With regard to the method of procedure, it may be objected that the hypothesis that x and t enter into the solution in the form of the factor $\varepsilon^{ikx+int}$ is a pure assumption, that it would be easy to invent examples in which this is not the case. The answer to this objection is, that by making this hypothesis in the first instance, a particular solution can be obtained which can always be generalized by Fourier's theorem or in certain cases by definite integrals of a simpler form. It is also necessary to recollect that before embarking in any mathematical investigations, we must first settle the practical

question as to how the disturbed motion is to be generated. To talk about an arbitrary disturbance is beside the mark, untill we have first invented or imagined some machinery by which this operation can be effected; for if we omit to do this, it may be found that some proposed disturbed motion is an impossibility, and our mathematics will show this by leading us into all sorts of difficulties and apparently inexplicable results.

10. In the class of problems discussed by Lord Rayleigh, a plane of discontinuity $y = c$ usually exists, at which the steady motion changes its character by reason of the molecular rotation or the tangential velocity V being discontinous. We shall therefore suppose that the disturbed motion is generated by means of an impulsive pressure applied to this plane, which produces a velocity $v = \varphi(x)$ at the plane in question.

The differential equation for v is satisfied by

$$v = F(k, y) \cos(kx - nt) \tag{19}$$

and the equation of continuity shows that

$$u = -k^{-1} F'(k, y) \sin(kx - nt)$$

which is an example of the general dynamical theorem, that an impulsive force of one type may produce a velocity of a different type.

The differential equation for F being of the second order will contain two constants. If therefore we confine our attention, for the present, to the liquid lying between the planes $y = c$ and $y = a$, where the latter is one of the bounding planes, the constants must be determined so that

$$F(k, a) = 0,$$

we may therefore write in the place of (19)

$$v = \mathsf{A} f(k, y) \cos(kx - nt)$$

where

$$f(k, a) = 0.$$

The usual process of solution gives a relation of the form

$$n = \psi(k);$$

and when the steady motion is stable, n must be real for all values of k.

The constant A may have any value which is independent of x, y and t; we shall therefore put

$$\mathsf{A} = \frac{2\varphi(\lambda) \cos \lambda k}{\pi f(k, c)},$$

which shows that

$$v = \frac{2 f(k, y)\ \varphi(\lambda)\ \cos \lambda k \cos\{kx - t\psi(k)\}}{\pi f(k, c)}$$

is a solution of (1), and therefore

$$v = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dk \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(k,y)\,\varphi(\lambda)\cos\lambda k\,\cos\{kx - t\psi(k)\}}{f(k,c)}\,d\lambda$$

is also a solution. The initial value of v at the plane $y = c$, is obtained by putting $y = c$ and $t = 0$, which gives

$$\begin{aligned} v &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dk \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\cos\lambda k\,\cos kx\,d\lambda \\ &= \varphi(x) \end{aligned}$$

by Fourier's theorem, which is the proposed initial value of v at the plane in question.

The solution for the liquid lying between the planes $y = 0$ and $y = c$ can be obtained in a similar manner.

Fledborough Hall, Holyport, Berks, England
30. April 1896.

Zur Theorie der linearen Substitutionen.

Von

Alfred Loewy in Göttingen.

Wenn eine lineare Substitution:

$$x_i = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\,\xi_k,$$

für

$$i = 1, 2, 3, \ldots n,$$

eine gegebene bilineare Form von nicht verschwindender Determinante cogredient in sich transformirt, so ergeben sich zur Bestimmung der Substitutionscoefficienten a_{ik} n^2 Gleichungen; diese sind in Bezug auf die Grössen a_{ik} quadratisch und enthalten die Coefficienten der Form linear. Es ist nun bekanntlich Herrn Voss*) in voller Analogie mit den von Herrn Frobenius**) bei symmetrischen und alternirenden Formen aufgestellten Formeln gelungen, die n^2 Grössen a_{ik} rational durch Parameter darzustellen; diese Voss'sche Darstellung umfasst nur diejenigen Transformationen, bei denen zwei gewisse aus den Substitutionscoefficienten a_{ik} gebildete Determinanten nicht gleichzeitig verschwinden. Im Folgenden wollen wir versuchen, einen Beitrag zur Theorie der Ausnahmefälle zu liefern, welche sich der Voss'schen Darstellung entziehen und die zweckmässig als singuläre Substitutionen bezeichnet werden.

§ 1.

Die Frobenius'sche Symbolik und die Voss'schen Formeln.

Bevor wir die von Herrn Voss gegebene Parameterdarstellung, an die wir anknüpfen wollen, angeben, fügen wir die von Herrn Frobenius***) in die Theorie der bilinearen Formen eingeführte

*) Voss, Ueber die cogredienten Transformationen einer bilinearen Form in sich selbst. Abhandlungen der k. bayer. Akademie der Wiss. II. Cl. XVII. Bd. II. Abth. 1890. Diese Arbeit werde ich mit V. citiren.

**) Frobenius, Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen. Journ. f. d. r. u. ang. Math. Bd. 84. Diese Arbeit werde ich mit F. citiren.

***) F. p. 1ff. sowie V, § 1.

Symbolik, soweit wir von derselben im Folgenden Gebrauch machen werden, ein. Einer jeden linearen Substitution:

$$x_i = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\xi_k, \quad i = 1, 2, 3 \ldots n,$$

ordnen wir eine bilineare Form

$$\sum_i \sum_k a_{ik} x_i \xi_k$$

zu; mit Rücksicht auf die zugeordnete bilineare Form bezeichnen wir die Substitution mit A. In der anzuwendenden Symbolik besteht dann zwischen Substitutionen und bilinearen Formen kein wesentlicher Unterschied.

Combinirt man zwei lineare Substitutionen A und B, d. h. eliminirt man die Grössen y aus:

$$x_i = \sum_{l=1}^{l=n} a_{il} y_l, \quad i = 1, 2, 3 \ldots n,$$

$$y_l = \sum_{k=1}^{k=n} b_{lk}\xi_k, \quad l = 1, 2, 3 \ldots n,$$

so erhält man die neue Substitution C:

$$x_i = \sum_{k=1}^{k=n} c_{ik}\xi_k, \quad i = 1, 2, 3 \ldots n,$$

wo

$$c_{ik} = \sum_{l=1}^{l=n} a_{il} b_{lk}$$

ist.

Die Substitution C schreiben wir in der Form eines Productes:

$$C = A \,.\, B.$$

Bei dieser Definition wird die Multiplication associativ und distributiv; dagegen im Allgemeinen nicht commutativ.

Die mit jeder beliebigen Form vertauschbare Form $\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i$ sei mit E bezeichnet. Die zu A reciproke Form, welche wir mit A^{-1} bezeichnen, ist definirt durch die Gleichung:

$$XA = E.$$

Verschwindet die Determinante von A nicht, so ist A^{-1} eindeutig bestimmt, und man findet:

$$A^{-1} = \sum_k \sum_i \alpha_{ki} x_i y_k;$$

hierbei sind die α_{ik} die Unterdeterminanten des Systems der a_{ik}, dividirt durch die Determinante der a_{ik}.

Mit A' endlich sei die zu A conjugirte Form bezeichnet; sie wird definirt durch:

$$A' = \sum_k \sum_i a_{ki} x_i y_k.$$

Nach diesen Angaben können wir die von Herrn Voss*) gefundenen Resultate anführen:

Bezeichnet man mit T eine Form, welche der Gleichung:

$$TS + T'S' = 0 \tag{I}$$

genügt, wobei S eine beliebige bilineare Form von nicht verschwindender Determinante ist, und verschwindet die Determinante von $E + TS$ nicht, so führt die Substitution:

$$A = \eta(E - TS)(E + TS)^{-1} \tag{II}$$

wo $\eta = \pm 1$ ist, die Form S cogredient in sich über; die Determinante von A hat hierbei den Werth η^n, wenn die Form S n Variablenpaare enthält.

Jede Substitution A, welche die Form S von nicht verschwindender Determinante cogredient in sich transformirt und für welche die Determinante von $A + \eta E$ nicht verschwindet, lässt sich in einer einzigen Art auf die Gestalt (II) *bringen.*

Alle Substitutionen, welche sich in der von Voss angegebenen Gestalt (II) darstellen lassen, werden als *nicht singulär* bezeichnet.

§ 2.

Die singulären Substitutionen.

Alle Substitutionen, welche sich der Voss'schen Darstellung entziehen, bei denen also die Determinanten von $A + E$ wie $A - E$ gleichzeitig verschwinden, heissen *singuläre Substitutionen.* Man kann die singulären Substitutionen in zwei Gattungen, nämlich in wesentlich singuläre und ausserwesentlich singuläre, eintheilen**).

Unter einer *wesentlich singulären Substitution* sei eine solche verstanden, deren Product mit jeder nicht singulären Substitution, wieder eine singuläre giebt. Eine jede nicht wesentlich singuläre Substitution heisse *ausserwesentlich singulär.* Zu einer ausserwesentlich singulären Substitution lässt sich also stets mindestens eine nicht singuläre Substitution angeben, sodass ihr Product eine nicht singuläre Substitution ergiebt.

*) V. p. 71—73.

**) Vgl. die Voss'sche Begriffsbestimmung „eigentlich singulär". V. p. 77.

Man ersieht sofort, dass jede uneigentliche Transformation*) bei einer Form gerader Ordnung wesentlich singulär ist; jede uneigentliche Substitution giebt nämlich mit einer eigentlichen verbunden eine uneigentliche, und bei geradem n stellen die Voss'schen Formeln nur eigentliche Transformationen dar, da dann η^n stets den Werth $+1$ hat.

Wir werden nun zeigen:

Bei einer jeden bilinearen Form von nicht verschwindender Determinante, bei welcher die sämmtlichen eigentlichen Transformationen ein irreducibles System bilden, sind die uneigentlichen Transformationen einer Form gerader Ordnung die einzigen wesentlich singulären. Bei den angeführten Formen sind also die Begriffe „wesentlich singulär" und „uneigentliche Transformation einer Form gerader Ordnung" identisch.

Zu der betrachteten Gattung bilinearer Formen gehören nach den Untersuchungen des Herrn Frobenius**) stets die symmetrischen und alternirenden Formen. Herr Voss***) hat die Irreductibilität für gewisse „bilineare Formen" gezeigt.

Es sei W_1 eine bestimmte, feste Substitution, deren Coefficienten also nicht mehr von variablen Parametern abhängen. W_1 führe eine Form S von nicht verschwindender Determinante cogredient in sich über; es möge ferner die Determinante von $W_1 + E$ verschwinden; jedoch soll unsere Transformation W_1, die auch singulär sein kann, nie uneigentlich sein, wenn die Form S eine gerade Anzahl von Variablenpaaren enthält. Unter diesen Voraussetzungen ist εW_1 stets eine eigentliche Transformation, hierbei hat ε den Werth $+1$, wenn W_1 selbst eine eigentliche Transformation ist; ε ist $= -1$, wenn W_1 eine uneigentliche Transformation ist. Wir construiren uns nun eine nicht singuläre eigentliche Transformation V_1, bei welcher die Determinante von $V_1 + E$ nicht verschwindet und welche ebensoviel willkürliche wesentliche Parameter r enthält, wie die allgemeinste Substitution, die S cogredient in sich transformirt. Zu einer jeden Form S von nicht verschwindender Determinante lässt sich eine derartige Substitution V_1 finden. Man hat zu diesem Zwecke nur nöthig, die Form T in allgemeinster Weise aus der Gleichung (I) des § 1 zu bestimmen; dann verschwindet, wie es erforderlich ist, die Determinante von $E + TS$ nicht, denn diese Grösse ist für unendlichkleine Werthe der Coefficienten von T beliebig wenig von $+1$ verschieden.

Bei dieser Bildung hat die Substitution:

$$V_1 = (E - TS)(E + TS)^{-1}$$

*) Uneigentliche Transformationen sind bekanntlich solche der Determinante -1.

**) F. p. 46.

***) V. p. 114.

nach einem Satz von Voss*) die höchste Zahl r willkürlicher wesentlicher Parameter und ferner verschwindet die Determinante von $V_1 + E$ nicht, da $V_1 + \eta E = 2\eta(E+TS)^{-1}$ ist und in unserem Falle η den Werth $+1$ besitzt.

Wir bilden jetzt die Substitution:

$$V_2 = V_1 . \varepsilon W.$$

Die neue Substitution V_2 hat wieder dieselbe Zahl von r willkürlichen Parametern, da $\varepsilon V_2 . W^{-1}$ die von r Parametern abhängige Substitution V_1 ergeben muss und W überhaupt keine Parameter enthält. Die r Parameter sind auch in V_2 wesentlich, d. h. sie treten nicht etwa in solchen Combinationen auf, dass die Substitution in Wahrheit von einer geringeren Zahl als r wesentlichen Parametern abhängt; wäre dies nämlich der Fall, so müsste die Composition mit εW^{-1} diese Verbindungen zerstören, damit wir eine von r wesentlichen Parametern abhängige Substitution erhalten, eine solche Kraft aber hat die angegebene Operation nicht. V_2 ist als Product zweier eigentlicher Substitutionen, V_1 und εW, auch eigentlich.

Eine eigentliche Substitution V_2 mit r wesentlichen Parametern kann bei unseren Voraussetzungen über die Irreductibilität des Systems der eigentlichen Substitutionen nie so beschaffen sein, dass die Determinante von $V_2 + E$ verschwindet. Angenommen es gäbe eigentliche Substitutionen V_2, bei denen die Determinante von $V_2 + E$ verschwindet, welche von r wesentlichen Parametern abhängen und eine Form S von nicht verschwindender Determinante cogredient in sich überführen, so heisst dies: das Gleichungssystem, welches symbolisch durch:

A)
$$\begin{aligned} VSV' &= S, \\ |V| &= +1, \\ |V+E| &= 0 \end{aligned}$$

dargestellt wird, wird durch eine Substitution V, deren Coefficienten von r wesentlichen Parametern abhängen, befriedigt. Das System der eigentlichen Transformationen, welches auch nur ein r-fach ausgedehntes Gebilde repräsentirt, (denn r giebt ja die höchste Anzahl möglicher wesentlicher Parameter an) würde dann mit unserem System A) eine r-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Lösungen gemein haben. Es ist aber unmöglich einen ebenfalls r-fach ausgedehnten Theil eines r-fach ausgedehnten irreductiblen Gebildes durch ein algebraisches Gleichungssystem auszudrücken**). Es müsste daher jede eigentliche

*) V. p. 121.

**) Vgl. Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. Journ. f. d. r. u. a. Math. Bd. 92, p. 31, sowie F. p. 46.

Transformation dem System A) genügen; es giebt aber Substitutionen, welche S eigentlich in sich transformiren und nicht A) genügen. Eine solche Substitution ist V_1; für diese verschwindet gerade $|V_1 + E|$ nicht. Desgleichen genügt auch die identische Substitution E, welche sicher S eigentlich in sich überführt, unserem Gleichungssystem A) nicht. Hiermit ist unsere Annahme als falsch erwiesen. V_2 ist also stets in der Form $(E-T_2S)\,(E+T_2S)^{-1}$ darstellbar. Hiermit wäre unser Satz erhärtet.

Aus:

$$V_2 = \varepsilon V_1 . W$$

folgt:

$$W = \varepsilon V_1^{-1} V_2 .$$

Da die Determinante von $E + V_1$ nicht verschwindet, so verschwindet auch die von $E + V_1^{-1}$ nicht, es ist daher:

$$V_1^{-1} = (E-T_1S)\,(E+T_1S)^{-1}.$$

Man findet also:

$$W = \varepsilon(E-T_1S)\,(E+T_1S)^{-1}(E-T_2S)\,(E+T_2S)^{-1}.$$

Die hiermit für die ausserwesentlich singulären wie für die nicht singulären Substitutionen W_1, bei denen die Determinante von $W+E$ verschwindet und welche Herr Voss in der Form

$$-(E-TS)\,(E+TS)^{-1}$$

angiebt, gegebene Darstellung, umfasst auch die nicht singulären Substitutionen V, für welche die Determinante von $V + E$ nicht verschwindet; denn für $T_2 = 0$ geht unsere Formel in die Voss'sche

$$(E-T_1S)\,(E+T_1S)^{-1}$$

über.

Wir können also das Resultat aussprechen:

Bei den Gattungen bilinearer Formen S von nicht verschwindender Determinante, bei denen die Gesammtheit der eigentlichen Transformationen ein irreductibles System bildet, wird jede Substitution, welche jedoch, falls die in sich zu transformirende Form S eine gerade Anzahl Variablenpaare hat, nicht uneigentlich sein darf, durch die Formel:

$$W = \varepsilon(E-T_1S)\,(E+T_1S)^{-1}\,(E-T_2S)\,(E+T_2S)^{-1}$$

dargestellt. Hier hat ε den Werth $+1$, wenn W eine eigentliche Transformation ist; ε muss -1 gesetzt werden, wenn W eine uneigentliche Transformation ist. T_1 und T_2 sind Lösungen der Gleichung:

$$TS + T'S' = 0^*).$$

*) Durch die Freundlichkeit von Herrn Klein wurde mir die in diesen Annalen erscheinende Arbeit des Herrn Taber „On the automorphic linear transformation of an alternate bilinear form" übermittelt; ich hatte damals die vorliegende Arbeit bereits in allen wesentlichen Punkten fertig gestellt. In der Taber'schen Arbeit wird der von uns hier ausgesprochene Satz für reelle Sub-

Das gefundene Resultat kann auch noch anders ausgesprochen werden. Zu diesem Zweck denken wir uns die n^2 Coefficienten a_{ik} der Substitution, welche die gegebene Form S cogredient in sich überführt, als die n^2 unhomogenen Punktcoordinaten eines R_{n^2}; hierbei wollen wir annehmen, dass S den gestellten Bedingungen genügt. Die quadratischen Gleichungen, denen die a_{ik} genügen müssen, bestimmen eine Mannigfaltigkeit M_r von r Dimensionen in unserem R_{n^2}. Unter der Voraussetzung, dass unsere Form sowohl eigentliche wie uneigentliche*) Transformationen zulässt, besteht unsere M_r aus zwei getrennten Theilen; alle Punkte des einen Theiles liegen auf der Fläche des R_{n^2}, die entsteht, wenn man die Substitutionsdeterminante der positiven Einheit gleich setzt; die Punkte des anderen Theils liegen auf der Fläche, die man erhält, wenn die Determinante gleich der negativen Einheit genommen wird. Unsere Formel liefert dann eine ausnahmslos gültige rationale Parameterdarstellung für alle Punkte des irreductiblen Theiles unserer M_r, welcher den eigentlichen Substitutionen entspricht. Die Voss'schen Formeln hingegen lassen diejenigen Punkte unserer Theilmannigfaltigkeit undargestellt, welche auf ihr durch die zwei Mannigfaltigkeiten ausgeschieden werden, die man durch Nullsetzen der Determinanten von $A + E$ wie $A - E$ erhält.

Enthält S eine ungerade Zahl von Variablenpaaren, so kann man durch gleichzeitige Vorzeichenänderung aller a_{ik} die zwei getrennten Theile unserer M_r eindeutig auf einander beziehen. In diesem Falle sind beide getrennten Theile unserer M_r ausnahmslos durch unsere Formel darstellbar.

---

stitutionen, welche eine reelle alternirende Form in sich transformiren, hergeleitet. Herrn Taber's Untersuchungen, die auf elegantem rechnendem Wege geführt werden, bestätigen also in diesem Specialfall unsere Resultate. Im Falle der alternirenden Formen, die nur eigentliche Transformationen gestatten, kann man $\varepsilon = +1$ setzen. Nach Herrn Voss kann man $(E-T_1S)(E+T_1S)^{-1}$ stets in die Form $(S+R)^{-1}(S-R)$ überführen. [V. p. 71.] Ist S eine alternirende Form, so ist R nur gezwungen, symmetrisch zu sein; dann brauchen wir keine Bedingungsgleichung: $(S')^{-1}.R' + S^{-1}R = 0$. Nun stimmt unsere Formel bis auf die Bezeichnungsweise völlig mit der von Taber p. 575 gegebenen überein, und man ersieht aus unseren Betrachtungen, dass die Formel auch gültig bleibt, wenn die Substitutionen und die Form aufhören reell zu sein. [Die Taber'sche Arbeit ist inzwischen in diesen Annalen, Bd. 46, Heft 4, erschienen].

*) Eine alternirende Form von nicht verschwindender Determinante lässt nie uneigentliche Transformationen zu. Vgl. Frobenius, Ueber die schiefe Invariante etc. Journ. f. d. r. u. a. Math. Bd. 86, p. 50.

§ 3.

Eine specielle Gattung ausserwesentlich singulärer Substitutionen.

In diesem Paragraphen betrachten wir diejenigen ausserwesentlich singulären Substitutionen, die sich ergeben, wenn man eine nicht singuläre Substitution mit sich selbst zusammensetzt.

Diese Substitutionen lassen sich also in der Form:

$$A = [(E - TS)(E + TS)^{-1}]^2$$

darstellen, hierbei genügt T der Gleichung:

$$TS + T'S' = 0;$$

S ist eine von A cogredient in sich übergeführte bilineare Form von nicht verschwindender Determinante.

Es sei V eine Voss'sche Substitution. Damit V überhaupt geeignet sei, eine Form von nicht verschwindender Determinante cogredient in sich selbst zu transformiren, ist nothwendig und hinreichend, dass die Elementartheiler der charakteristischen Function, d. h. der Determinante von $V + \varrho E$, wo ϱ einen variablen Parameter bedeutet, paarweise von gleichem Grade sind und für reciproke Werthe verschwinden, mit Ausnahme derer, welche für den Werth $+1$ oder -1 Null sind*). Soll V im besonderen eine Voss'sche Substitution sein, so darf die charakteristische Function nie für $\varrho = +1$ wie $\varrho = -1$ gleichzeitig verschwinden. Die charakteristische Function von V hat also Elementartheiler der Form $(\varrho - a)^\alpha$, $\left(\varrho - \frac{1}{a}\right)^\alpha$; zu diesen können sich noch solche der Form $\left(\varrho - (\pm 1)\right)^\gamma$ gesellen. Nach einem Satz von Herrn Frobenius**) sind dann die Elementartheiler der charakteristischen Function von $A = V^2$ von der Form:

$$(\varrho - a^2)^\alpha, \quad \left(\varrho - \frac{1}{a^2}\right)^\alpha, \quad (\varrho - 1)^\gamma.$$

Soll nun A eine singuläre Substitution sein, so muss ihre charakteristische Function neben Elementartheilern der Form $(\varrho - 1)^\gamma$ auch solche der Form $(\varrho + 1)^\delta$ aufweisen. Damit diese Bedingung erfüllbar ist, muss die charakteristische Function von V Elementartheiler $\left(\varrho - (\pm i)\right)^\delta$ haben, wo i die imaginäre Einheit bedeutet. Besitzt die charakteristische Function von V Elementartheiler $\left(\varrho - (\pm i)\right)^\delta$, so hat sie auch in genau gleicher Zahl solche der Form $\left(\varrho - \frac{1}{\pm i}\right)^\delta$; daher treten die Elementartheiler $(\varrho + 1)^\delta$ in der charakteristischen Function von A paarweise auf.

*) F. p. 34.

**) F. p. 25 oder F. p. 40, Anmerkung.

Damit eine singuläre Substitution als Quadrat einer nicht singulären Substitution darstellbar sei, ist nothwendig, dass die Elementartheiler der charakteristischen Function der singulären Substitution, welche die Form $(\varrho+1)^\delta$ *haben, paarweise auftreten**).

Wir wollen nun eine singuläre Substitution der erwähnten speciellen Art betrachten. Es sei A eine singuläre Substitution, deren charakteristische Function die Elementartheiler der Form

$$(\varrho-a)^\alpha,\quad \left(\varrho-\tfrac{1}{a}\right)^\alpha,\quad (\varrho-1)^\gamma,\quad (\varrho+1)^\delta\,(\varrho+1)^\delta\ldots$$

besitzt. Wir construiren uns, was stets möglich ist, eine Substitution P, deren charakteristische Function die vorgeschriebenen Elementartheiler:

$$(\varrho-\sqrt{a})^\alpha,\quad \left(\varrho-\tfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^\alpha\cdots,\quad \left(\varrho-(\pm 1)\right)^\gamma\cdots,\quad \left(\varrho-(\pm i)\right)^\delta\left(\varrho-\tfrac{1}{\pm i}\right)^\delta\cdots,$$

hat. Eine derartige Substitution P führt stets, da die Elementartheiler ihrer charakteristischen Function paarweise von gleichem Grade sind und für reciproke Werthe verschwinden, mit Ausnahme derer, welche für den Werth $+1$ oder -1 Null sind, eine bilineare Form H_1 von nicht verschwindender Determinante in sich über**). P ist ferner stets eine Voss'sche Substitution, da die charakteristische Function von P nicht gleichzeitig für die positive wie die negative Einheit verschwindet. Bildet man nun P^2, so hat die charakteristische Function P^2 dieselben Elementartheiler wie A. In Folge dessen giebt es stets eine Substitution R, dass die Gleichung:

$$A = RP^2R^{-1}$$

besteht***). Es wird also:

$$A = [RPR^{-1}]^2.$$

RPR^{-1} ist auch eine Voss'sche Substitution; denn ihre charakteristische Function hat dieselben Elementartheiler wie P. Daher führt RPR^{-1} auch eine bilineare Form von nicht verschwindender Determinante cogredient in sich über, diese Form sei mit H bezeichnet.

A ist daher in der Form:

$$A = [(E-TH)(E+TH)^{-1}]^2$$

darstellbar; hierbei genügt T der Gleichung:

$$TH+T'H'=0.$$

H wird von RPR^{-1} und daher auch von der gegebenen Substitution A in sich übergeführt, da A das Quadrat von RPR^{-1} ist.

---

*) Vgl. den letzten Paragraphen der Arbeit des Herrn Taber.

**) F. p. 34.

***) F. p. 21.

Unter der Gesammtheit aller bilinearen Formen, welche von einer gegebenen singulären Substitution A, deren charakteristische Function die Elementartheiler der Form $(\varrho+1)^\delta$ paarweise aufweist, cogredient in sich transformirt werden, giebt es stets eine solche H von nicht verschwindender Determinante, dass A in der Form:

$$A = [(E-TH)(E+TH)^{-1}]^2$$

darstellbar ist. T genügt der Gleichung:

$$TH + T'H' = 0.$$

§ 4.

Die symmetrischen Formen.

Die Resultate, welche wir im vorigen Paragraphen für beliebige bilineare Formen entwickelten, gestalten sich im Falle der symmetrischen Formen wesentlich einfacher. Während wir zur Quadratdarstellung einer singulären Substitution, bei der die charakteristische Function die oben näher betrachteten Elementartheiler von specieller Art besitzt, die Gesammtheit der bilinearen Formen, welche durch die Substitution in sich übergeführt werden, in den Kreis unserer Betrachtungen zogen, ist dies bei symmetrischen Formen nicht erforderlich. Es gilt hier der folgende Satz:

Bildet man das Quadrat von allen nicht singulären Substitutionen, welche eine gegebene quadratische Form S von nicht verschwindender Determinante in sich überführen und die von Herrn Frobenius in der Gestalt:

$$A = (S+T)^{-1}(S-T)^*).$$

dargestellt werden, wo T eine beliebige alternirende Form ist, so erhält man hierdurch von den singulären Substitutionen, die S in sich überführen, ausnahmslos alle diejenigen, bei denen die charakteristische Function die Elementartheiler $(\varrho+1)^\delta$ paarweise besitzt.

Zum Beweise brauchen wir folgendes Theorem:

Führen zwei ähnliche Substitutionen U_1 und U_2 dieselbe quadratische Form S von nicht verschwindender Determinante cogredient in sich über, so giebt es stets eine Substitution R, dass $U_1 = RU_2R^{-1}$ wird und hierbei R auch eine Substitution ist, die S cogredient in sich überführt.

Wir beweisen den Hilfssatz auf folgende Art:

Jede symmetrische Form S ist der Form E congruent, d. h. es giebt eine Form G, dass

*) Wenn S eine symmetrische Form ist, kann man die Voss'sche Darstellung leicht in die obige umsetzen; an Stelle der Bedingungsgleichung $TS + T'S' = 0$ tritt dann nur die Bestimmung, dass T alternirend ist. Vgl. V. p. 71 und F. p. 37.

$$GSG' = E$$

wird.

Hieraus folgt:

$$S = G^{-1}G'^{-1}.$$

Nach unserer Annahme ist:

$$U_1 S U_1' = S,$$

folglich wird:

$$U_1 G^{-1} G'^{-1} U_1' = G^{-1} G'^{-1}$$

oder

$$(G U_1 G^{-1}) \,.\, (G U_1 G^{-1})' = E.$$

Ebenso gilt:

$$(G U_2 G^{-1}) (G U_2 G^{-1})' = E.$$

$G U_1 G^{-1}$ und $G U_2 G^{-1}$ sind daher orthogonale Formen; dieselben sind auch ähnlich, da U_1 und U_2 im Verhältniss der Aehnlichkeit stehen. Herr Frobenius hat nun gezeigt, dass zwei ähnliche orthogonale Formen auch stets congruent sind und durch orthogonale Substitutionen in einander transformirt werden können*), es existirt daher eine Form F, dass

$$G U_1 G^{-1} = FG U_2 G^{-1} F^{-1}$$

wird; hierbei gilt die Beziehung:

$$FF' = E.$$

Es wird also:

$$U_1 = (G^{-1}FG)\, U_2 (G^{-1}FG)^{-1}.$$

$G^{-1}FG$ transformirt nun S cogredient in sich, denn es wird:

$$(G^{-1}FG)\, S(G^{-1}FG)' = G^{-1}FGSG'F'(G^{-1})' = G^{-1}FEF'(G^{-1})'$$
$$= G^{-1}E(G^{-1})' = S.$$

Daher ist

$$R = G^{-1}FG$$

und unser Satz ist bewiesen.

Nach diesen Vorbereitungen können wir zum Beweise des Hauptsatzes schreiten. Es sei A eine singuläre Substitution, welche S in sich überführt und deren charakteristische Function die Elementartheiler der Form:

$$(\varrho - a)^\alpha \left(\varrho - \tfrac{1}{a}\right)^\alpha \cdots,\ (\varrho - 1)^\gamma \cdots,\ (\varrho + 1)^\vartheta (\varrho + 1)^\vartheta \cdots$$

hat. Die Substitution P, deren charakteristische Function die vorgeschriebenen Elementartheiler:

$$(\varrho - \sqrt{a})^\alpha \left(\varrho - \tfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^\alpha \cdots, \left(\varrho - (\pm 1)\right)^\gamma \cdots, \left(\varrho - (\pm i)\right)^\vartheta \left(\varrho - \left(\tfrac{1}{\pm i}\right)\right)^\vartheta \cdots,$$

hat, kann stets so gefunden werden, dass P die gegebene symmetrische Form in sich überführt. Ist nämlich ein Product von Elementartheilern

*) F. p. 58.

der Art vorgegeben, dass diese paarweise von gleichem Grade sind und für reciproke Werthe Null werden, mit Ausnahme derer, welche für den Werth $+1$ oder -1 verschwinden und einen ungeraden Exponenten haben, so giebt es stets eine Substitution P_1 mit den nämlichen Elementartheilern; denn es ist ja stets möglich, eine Substitution mit beliebig vorgeschriebenen Elementartheilern der charakteristischen Function zu bilden. Diese Substitution P_1 führt aber wegen der besonderen Beschaffenheit der Elementartheiler stets eine symmetrische Form S_1 von nicht verschwindender Determinante cogredient in sich über*). Alle symmetrischen Formen nicht verschwindender Determinante sind congruent, also auch S_1 mit S; daher giebt es stets eine zu P_1 ähnliche Substitution, welche S cogredient in sich überführt; diese Substitution hat wegen der Aehnlichkeit auch die vorgegebenen Elementartheiler und sei mit P bezeichnet. P^2 führt dann ebenso wie P die Form S in sich über; S wird aber auch durch die zu P^2 ähnliche Substitution A in sich transformirt. Nach unserem Hilfssatze existirt daher eine Substitution R, so dass:

$$A = RP^2R^{-1}$$

wird; hierbei ist:

$$RSR' = S.$$

$$A = [RPR^{-1}]^2,$$

RPR^{-1} ist als Product von drei Substitutionen, von denen eine jede dieselbe Form S cogredient in sich überführt, wegen des Gruppencharakters der Substitutionen auch geeignet, die Form S in sich überzuführen. P ist in Frobenius'scher Form darstellbar; daher trifft dies auch für RPR^{-1} ein. Es wird also:

$$A = [(S+T)^{-1}(S-T)]^2.$$

Hiermit ist unser Satz bewiesen.

Als Specialfall unseres Satzes findet man: Das Quadrat aller Substitutionen

$$(E+T)^{-1}(E-T),$$

wo T eine beliebige alternirende Form ist, giebt alle singulären orthogonalen Substitutionen, deren charakteristische Function die Elementartheiler $(\varrho+1)^\delta$ paarweise besitzt**).

*) F. p. 41.

**) Nothwendige Bedingungen, dass eine singuläre orthogonale Substitution als Quadrat darstellbar sei, hat auch Herr Taber in seiner Arbeit: „On orthogonal substitutions that can be expressed as a function of a single alternate linear substitution" gegeben. American Journ. of Math. Vol. XVI, p. 130. Die Substitution $(E+T)^{-1}(E-T)$ ist mit den berühmten Cayley'schen Formeln identisch. Journ. f. d. r. u. a. Math. Bd. 32. Nachdem ich die vorliegende Arbeit bereits der Redaction der Annalen übergeben hatte, erschien in den Proceedings of the London mathematical society p. 364 ff. eine weitere Arbeit von Herrn Taber. In

Unter Benützung der Resultate, welche Herr Frobenius für reelle orthogonale Substitutionen gefunden und welche Herr Voss auf reelle Substitutionen, die eine reelle definite quadratische Form in sich überführen, ausgedehnt hat, kann man noch angeben:

Alle reellen singulären eigentlichen Substitutionen, welche eine reelle definite quadratische Form in sich überführen, sind als Quadrate darstellbar.

Diese Substitutionen haben nämlich charakteristische Functionen mit nur einfachen Elementartheilern*); soll nun die Substitution eigentlich sein, so muss jeder Elementartheiler $(\varrho+1)$ paarweise auftreten.

Aus denselben Gründen**) findet man:

Alle periodischen singulären Substitutionen, welche eine quadratische Form eigentlich in sich transformiren, sind als Quadrate darstellbar.

Da die charakteristische Function von $-U$ stets genau entgegengesetzte Wurzeln mit denselben Elementartheilern wie diejenige von U hat, so findet man:

Durch das negative Quadrat von $(S+T)^{-1}(S-T)$ *werden alle singulären Substitutionen dargestellt, die S eigentlich in sich transformiren und deren charakteristische Function* $(\varrho-1)^{\gamma}$ *paarweise als Elementartheiler besitzt.*

Bisher haben wir nur die singulären Substitutionen selbst als Quadrate nicht singulärer darzustellen versucht. Unsere Beweise gelten auch für $\gamma = 0$ oder $\delta = 0$.

Die nicht singulären Substitutionen selbst

$$\eta(S+T)^{-1}(S-T),$$

wo $\eta = \pm 1$ *ist, sind ausnahmslos als positive oder negative Quadrate nicht singulärer Substitutionen darstellbar.*

Es verdient noch bemerkt zu werden, dass, wenn die Form S 2, 3, 4 und 6 Variablen hat, die Substitution:

$$\eta[(S+T)^{-1}(S-T)]^2$$

alle eigentlichen Substitutionen, die S in sich transformiren, darstellt. Dieses Resultat findet man aus unseren Sätzen unter Zuhülfenahme der von Herrn Frobenius über die möglichen Elementartheiler aufgestellten Sätze***). In der Theorie der Transformation einer sym-

---

dieser wird gezeigt, dass die für orthogonale Substitutionen von ihm als nothwendig angegebenen Bedingungen auch hinreichend für die Quadratdarstellung sind. Die von ihm als nothwendig und hinreichend aufgestellten Criterien (p. 374) sind von den unsrigen verschieden, da er nicht Elementartheiler, sondern aus dem Sylvester'schen Begriff „nullity" abgeleitete Zahlen benützt.

*) V. p. 37.

**) F. p. 16 oder Lipschitz, Acta Math. t. X.

***) F. p. 31. Vgl. auch Taber im American Journ. Bd. XVI, p. 123.

metrischen Form in sich spielen die Fälle von 2, 3, 4 und 6 Variablen überhaupt eine hervorragende Rolle. Bei 2 und 3 Variablen reicht noch das Homogenmachen der Darstellung $(S+T)^{-1}(S-T)$ aus, um alle eigentlichen Substitutionen zu finden*), bei 4 und 6 Variablen liefert der Quaternionencalcül sowie die Liniengeometrie eine von der hier betrachteten Darstellung verschiedene. Diese Bemerkung verdanke ich Herrn F. Klein. Auch in der gruppentheoretischen Behandlung nach den Methoden des Herrn Lie nehmen diese Fälle eine bevorzugte Ausnahmestellung ein, wie aus den Untersuchungen von Herrn Werner**) hervorgeht.

Mit den von uns in diesem Paragraphen benützten Mitteln zeigt man auch leicht:

Jede Substitution, welche eine symmetrische Form S von nicht verschwindender Determinante cogredient in sich überführt, ist stets als $2m+1^{te}$ Potenz einer Substitution, welche auch S in sich transformirt, darstellbar; m kann hierbei jeden beliebigen ganzzahligen Werth annehmen.

---

*) F. p. 48.

**) Math. Annalen Bd. 35. Vergl. auch Lie's Theorie der Transformationsgruppen III, p. 809. Die dortigen Formeln sind nur unhomogen; unserem n entspricht dort $n-1$.

Zur projectiven Geometrie.

Von

M. Pasch in Giessen.

Herr Pieri macht auf Seite 9 seiner Nota II Sui principii che reggono la Geometria di Posizione, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino 1896 Vol. 31, darauf aufmerksam, dass eine Stelle auf Seite 83 (§ 10) meiner Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882*), eine Ergänzung der dortigen Beweismittel erforderlich macht, und theilt ein sinnreiches Beweisverfahren aus seinen Principien mit, unter Bezugnahme auf Herrn Enriques. An der erwähnten Stelle sage ich ohne Begründung, dass in Figur 33 die Punkte h und h_1 von einander verschieden sind, d. h. dass der Punkt h_1 nicht auf der Geraden ab liegt. Die Ecken des Dreiecks fgc werden aus dem Punkte d auf die Gegenseiten nach a, b, h_1 projicirt; es war also anzugeben, nach welchem Satze derartige Projectionen nicht in eine Gerade fallen können. Diese Lücke wird bei dem von mir innegehaltenen Gange folgendermassen ausgefüllt.

Am Schlusse des § 2 meines Buches füge man den Satz hinzu: *Liegen von den (eigentlichen) Punkten A, B, C, D keine drei in einer Geraden, und geht die Gerade AD durch einen Punkt der Strecke BC, die Gerade BD durch einen Punkt der Strecke CA, so geht die Gerade CD durch einen Punkt der Strecke AB.* — Ferner ist in § 9 am Schlusse ein Satz hinzuzufügen. In § 9 wird gezeigt, dass man überall, wo von drei eigentlichen Punkten in einer Geraden die Rede ist und von dem einen gesagt wird, dass er zwischen den anderen liegt oder nicht, die Worte „für die Grenzebene N" hinzufügen und sodann alle eigentlichen Elemente der betreffenden Figur durch beliebige ersetzen darf. Der vorige Satz führt auf diesem Wege zu dem Satze: *Sind A, B, C, D beliebige, einer Ebene angehörige Punkte, von denen keine drei in gerader Linie liegen, und sind a, b, c die Schnittpunkte der Geraden AD BC, BD CA, CD AB, so kann man die Ebene N derart wählen,*

*) Vergleiche zu den „Vorlesungen" die Aufsätze in diesen Annalen 1887 Band 30 Seite 127 und 1888 Band 32 Seite 159.

dass für die Grenzebene N der Punkt a zwischen B und C, b zwischen C und A, c zwischen A und B liegt. — Dass a, b, c nicht in eine Gerade fallen können, schliesst man jetzt mittelst des Satzes 11 in § 2.

In der vorstehenden Betrachtung kommen nicht bloss die Begriffe vor, welche der Geometrie der Lage eigenthümlich sind. Die Betrachtung wird aber durch die in § 9 angegebene Uebertragung sofort in eine ganz der Geometrie der Lage angehörige verwandelt (vergl. auch § 12 Seite 95). Es ist bemerkenswerth, dass die Aussagen in § 10 auf Seite 79—83 — die nirgends den Begriff der getrennten Lage von zwei Elementenpaaren enthalten — auch ohne Benutzung dieses Begriffs bewiesen werden, mit Ausnahme der Behauptung, dass in Figur 33 h_1 von h verschieden ist, d. h. mit Ausnahme des Satzes: *Sind A, B, C, D beliebige, einer Ebene angehörige Punkte, von denen keine drei in gerader Linie liegen, so fallen die Schnittpunkte der Geraden AD BC, BD CA, CD AB nicht in eine Gerade.* Die Verschiedenheit der Punkte h und h_1 wird aber in § 10 nicht gebraucht, sondern erst in § 11.

Giessen, April 1896.

Ueber quadratische Transformationen und rationale Flächen mit Kegelschnittschaaren.

Von

Th. Reye in Strassburg i. E.

Die einfachsten und wichtigsten algebraischen Transformationen homogener Punktcoordinaten sind nächst den linearen die allgemeinen quadratischen. Auf sie möchte ich die Aufmerksamkeit der Fachgenossen, insbesondere der Analytiker und Algebraiker zu lenken mir erlauben. Sie wurden bisher auffällig vernachlässigt, obwohl sie zu mannigfaltigen geometrischen Gebilden führen und deren merkwürdige Eigenschaften leicht erkennen lassen.

Im innigsten Zusammenhange mit ihnen stehen das F^2-Gebüsch oder das dreifach unendliche lineare System von Flächen zweiter Ordnung und dessen projective Beziehung auf den Ebenenraum. Aus dieser projectiven Beziehung ergiebt sich, wie ich schon 1868 nachgewiesen habe*), ohne Weiteres die berühmte Steiner'sche Fläche vierter Ordnung, zugleich mit ihrer Abbildung auf der Ebene. Gehen die Flächen des Gebüsches alle durch einen Knotenpunkt, so führt uns dieselbe projective Beziehung zu der geradlinigen Fläche dritter Ordnung und ihrer Abbildung auf der Ebene, ausserdem aber zu fast allen durch Kummer bekannten Strahlensystemen zweiter Classe mit Brennflächen**), ihrer eindeutigen Beziehung auf einen Strahlenbündel und ihren wichtigeren Eigenschaften. Auch zu den Brennflächen dieser Strahlensysteme, insbesondere zu der Kummer'schen Fläche vierter Ordnung mit 16 Doppelpunkten und 16 singulären Berührungsebenen gelangen wir so mittelst quadratischer Substitutionen.

Wir wollen in Kürze nochmals nachweisen***), dass eine quadratische Transformation homogener Punktcoordinaten sich geometrisch

*) In meiner „Geometrie der Lage" 1. Aufl.; vgl. die 3. Aufl. (1892) III, S. 140 und 206.

**) Diesen Strahlensystemen ist meine Abhandlung von 1878 in Crelle's Journal Bd. 86, S. 84 gewidmet.

***) Vgl. Crelle's Journal Bd. 94, S. 312.

durch die projective Beziehung eines F^2-Gebüsches auf den Ebenenraum darstellen und ersetzen lässt. Wie zu der Steiner'schen Fläche und der cubischen Regelfläche durch Transformation der Ebene, so gelangen wir sodann zu anderen rationalen Flächen mit Kegelschnittschaaren durch Transformation von Flächen zweiter und höherer Ordnung. Alle so abgeleiteten Flächen sind eindeutig auf die Flächen bezogen, aus denen sie transformirt werden, und lassen sich zugleich mit ihnen leicht auf der Ebene abbilden. Zu ihnen gehören als Flächen niedrigster Ordnung die allgemeine cubische Fläche, die Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiter Ordnung und diejenige mit einer Doppelgeraden. Die bekannten von Clebsch angegebenen Abbildungen dieser drei Flächen auf der Ebene ergeben sich sehr einfach auf dem angedeuteten Wege.

Die erwähnten früheren Untersuchungen stellen wir, soweit sie hier in Betracht kommen, mit einigen Zusätzen in § 1 kurz zusammen.

§ 1.

Die quadratische Substitution und die projective Beziehung des F^2-Gebüsches auf den Raum Σ_1.

1. Wir transformiren zwei Räume Σ, Σ_1 in einander durch die quadratische Substitution:

$$\text{(a)} \qquad \varrho y_1 = f_1, \quad \varrho y_2 = f_2, \quad \varrho y_3 = f_3, \quad \varrho y_4 = f_4.$$

Hierin bezeichnen f_1, f_2, f_3, f_4 quaternäre quadratische Formen, deren Variable x_1, x_2, x_3, x_4 die homogenen Coordinaten eines Punktes P von Σ sind; y_1, y_2, y_3, y_4 sind die Coordinaten eines Punktes P_1 von Σ_1, und ϱ ist ein unbestimmter Factor. Durch die Substitution wird jedem Punkte P von Σ *ein* bestimmter Punkt P_1 von Σ_1 als entsprechender zugewiesen; dagegen entsprechen einem beliebigen Punkte $P_1 \equiv (y_1, y_2, y_3, y_4)$ von Σ_1 i. A. acht „associirte" Punkte in Σ, nämlich die reellen oder imaginären Schnittpunkte der drei Flächen zweiter Ordnung, die bei gegebenen y_i durch die Gleichungen:

$$y_1 f_2 = y_2 f_1, \quad y_1 f_3 = y_3 f_1, \quad y_1 f_4 = y_4 f_1$$

dargestellt werden.

2. Wenn der Punkt P in Σ eine Curve k oder Fläche F beschreibt, so beschreibt jeder seiner associirten Punkte eine associirte Curve k' resp. Fläche F'; zugleich aber beschreibt sein homologer Punkt P_1 in Σ_1 eine entsprechende Curve k_1 resp. Fläche F_1, die i. A. eindeutig auf k resp. F bezogen ist. Nur dann entsprechen jedem Punkte von k_1 resp. F_1 zwei oder mehr Punkte von k resp. F, wenn diese Curve oder Fläche von Σ sich selbst associirt ist. Jeder nicht sich selbst associirten algebraischen Curve von Σ entspricht in

Σ_1 eine algebraische Curve gleichen Geschlechtes, weil die beiden Curven eindeutig auf einander bezogen sind. Ist die eine dieser homologen Curven rational, d. h. vom Geschlecht Null, so ist es auch die andere. Jeder nicht sich selbst associirten Fläche von Σ entspricht in Σ_1 eine eindeutig auf sie bezogene Fläche; beide Flächen aber sind rational, wenn die eine und damit auch die andere eindeutig auf einer Ebene abgebildet werden kann.

3. Durch die Substitution (a) geht die Gleichung:

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 + \lambda_4 y_4 = 0$$

einer beliebigen Ebene φ_1 von Σ_1 über in die Gleichung:

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

einer Fläche zweiter Ordnung F^2 von Σ, die der Ebene φ_1 entspricht. Aendern sich die Ebenencoordinaten λ_i, so beschreibt φ_1 den Ebenenraum Σ_1; zugleich aber beschreibt die Fläche F^2 im Raume Σ ein F^2-Gebüsch, wenn die vier Flächen $f_i = 0$, wie wir voraussetzen, keinem F^2-Bündel angehören. Jeder Ebene φ_1 von Σ_1 entspricht also eine Fläche F^2 dieses Gebüsches, und umgekehrt. Das Gebüsch ist durch die vier Flächen $f_i = 0$ bestimmt und durch die Substitution (a) projectiv auf den Ebenenraum Σ_1 bezogen. Wenn der Punkt P auf einer seiner Flächen liegt, so liegt der entsprechende Punkt P_1 auf der entsprechenden Ebene von Σ_1; und umgekehrt.

4. Den Ebenen eines Punktes P_1 von Σ_1 entsprechen daher ∞^2 Flächen des F^2-Gebüsches, die sich i. A. in acht associirten, dem P_1 entsprechenden Punkten P schneiden (1.) und einen F^2-Bündel bilden. Einem Ebenenbüschel von Σ_1 und seiner Axe g_1 entsprechen in Σ ein zu ihm projectiver F^2-Büschel und dessen biquadratische Grundcurve $C^{2,2}$. Zwei resp. drei Gruppen associirter Punkte von Σ können allemal durch eine Raumcurve $C^{2,2}$ resp. Fläche F^2 des Gebüsches verbunden werden; denn die entsprechenden zwei resp. drei Punkte von Σ_1 liegen in einer Geraden g_1 resp. Ebene φ_1. Durch die projective Beziehung des F^2-Gebüsches auf den Raum Σ_1 wird jedem Punkte P von Σ derselbe Punkt P_1 in Σ_1 zugewiesen, wie durch die quadratische Substitution (a).

Die vollständigen Beweise der folgenden Sätze dieses § 1 finden sich in den vorhin citirten Druckschriften.

5. Unendlich kleine homologe Raum- oder Flächenelemente von Σ und Σ_1 sind collinear, falls das Element von Σ keinen sich selbst associirten Punkt enthält; die quadratische Transformation (a) ist nach Herrn Lie's Bezeichnung eine Berührungstransformation. Jeder sich selbst associirte Punkt P von Σ ist Doppelpunkt eines Kegels des F^2-Gebüsches, und umgekehrt. Die Ebene τ_1, die in Σ_1 diesem Kegel entspricht, berührt in dem zu P homologen Punkte P_1 alle

Flächen von Σ_1, denen durch P gehende Flächen in Σ entsprechen. Der Ort der sich selbst associirten Punkte ist eine Fläche vierter Ordnung K^4, die Jacobi'sche oder *Kernfläche* des Gebüsches. Dieser Fläche K^4 von Σ entspricht in Σ_1 eine Fläche Φ_1^4 vierter Classe und i. A. 16ter Ordnung, und zwar entsprechen deren Berührungsebenen τ_1 und Punkte P_1 den Kegeln des Gebüsches und deren Doppelpunkten. Aus den vier Gleichungen:

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_i} + \lambda_4 \frac{\partial f_4}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

ergiebt sich die Gleichung von K^4, wenn λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, und die Gleichung von Φ_1^4 in Ebenencoordinaten λ_i, wenn x_1, x_2, x_3, x_4 eliminirt werden. Ich nenne Φ_1^4 die „Brennfläche" des Raumes Σ_1.

Einer nicht sich selbst associirten Fläche oder Curve von Σ, die mit der Kernfläche K^4 beliebige Punkte gemein hat, entspricht in Σ_1 eine Fläche oder Curve, die in den entsprechenden Punkten die Brennfläche Φ_1^4 berührt.

6. Einer beliebigen Geraden l von Σ entspricht in Σ_1 ein zu l projectiver Kegelschnitt l_1. Die entsprechende Linie l_1 liegt nämlich in der Ebene, welche irgend drei ihrer Punkte verbindet, weil dieser Ebene eine durch l gehende Fläche zweiter Ordnung entspricht (3.); mit jeder anderen Ebene aber hat l_1 höchstens zwei Punkte gemein. Analytisch beweist man den Satz, indem man $x_i = p_i + \lambda q_i$ in (a) einsetzt und sodann ϱ und λ aus (a) eliminirt. Der Kegelschnitt l_1 berührt die Brennfläche Φ_1^4 in vier Punkten, denen die Schnittpunkte von l mit der Kernfläche K^4 entsprechen (5.).

7. Eine Gerade von Σ heisst ein „Hauptstrahl", wenn mehr als eine Fläche des F^2-Gebüsches durch sie geht. Jedem Hauptstrahle s des Gebüsches entspricht demnach in Σ_1 eine Gerade s_1; ihm ist in Σ eine cubische Raumcurve associirt, die mit s zusammen eine Raumcurve $C^{2.2}$ des Gebüsches bildet (vgl. 4.) und mit s zwei Punkte der Kernfläche gemein hat. Die Gerade s_1 berührt in den entsprechenden beiden Punkten die Brennfläche Φ_1^4, ist also eine Doppeltangente von Φ_1^4. Die Hauptstrahlen von Σ sind i. A. Träger von Involutionen associirter Punkte; sie schneiden die Flächen des F^2-Gebüsches in den Punktepaaren dieser Involutionen. Die beiden Doppelpunkte einer solchen Involution sind sich selbst associirt, liegen auf der Kernfläche K^4 (5.) und sind conjugirt bezüglich aller Flächen des Gebüsches. Jede Verbindungslinie associirter Punkte ist ein Hauptstrahl von Σ.

8. Einer beliebigen Ebene φ von Σ entspricht in Σ_1 eine Steinersche Fläche F^4 vierter Ordnung dritter Classe; den Schnittpunkten von F^4 mit einer Geraden von Σ_1 entsprechen die vier Schnittpunkte von φ mit der homologen Raumcurve $C^{2.2}$ des Gebüsches. Die Fläche F^4

ist eindeutig so auf der Ebene φ abgebildet, dass den Geraden von φ je ein Kegelschnitt auf F^4 entspricht (6.). Jedem Kegelschnitt in φ entspricht auf F^4 eine Curve vierter Ordnung vom Geschlecht Null (2.); diese ist eben oder gewunden, jenachdem der Kegelschnitt auf einer Fläche des Gebüsches liegt oder nicht. Die ebenen Schnittcurven von F^4 sind demnach vom Geschlechte Null (oder rational), haben also je drei Doppelpunkte. Mit ihren Berührungsebenen hat die Steiner'sche Fläche je zwei Kegelschnitte gemein, die sich in dem Berührungspunkte und in drei Doppelpunkten der Fläche schneiden; denn die Ebene φ hat mit den sie berührenden Flächen des F^2-Gebüsches je zwei Gerade gemein. Jedem Doppelpunkte von F^4 entsprechen in φ zwei associirte Punkte, und φ enthält daher (7.) drei Hauptstrahlen s von Σ, die sich in drei associirten Punkten schneiden. Die Steiner'sche Fläche enthält demnach drei Doppelpunktsgerade s_1, die durch einen dreifachen Punkt von F^4 gehen.

9. Einen Punkt A von Σ, durch welchen alle Flächen des F^2-Gebüsches gehen, nenne ich einen „Knotenpunkt" des Gebüsches und der quadratischen Transformation (a). Jede durch ihn gehende Gerade s ist ein Hauptstrahl von Σ (7.) und zu der entsprechenden Geraden s_1 von Σ_1 projectiv. Auf s_1 giebt es demnach einen Punkt A_1, dessen homologer Punkt auf s mit A zusammenfällt; und den durch A_1 gehenden Ebenen von Σ_1 entsprechen in Σ Flächen des Gebüsches, die in A die Gerade s berühren. Wenn die Gerade s um A sich dreht und eine Ebene φ oder den Strahlenbündel A beschreibt, so beschreibt A_1 eine Gerade a_1 resp. Ebene α_1. Den Ebenen durch a_1 entsprechen in Σ Flächen zweiter Ordnung, die in A von φ berührt werden, und der Ebene α_1 entspricht der Punkt A und zugleich ein Kegel A^2 des Gebüsches mit dem Doppelpunkte A. Auf den Bündel A ist die Ebene α_1 collinear bezogen; jeder Fläche von Σ, die im Punkte A irgend eine Ebene φ berührt, entspricht in Σ_1 eine Fläche, die mit α_1 die entsprechende Gerade a_1 gemein hat.

Die Strahlen des Kegels A^2 tangiren in A die Kernfläche K^4, und A ist ein conischer Knotenpunkt von K^4. Die Ebene α_1 aber ist eine singuläre Berührungsebene der Brennfläche Φ_1^4; sie berührt Φ_1^4 längs des Kegelschnittes, der in α_1 jenem Tangentialkegel entspricht. Die Ordnung von Φ_1^4 wird durch die singuläre Ebene α_1 um zwei Einheiten erniedrigt und ist i. A. vierzehn.

10. Auch den durch den Knotenpunkt A gehenden Hauptstrahlen von Σ entsprechen in Σ_1 Doppeltangenten von Φ_1^4 (vgl. 7.). Die Congruenz dieser Doppeltangenten ist von der zweiten Classe; sie hat Φ_1^4 zur Brennfläche und α_1 zur singulären Ebene, sie ist eindeutig auf den Strahlenbündel A bezogen, und ihr Schnitt mit α_1 ist zu dem Bündel collinear (9.). Wenn die Transformation noch $r - 1$ andere

Knotenpunkte hat, so ist die Congruenz von der Ordnung $8 - r$, und ihre Brennfläche Φ_1^4 von der Ordnung $16 - 2r$.

Einer Ebene φ des Knotenpunktes A entspricht in Σ_1 eine geradlinige Fläche F^3 dritter Ordnung. Diese ist eindeutig auf φ abgebildet und kann zusammen mit α_1 als eine Steiner'sche Fläche aufgefasst werden (8.); ihre geraden Erzeugenden s_1 entsprechen den Geraden s in φ durch A. Einer beliebigen Geraden l von φ entspricht auf F^3 ein Kegelschnitt l_1 (6.); wenn aber l durch A geht, so zerfällt l_1 in eine Erzeugende s_1 und eine dem Punkte A von φ entsprechende Gerade a_1 von α_1 (9.). Die Erzeugenden s_1 liegen paarweise mit a_1 in Ebenen, welche die Fläche F^3 doppelt berühren; sie schneiden sich auf einer Doppelpunktsgeraden von F^3, der in φ ein i. A. nicht durch A gehender Hauptstrahl von Σ entspricht. Die ebenen Schnitte von F^3 sind vom Geschlecht Null (vgl. 8.).

11. Hat das F^2-Gebüsch zwei Knotenpunkte A, B, so entspricht den Punkten der Geraden AB ein gewisser Punkt C_1 in Σ_1, und den Ebenen durch C_1 entsprechen in Σ Flächen des Gebüsches, die durch AB gehen. Die Punkte der Geraden AB sind demnach mit einander und sich selbst associirt, liegen also auf der Kernfläche K^4 (5.) und sind Doppelpunkte von Kegeln des Gebüsches. Diesen Kegeln aber entsprechen in Σ_1 Ebenen, welche die Brennfläche Φ_1^4 in C_1 berühren (5.), und C_1 ist demnach ein Knotenpunkt von Φ_1^4.

Einer beliebig durch AB gelegten Ebene φ von Σ entspricht in Σ_1 eine eindeutig auf φ bezogene Regelfläche zweiter Ordnung F^2. Die beiden Regelschaaren von F^2 entsprechen den Strahlenbüscheln A und B von φ und sind zu ihnen projectiv; sie bestehen aus Doppeltangenten der Brennfläche Φ_1^4 (10.). Einer beliebigen Geraden l von φ entspricht auf F^2 ein durch C_1 gehender Kegelschnitt; der Geraden AB und zugleich den Punkten A, B entsprechen zwei durch C_1 gehende Gerade a_1, b_1 auf F^2. Die durch A und B gehenden Kegelschnitte in φ entsprechen den ebenen Schnitten der Fläche F^2, weil sie auf je einer Fläche des Gebüsches liegen. Ueberhaupt entspricht jedem durch A und B gelegten Kegelschnitte von Σ ein zu ihm projectiver Kegelschnitt in Σ_1, der viermal die Brennfläche Φ_1^4 berührt. Die Flächen F^2 und Φ_1^4 berühren einander längs einer biquadratischen Raumcurve.

§ 2.

Homologe Curven und Flächen der Räume Σ und Σ_1.

12. Einer Fläche n^{ter} Ordnung F_1^n von Σ_1 entspricht in Σ eine Fläche $2n^{ter}$ Ordnung F^{2n}; man erhält deren Gleichung, wenn man in der von F_1^n die Punktcoordinaten y_i durch die quadratischen

Functionen f_i ersetzt (vgl. 1.). Jeder Knotenpunkt A der Transformation ist ein n-facher Punkt von F^{2n}; ihm und seinem Tangentialkegel n^{ter} Ordnung entspricht die Schnittlinie von F_1^n mit seiner homologen Ebene α_1 (9.). Die Fläche F^{2n} ist sich selbst associirt und kann in associirte Flächen zerfallen (vgl. 2.).

Einer Curve m^{ter} Ordnung C_1^m von Σ_1 entspricht in Σ eine Curve $4m^{ter}$ Ordnung C^{4m}; diese hat nämlich mit einer Ebene φ von Σ ebenso viele Punkte gemein, wie C_1^m mit der entsprechenden Steinerschen Fläche vierter Ordnung von Σ_1, also $4m$ Punkte. Jeder Knotenpunkt A der Transformation ist ein m-facher Punkt von C^{4m}; er entspricht den m Schnittpunkten von C_1^m mit seiner homologen Ebene α_1. Die Curve C^{4m} ist sich selbst associirt und kann in associirte Curven zerfallen.

13. Einer nicht sich selbst associirten Fläche n^{ter} Ordnung F^n von Σ entspricht in Σ_1 eine eindeutig auf sie bezogene Fläche F_1^{4n}, die i. A. von der $4n^{ten}$ Ordnung ist. Diese entsprechende Fläche hat nämlich mit einer Geraden g_1 von Σ_1 ebenso viele Punkte gemein, wie F^n mit der entsprechenden Raumcurve $C^{2.2}$ von Σ, also $4n$ Punkte. Da der F_1^{4n} eine Fläche $8n^{ter}$ Ordnung in Σ entspricht (12.), so ist der F^n i. A. eine Fläche $7n^{ter}$ Ordnung associirt. Diese schneidet die F^n in einer Curve von der Ordnung $7n^2$; die Schnittcurve aber zerfällt in die Durchdringungscurve von F^n mit K^4, deren Punkte sich selbst associirt sind (5.), und in eine Curve von der Ordnung $(7n-4)n$, deren Punkte paarweise mit einander associirt sind. Dieser letzteren Curve entspricht eine Doppelpunktscurve der Fläche F_1^{4n}, und zwar eine Curve von derselben Ordnung $(7n-4)n$ (vgl. 14.). Die Fläche F_1^{4n} hat i. A. auch dreifache Punkte, durch welche die Doppelcurve je dreimal geht, z. B. einen für $n=1$ (vgl. 8.).

14. Wenn die Fläche F^n von Σ durch r Knotenpunkte $A, B, \ldots$ der Transformation geht, so entspricht ihr in Σ_1 ausser den r homologen Ebenen $\alpha_1, \beta_1, \ldots$ (9.) eine Fläche $(4n-r)^{ter}$ Ordnung F_1^{4n-r}. Ihr ist deshalb in Σ eine Fläche $(7n-2r)^{ter}$ Ordnung associirt, die $A, B, \ldots$ zu $(4n-r-1)$-fachen Punkten hat (12.). Auch die Schnittlinie von F^n mit der associirten Fläche hat $A, B, \ldots$ zu $(4n-r-1)$-fachen Punkten. Sie ist von der Ordnung $(7n-2r)n$ und zerfällt in die Schnittcurve $4n^{ter}$ Ordnung von F^n mit K^4, die $A, B, \ldots$ zu zweifachen Punkten hat, und in eine Curve von der Ordnung $(7n-2r-4)n$, die $A, B, \ldots$ zu $(4n-r-3)$-fachen Punkten hat, und deren Punkte paarweise associirt sind. Die letztere Curve hat mit einer beliebigen Fläche des F^2-Gebüsches ausser den r Knotenpunkten $A, B, \ldots$ nur:
$(7n-2r-4)2n-(4n-r-3)r=(7n-4)2n-(8n-r-3)r$
Punkte gemein, die paarweise associirt sind. Ihr entspricht auf

der Fläche F_1^{4n-r} eine Doppelpunktscurve, die mit einer beliebigen Ebene von Σ_1:

$$(7n-4)n-\tfrac{1}{2}(8n-r-3)r$$

Punkte gemein hat, also von dieser Ordnung ist.

Hat die Fläche F^n einen Knotenpunkt des Gebüsches zum k-fachen Punkte und $r-k$ andere Knotenpunkte zu einfachen Punkten, so entspricht ihr in Σ_1 eine Fläche $(4n-r)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer Doppelcurve von der Ordnung:

$$(7n-4)n-\tfrac{1}{2}(8n-r-3)r+\tfrac{1}{2}(k-1)k,$$

wie analog sich ergiebt.

15. Einer nicht sich selbst associirten Curve m^{ter} Ordnung C^m von Σ entspricht i. A. eine eindeutig auf sie bezogene Curve $2m^{\text{ter}}$ Ordnung C_1^{2m} in Σ_1, und ihr ist daher i. A. eine C^{2m} in Σ associirt (12.). Ihre homologe Curve C_1^{2m} hat nämlich mit einer Ebene von Σ_1 ebenso viele Punkte gemein, wie C^m mit der entsprechenden Fläche F^2 des Gebüsches, also $2m$ Punkte. Die Curve C_1^{2m} berührt die Brennfläche Φ_1^4 in $4m$ Punkten, denen die Schnittpunkte von C^m mit K^4 entsprechen (5.).

Wenn aber die Curve C^m von Σ durch r Knotenpunkte des Gebüsches je einmal oder durch einen Knotenpunkt r-mal geht, so entspricht ihr in Σ_1 eine Curve $(2m-r)^{\text{ter}}$ Ordnung C_1^{2m-r}, und ihr ist in Σ eine Curve $(7m-4r)^{\text{ter}}$ Ordnung associirt, wie analog sich ergiebt. Die Curve C_1^{2m-r} berührt die Brennfläche Φ_1^4 in $4m-2r$ Punkten, denen die von den Knotenpunkten verschiedenen Schnittpunkte von C^m mit K^4 entsprechen.

16. Die Schnittlinie einer Fläche F^n von Σ mit der Kernfläche K^4 ist von der $4n^{\text{ten}}$ Ordnung; ihr entspricht also i. A. eine Curve $8n^{\text{ter}}$ Ordnung in Σ_1. Längs dieser Curve ist der Brennfläche Φ_1^4 die Fläche F_1^{4n} von Σ_1 eingeschrieben, die der F^n entspricht (5.). Wenn aber die Fläche F^n durch r Knotenpunkte $A, B, \ldots$ des Gebüsches geht und einer F_1^{4n-r} entspricht (14.), so geht ihre Schnittlinie mit K^4 je zweimal durch $A, B, \ldots$, und die entsprechende Berührungscurve von F_1^{4n-r} und Φ_1^4 ist von der Ordnung $8n-2r$.

17. Von besonderem Interesse sind die Curven niedriger Ordnung, die in den Räumen Σ, Σ_1 eindeutig einander entsprechen. Wir wissen bereits (6., 8.), dass i. A. den Geraden von Σ Kegelschnitte in Σ_1 entsprechen, und den Kegelschnitten von Σ rationale Curven vierter Ordnung. Den Kegelschnitten von Σ, die durch zwei Knotenpunkte gehen, entsprechen in Σ_1 Kegelschnitte (11.). Wenn ein Kegelschnitt durch drei Knotenpunkte geht, so entspricht ihm in Σ_1 eine Gerade; enthält er nur einen Knotenpunkt, so entspricht ihm (15.) eine rationale

Curve dritter Ordnung in Σ, und zwar eine ebene oder gewundene, je nachdem er auf einer F^2 des Gebüsches liegt oder nicht.

Einer cubischen Raumcurve von Σ, die durch 5, 4, 3 oder 2 Knotenpunkte geht, entspricht in Σ_1 eine Gerade, ein Kegelschnitt, eine rationale Curve dritter resp. eine solche vierter Ordnung (15.). Wenn eine rationale biquadratische Raumcurve in Σ durch 6, 5 oder 4 Knotenpunkte geht, so entspricht ihr in Σ_1 ein Kegelschnitt, eine rationale Curve dritter resp. eine solche vierter Ordnung (15.); geht sie durch 5 oder 4 Knotenpunkte und hat sie einen von ihnen zum Doppelpunkt, so entspricht ihr in Σ_1 ein Kegelschnitt bezw. eine rationale Curve dritter Ordnung. Diese homologen Curven der beiden Räume sind projectiv auf einander bezogen. Ist die Curve in Σ_1 ein Kegelschnitt, so berührt dieser die Brennfläche Φ_1^4 viermal (15.).

Mehr als sechs Knotenpunkte, und zwar unendlich viele, hat das F^2-Gebüsch nur dann, wenn seine Flächen eine Gerade oder einen Kegelschnitt mit einander gemein haben.

§ 3.

Rationale Flächen dritter bis achter Ordnung mit Kegelschnittschaaren und ebenen Schnittcurven vom Geschlecht eins*).

18. Einer Regelfläche zweiter Ordnung F^2 von Σ, die durch $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ Knotenpunkte $A, B, \ldots$ des F^2-Gebüsches geht, entspricht in Σ_1 eine rationale Fläche $(8-r)^{\text{ter}}$ Ordnung F_1^{8-r}. Diese ist eindeutig auf F^2 bezogen und der Brennfläche Φ_1^4 längs einer Curve $(16-2r)^{\text{ter}}$ Ordnung eingeschrieben (16.). Ihre ebenen Schnitte sind i. A. vom Geschlecht eins, wie die ihnen entsprechenden biquadratischen Raumcurven erster Art, in denen F^2 von den Flächen des Gebüsches geschnitten wird (vgl. 2.). Diese ebenen Schnittcurven $(8-r)^{\text{ter}}$ Ordnung haben demnach je:

$$\frac{1}{2}(7-r)(6-r) - 1 = 20 - \frac{1}{2}(13-r)r$$

Doppelpunkte. Die Doppelcurve der Fläche F_1^{8-r} ist also von der Ordnung $20 - \frac{1}{2}(13-r)r$; ihr entspricht auf F^2 eine sich selbst associirte Curve $(20-4r)^{\text{ter}}$ Ordnung, die $A, B, \ldots$ zu $(5-r)$-fachen Punkten hat (14.).

*) Zu diesen Flächen und ihrer Abbildung auf einer Ebene und einer Fläche zweiter Ordnung gelangte Herr *del Pezzo* schon 1887 (in den Rendic. del Circolo mat. di Palermo I, p. 241—271), indem er Flächen achter Ordnung im Raume von 8 Dimensionen aus 5 Centren auf unseren dreidimensionalen Raum projicirte. Er bestimmte ihre Geraden und Doppelcurven und wies *zwei* Kegelschnittschaaren auf ihnen nach. Herrn Noether verdanke ich diese Litteraturangabe.

Die Fläche F_1^{8-r} ist i. A. von der 12ten Classe. Durch eine Gerade g_1 nämlich gehen i. A. zwölf Berührungsebenen der Fläche, weil in der entsprechenden Raumcurve $C^{2\cdot 2}$ des Gebüsches i. A. zwölf Flächen zweiter Ordnung sich schneiden, welche die Regelfläche F^2 berühren. Ausser der Doppelcurve kann F_1^{8-r} noch vereinzelte Doppelpunkte haben, und diese erniedrigen die Classe der Fläche um je zwei Einheiten.

19. Den beiden Geraden a, a' von F^2, die in einem Knotenpunkte A sich schneiden, entsprechen auf F_1^{8-r} zwei windschiefe Gerade a_1, a_1'; diese aber treffen eine dritte Gerade a_1'' von F_1^{8-r}, welche dem Punkte A von F^2 und seiner Berührungsebene entspricht (9.). Mit je drei Geraden b_1, b_1', b_1'', die ebenso einem anderen Knotenpunkte B auf F^2 zugehören, bilden jene drei ein windschiefes Sechsseit $a_1 a_1'' a_1' b_1 b_1'' b_1'$ auf F_1^{8-r}, dem auf F^2 das Vierseit $aa'bb'$ mit den gegenüberliegenden Eckpunkten A, B entspricht. Einem Kegelschnitte auf F^2 durch drei Knotenpunkte A, B, C entspricht (17.) auf F_1^{8-r} eine Gerade d_1''', während den Punkten A, B, C je drei Gerade auf F_1^{8-r} zugehören. Jede dieser zehn Geraden der Fläche F_1^{8-r} schneidet drei andere, und die übrigen sechs bilden ein windschiefes Sechsseit, wie aus ihrer Abbildung auf F^2 sofort einleuchtet. So schneidet a_1'' die Geraden a_1, a_1', d_1''', und $b_1 b_1'' b_1' c_1 c_1'' c_1'$ bilden ein Sechsseit; b_1 schneidet b_1'', a_1', c_1', und $a_1 b_1' c_1 c_1'' d_1''' a_1''$ bilden ein Sechsseit; d_1''' schneidet a_1'', b_1'' und c_1'', während $a_1 b_1' c_1 a_1' b_1 c_1'$ ein Sechsseit bilden.

Geht die Regelfläche F^2 durch vier Knotenpunkte A, B, C, D der Transformation, so enthält die Fläche F_1^{8-r} sechzehn Gerade, die wir bezeichnen mit

$$a_1 a_1' a_1'' a_1''', \quad b_1 b_1' b_1'' b_1''', \quad c_1 c_1' c_1'' c_1''', \quad d_1 d_1' d_1'' d_1'''.$$

Die Geraden a_1''', b_1''', c_1''', d_1''' entsprechen den Kegelschnitten von F^2, die in den resp. Ebenen BCD, CDA, DAB, ABC liegen; von den übrigen zwölf gehören je drei zu den Knotenpunkten A, B, C, D. Jede der 16 Geraden schneidet, wie aus ihrer Abbildung auf F^2 sich ergiebt, fünf und nur fünf andere, zu einander windschiefe; z. B.

a_1 schneidet $a_1'' a_1''' b_1' c_1' d_1'$; a_1' schneidet $a_1'' a_1''' b_1 c_1 d_1$;

a_1'' schneidet $a_1 a_1' b_1''' c_1''' d_1'''$; a_1''' schneidet $a_1 a_1' b_1'' c_1'' d_1''$.

20. Die Fläche F_1^{8-r} enthält $3r + \frac{1}{6} r(r-1)(r-2)$ Gerade g_1, von denen r den Knotenpunkten auf F^2 entsprechen, $2r$ andere den $2r$ Geraden von F_1^2, die sich paarweise in den r Knotenpunkten schneiden, und die übrigen $\frac{1}{6} r(r-1)(r-2)$ den Kegelschnitten auf F^2, die durch je drei der Knotenpunkte gehen (17., 19.). Ist $r = 5$,

so enthält F_1^{8-r} noch zwei weitere Gerade g_1; diese entsprechen den cubischen Raumcurven, die auf F^2 durch die 5 Knotenpunkte gehen.

Die Ebenen der Geraden g_1 berühren die Fläche F_1^{8-r} doppelt. Ihnen entsprechen nämlich Flächen des F^2-Gebüsches, welche die Regelfläche F^2 entweder doppelt berühren oder sie je in einer biquadratischen Raumcurve schneiden, die zweimal durch einen Knotenpunkt geht. Jede Ebene durch zwei der Geraden g_1 berührt die Fläche F_1^{8-r} dreimal.

21. Die Fläche F_1^{8-r} enthält:

$$2 + \tfrac{1}{2} r(r-1) + \tfrac{1}{12} r(r-1)(r-2)(r-3)$$

Kegelschnittschaaren, von denen je ein Kegelschnitt durch einen beliebigen Punkt der Fläche geht. Zwei dieser Schaaren werden auf der Regelfläche F^2 dargestellt durch die beiden Schaaren von Geraden, $\frac{1}{2} r(r-1)$ andere durch die Schaaren von Kegelschnitten, welche je zwei der r Knotenpunkte enthalten; die übrigen $\frac{1}{12} r(r-1)(r-2)(r-3)$ Schaaren entsprechen den Schaaren cubischer Raumcurven auf F^2, welche durch je vier Knotenpunkte gehen und je eine der beiden Geradenschaaren zu Sehnen haben. Ist $r = 5$, so kommen noch fünf Kegelschnittschaaren auf F_1^{8-r} hinzu; ihnen entsprechen auf F^2 Schaaren biquadratischer Raumcurven, die alle fünf Knotenpunkte und zwar je einen doppelt enthalten.

Die Ebenen der ∞^1 Kegelschnitte auf F_1^{8-r} berühren die Fläche doppelt; denn die entsprechenden Flächen des Gebüsches berühren die Regelfläche F^2 theils doppelt theils in einem Knotenpunkte. Zwei Kegelschnitte von einer und derselben Schaar treffen sich i. A. nicht, haben also mit der Schnittlinie ihrer Ebenen zwei verschiedene Punktepaare gemein. Wenn aber diese Ebenen und damit die beiden Kegelschnitte einander unendlich nahe rücken, so fallen auch die beiden Punktepaare zusammen, und die Schnittlinie der beiden Ebenen geht über in eine Doppeltangente von F_1^{8-r}. Die Ebenen jeder Kegelschnittschaar von F_1^{8-r} umhüllen demnach eine abwickelbare Fläche, die eine Schaar von Doppeltangenten der Fläche F_1^{8-r} enthält und ihr umschrieben ist.

22. Von jeder Kegelschnittschaar auf F_1^{8-r} zerfallen r Kegelschnitte in je zwei der Geraden g_1 (20., 21.); ihre übrigen Kegelschnitte sind zu den entsprechenden Linien auf F^2 projectiv. Zwei Kegelschnitte verschiedener Schaaren treffen sich, wie aus ihrer Abbildung auf F^2 einleuchtet, einmal, wenn $r < 4$, ein- oder zweimal, wenn $r = 4$ oder 5 ist. Jede Schaar schneidet im Falle $r < 4$ die Curven und die Hälfte der Geraden g_1 einer beliebigen anderen Schaar in projectiven Punktreihen; denn das Gleiche gilt von der entsprechenden

Schaar und den entsprechenden Linien auf F^2. Die Kegelschnitte einer jeden Schaar liegen folglich in den Ebenen eines Ebenenbüschels $(6-r)^{ter}$ Ordnung, welcher erzeugt wird durch r Gerade g_1 und $3-r$ Kegelschnitte, die projectiv sind.

Im Falle $r=4$ enthält F_1^{8-r} zehn Kegelschnittschaaren (21.), die paarweise conjugirt sind (Clebsch); und zwar schneiden die Curven einer beliebigen Schaar jeden Kegelschnitt der conjugirten Schaar in Punktepaaren einer Involution, die Kegelschnitte und Geraden g_1 der übrigen Schaaren aber in projectiven Punktreihen, wie die Abbildung auf F^2 lehrt. Die fünf paar conjugirten Schaaren der Fläche vierter Ordnung F_1^4 liegen folglich in den Ebenen von fünf Büscheln zweiter Ordnung, und diese umhüllen die fünf von Kummer*) entdeckten Kegel zweiter Ordnung, deren Strahlen die Fläche doppelt berühren (21.). Für $r=5$ erhalten wir die allgemeine cubische Fläche F_1^3 mit 27 Kegelschnittschaaren, deren Ebenen durch je eine der 27 Geraden g_1 der Fläche gehen. Wir schliessen den Fall $r=5$ von jetzt an vorläufig aus.

23. Die Fläche F_1^{8-r} enthält $r+\frac{1}{3}r(r-1)(r-2)$ Netze von je ∞^2 cubischen Raumcurven, und zwar entsprechen r dieser Netze den Kegelschnitten auf F^2, die durch je einen der r Knotenpunkte gehen, und die übrigen den cubischen Raumcurven durch je drei Knotenpunkte, die je eine Geradenschaar von F^2 zu Sehnen haben (17.). Dazu kommen für $r=4$ noch vier Netze cubischer Raumcurven auf F_1^{8-r}; diesen entsprechen auf F^2 biquadratische Raumcurven, die alle vier Knotenpunkte und zwar je einen doppelt enthalten. Durch zwei beliebige Punkte der Fläche geht von jedem der Netze eine Curve. Zwei Curven desselben Netzes treffen sich einmal, Curven verschiedener Netze treffen sich theils zwei- theils dreimal.

Die Fläche F_1^{8-r} enthält $1+r(r-1)+\frac{1}{2}r(r-1)(r-2)$ Systeme von je ∞^3 rationalen biquadratischen Raumcurven. Diesen Raumcurven entsprechen auf F^2 theils die Kegelschnitte (17.), theils cubische Raumcurven durch je zwei der r Knotenpunkte, theils biquadratische Raumcurven durch je drei Knotenpunkte, die je einen von diesen zum Doppelpunkt haben. Dazu kommen für $r=4$ noch 15 Systeme rationaler biquadratischer Raumcurven; ihnen entsprechen auf F^2 rationale Raumcurven vierter, fünfter und sechster Ordnung, die durch alle vier Knotenpunkte gehen und zwar durch resp. 0, 2, 4 Knotenpunkte zweimal.

24. Die Regelfläche F^2 trifft unendlich viele Flächen des F^2-

*) Monatsbericht der Berliner Akad. vom 16. Juli 1863 und Crelle's Journal Bd. 64, S. 66—76.

Gebüsches in je zwei Kegelschnitten und berührt sie zweimal in deren Schnittpunkten; die Fläche F_1^{8-r} aber berührt die entsprechenden Ebenen des Raumes Σ doppelt und schneidet sie in je zwei rationalen Curven. Nun enthält aber ein F^2-Bündel des Gebüsches i. A. zehn Flächen, die mit der Regelfläche je zwei Kegelschnitte gemein haben; denn er liegt mit ihr in einem F^2-Gebüsch, dieses enthält i. A. zehn Ebenenpaare*), und in deren Ebenen liegen die zehn Kegelschnittpaare. Durch einen beliebigen Punkt von Σ gehen demnach i. A. zehn von jenen, die Fläche F_1^{8-r} doppelt berührenden Ebenen. Diese Ebenen schneiden die Fläche, falls $r = 0$ oder 1 ist, in je zwei rationalen Curven vierter bezw. vierter und dritter Ordnung. Ihr Büschel 10^{ter} Ordnung zerfällt, wenn $r = 2$ ist, in zwei Büschel 6^{ter} und 4^{ter} Ordnung, deren Ebenen die Fläche in je zwei Curven dritter bezw. einer Curve zweiter und einer vierter Ordnung schneiden. Wenn $r > 2$ ist, so zerfällt der Büschel zehnter Ordnung in mehrere der früher (20., 22.) besprochenen Büschel doppelt berührender Ebenen.

25. Zu einer Abbildung der Fläche F_1^{8-r} auf einer Ebene η gelangen wir, indem wir die Regelfläche F^2 aus einem in ihr gelegenen Punkte S auf die Ebene projiciren. Die ebenen Schnitte von F_1^{8-r} werden dann in η dargestellt durch die Projectionen der biquadratischen Raumcurven, in denen F^2 von den Flächen des Gebüsches geschnitten wird (vgl. 18.). Diese Raumcurven gehen durch die r Knotenpunkte des Gebüsches auf F^2 und schneiden die beiden durch S gehenden Geraden von F^2 zweimal; ihre Projectionen in η gehen deshalb durch die Spuren der beiden Geraden je zweimal und durch die Projectionen der r Knotenpunkte je einmal. Die ebenen Schnitte von F_1^{8-r} werden also in der Ebene η abgebildet durch Curven vierter Ordnung, welche 2 Doppelpunkte und r einfache Punkte gemein haben.

26. Die Abbildung von F_1^{8-r} auf der Ebene η wird, falls $r > 0$ ist, noch einfacher, wenn das Projectionscentrum S in einem der r Knotenpunkte angenommen wird. Die ebenen Schnitte der Fläche werden dann in η dargestellt durch cubische Curven mit $r + 1$ gemeinsamen Punkten; und zwar sind $r - 1$ dieser „Hauptpunkte" die Projectionen der übrigen $r - 1$ Knotenpunkte, und zwei sind die Spuren der beiden durch S gehenden Geraden von F^2. Die Geraden g_1 von F_1^{8-r} werden (nach 20.) in η dargestellt durch die $r + 1$ Hauptpunkte, ihre Verbindungslinien und die Kegelschnitte, die von ihnen je fünf enthalten. Die Kegelschnittschaaren auf F_1^{8-r} werden in η abgebildet durch die $r + 1$ Strahlenbüschel der Hauptpunkte und durch die Kegelschnittbüschel, die durch je vier Hauptpunkte gehen (21.); hierzu kommen für $r = 5$ noch sechs Büschel von cubischen Curven, die alle

*) Vgl. Crelle's Journal Bd. 82, S. 76.

sechs Hauptpunkte und zwar einen doppelt enthalten (21.). Den Punkten der Doppelcurve von F_1^{8-r} entsprechen in η Punktepaare einer Curve $(15-3r)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die $r+1$ Hauptpunkte zu $(5-r)$-fachen Punkten hat (14., 18.).

27. In den Fällen $r=5$ und $r=4$ stimmt diese Abbildung mit den bekannten Abbildungen überein, die Clebsch*) von der allgemeinen cubischen Fläche F_1^3 und von der biquadratischen Fläche F_1^4 mit einer Doppelcurve zweiter Ordnung zuerst angegeben hat. Die reichhaltige Litteratur über die Fläche F_1^4 findet man in zwei Abhandlungen der Herren Segre**) und Berzolari***) zusammengestellt. Die Fläche F_1^5 hat Caporali†) mittelst der obigen Abbildung eingehend untersucht, nachdem Clebsch††) zuerst auf sie hingewiesen und Herr R. Sturm†††) ihre wichtigeren Eigenschaften ohne Abbildung begründet hatte. In einer anderen Abhandlung gelangt Caporali*†) u. a. auch zu der Fläche F_1^6, von dem System der Bildcurven ihrer ebenen Schnitte ausgehend. Zu der eindeutigen Abbildung der cubischen Fläche F_1^3 auf einer Regelfläche zweiter Ordnung gelangte Herr Cremona**†) schon 1871 mittelst einer *rationalen* Raumtransformation zweiten Grades.

28. Von den rationalen Flächen $(8-r)^{\text{ter}}$ Ordnung 12^{ter} Classe F_1^{8-r} stellen wir einige bemerkenswerthe Eigenschaften aus den Nrn 18., 20., 22., 23 übersichtlich zusammen.

Es ergeben sich für	$r=0$	1	2	3	4	5
die rationalen Flächen:	F_1^8	F_1^7	F_1^6	F_1^5	F_1^4	F_1^3.
Ordnung ihrer Doppelcurven:	20	14	9	5	2	0;
Anzahl ihrer Geraden:	0	3	6	10	16	27;
„ ihrer Kegelschnittschaaren:	2	2	3	5	10	27;
Ordnung von deren Ebenenbüscheln:	6	5	4	3	2	1;
Zahl ihrer Netze cub. Raumcurven:	0	1	2	5	16	72.

Die ebenen Schnitte aller dieser Flächen sind vom Geschlecht eins.

29. Von den zahlreichen Specialfällen der Fläche F_1^{8-r} heben wir folgende hervor: Wenn die Regelfläche F^2 durch $i=3, 4, 5, 6$ associirte Punkte geht, so hat die Fläche F_1^{8-r} einen i-fachen Punkt, und dieser ist ein $\frac{1}{2}i(i-1)$-facher Punkt ihrer Doppelcurve. Liegen auf

*) Crelle's Journal Bd. 65 und 69.
**) Diese Annalen Bd. 24 (1884).
***) Annali di Matem., Ser. II, t. 13 (1885).
†) Annali di Matem., Ser. II, t. 7.
††) Diese Annalen Bd. 3, S. 75.
†††) Diese Annalen Bd. 4, S. 278.
*†) Collectanea mathematica, 1881, S. 169.
**†) Annali di Matem., Ser. II, t. 5, p. 147.

F^2 Hauptstrahlen von Σ, die durch keinen Knotenpunkt gehen, so enthält F_1^{8-r} ebenso viele Doppelpunktsgerade; diese entsprechen den Hauptstrahlen (vgl. 8.), und auf jede von ihnen reducirt sich ein Kegelschnitt der Fläche (6., 21.); die Doppelcurve dieser speciellen F_1^{8-r} zerfällt. Verbindet eine Gerade von F^2 zwei der r Knotenpunkte, so entspricht ihr auf F_1^{8-r} ein ausgezeichneter Doppelpunkt; durch diesen gehen die Kegelschnitte von mindestens einer Schaar der Fläche.

Liegen auf F^2 in den Fällen $r = 4$ oder 5 zwei windschiefe Verbindungslinien a, b von Knotenpunkten, so hat die entsprechende Fläche F_1^4 resp. F_1^3 zwei Doppelpunkte A_1, B_1. Den mit a und b incidenten Geraden von F^2 entsprechen auf F_1^4 resp. F_1^3 Kegelschnitte, die durch A_1 und B_1 gehen (11.); vier dieser Kegelschnitte aber zerfallen in je zwei durch resp. A_1 und B_1 gehende Gerade, und wenn $r = 5$ ist, so zerfällt ein fünfter in $A_1 B_1$ und eine andere Gerade.

30. Wenn die Regelfläche F^2 in einen Kegel zweiter Ordnung übergeht, so fallen gewisse Gerade und Kegelschnittschaaren von F_1^{8-r} paarweise zusammen, und dem Doppelpunkte des Kegels entspricht auf F_1^{8-r} ein Doppelpunkt, der auf den Kegelschnitten von mindestens einer Schaar, aber i. A. nicht auf der Doppelcurve der Fläche liegt. Hat der Kegel einen der r Knotenpunkte, des F^2-Gebüsches, die auf ihm liegen, zum Doppelpunkte, so entspricht ihm in Σ_1 eine geradlinige Fläche $(7-r)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren ebene Schnitte vom Geschlecht Null sind; z. B. für $r=3$ eine biquadratische Regelfläche mit cubischer Doppelcurve und *einer* Kegelschnittschaar.

Beiläufig sei noch erwähnt, dass mindestens $2r$ Gerade g_1 und zwei Kegelschnittschaaren auf F_1^{8-r} imaginär werden, wenn F^2 in ein zweitheiliges Hyperboloid, ein elliptisches Paraboloid oder Ellipsoid übergeht (vgl. 20., 21.).

§ 4.

Rationale Flächen vierter bis achter Ordnung mit je einer Kegelschnittschaar und ebenen Schnittcurven vom Geschlecht zwei.

31. Nachdem schon Herr Noether*) gewisse rationale Flächen fünfter und sechster Ordnung auf solche dritter Ordnung zurückgeführt hatte, leitete Herr Cremona**) aus den cubischen Flächen andere rationale Flächen vierter bis achter Ordnung ab, darunter solche mit Kegelschnittschaaren. Die von den beiden Autoren benutzten Raumtransformationen sind aber rational (d. h. eindeutig umkehrbar) und vom dritten Grade. Wir wollen durch quadratische, nicht eindeutig

*) Diese Annalen Bd. 3, S. 568 und 573.

**) Diese Annalen Bd. 4, S. 213—230.

umkehrbare Transformationen eine specielle cubische Fläche F^3 in rationale Flächen höherer Ordnung mit je einer Kegelschnittschaar umwandeln. Zunächst aber stellen wir die in Betracht kommenden Eigenschaften der Fläche F^3 in Kürze zusammen.

Wenn eine cubische Fläche F^3 einen Doppelpunkt A hat, so fallen bekanntlich zwölf ihrer 27 Geraden paarweise mit sechs durch A gehenden reellen oder imaginären Geraden zusammen, und F^3 enthält nur noch 15 andere Gerade. Jene 6 Geraden liegen auf dem Tangentialkegel von A, der von der zweiten Ordnung ist und die erste Polare von A nach F^3 darstellt. Ihre 15 Verbindungsebenen schneiden F^3 noch in je einer der übrigen 15 Geraden.

32. Hat die cubische Fläche F^3 zwei Doppelpunkte A, B, so enthält sie die Gerade AB und hat mit deren Ebenen noch je einen durch A und B gehenden Kegelschnitt gemein (vgl. 29.). Der Kegelschnitt zerfällt in AB und eine andere Gerade s, wenn seine Ebene die Fläche in einem Punkte C von AB berührt. Die Ebene hat aber dann mit F^3 zwei in AB zusammenfallende Gerade gemein und berührt F^3 in allen Punkten von AB. Auch die Tangentialkegel der Doppelpunkte A, B enthalten diese beiden zusammenfallenden Geraden (31.); sie berühren sich und die cubische Fläche längs AB und haben mit F^3 nur noch je vier andere Gerade a resp. b gemein.

33. Die vier Geraden a durch A schneiden je eine der vier Geraden b durch B und bilden mit ihnen vier Kegelschnitte der Schaar (32., 29.); die vier Schnittpunkte ab liegen auf dem Kegelschnitt, den die Tangentialkegel von A und B ausser ihrem Berührungsstrahle mit einander gemein haben, und welcher die cubische Fläche in einem Punkte von AB berührt.

Die Verbindungsebene von zwei der vier Geraden a schneidet die Fläche F^3 noch in einer Geraden k, und diese trifft die Gerade s (vgl. 32.) und die beiden zu den $2a$ windschiefen Geraden b. Auf F^3 liegen demnach sechs Gerade k, die mit s, mit je $2a$ und je $2b$ incident sind und paarweise mit s in drei Ebenen liegen. Damit sind alle 27 Geraden der cubischen Fläche nachgewiesen, denn mit AB fallen vier, mit den $4a$ und $4b$ aber je zwei von ihnen zusammen. Eine Ebene hat mit F^3 nur dann einen Kegelschnitt gemein, wenn sie durch eine der 16 Geraden AB, s, $4a$, $4b$ und $6k$ geht.

34. Fünf Kegelschnitte der cubischen Fläche verbinden einen beliebigen Punkt P von F^3 mit dem Doppelpunkte A; einer von ihnen geht zugleich durch B, die Ebenen der vier übrigen l gehen durch je eine der vier Geraden a. Verbindet man vier Punkte P der Fläche mit einem ihrer Kegelschnitte durch eine Fläche zweiter Ordnung, so hat diese mit F^3 noch eine die $4P$ enthaltende biquadratische Raumcurve erster Art gemein. Mit den Kegelschnitten von F^3, deren Ebenen

durch eine bestimmte von den 16 Geraden gehen, kann diese Raumcurve durch Flächen zweiter Ordnung verbunden werden.

Die Fläche F^3 enthält sechs Netze von je ∞^2 cubischen Raumcurven, die durch beide Doppelpunkte gehen; sie schneidet die ∞^2 Flächen zweiter Ordnung, welche je eine der sechs Geraden k mit s und AB verbinden, in den Curven dieser paarweise conjugirten Netze. Zwei Raumcurven aus conjugirten Netzen liegen allemal auf einer Fläche zweiter Ordnung. Zwei beliebige Punkte der Fläche können mit A und B durch sechs cubische Raumcurven m verbunden werden, die je einem dieser Netze angehören. Jede dieser sechs Curven m trifft eine der 6 Geraden k zweimal, die mit dieser incidente gar nicht, die übrigen $4k$ aber und die Gerade s einmal; sie trifft nur die zwei Geraden a und die $2b$, welche jene erste k nicht schneiden, in je einem von A und B verschiedenen Punkte.

35. Wir wählen nun die beiden Doppelpunkte A, B und $r = 0, 1, 2, 3, 4$ beliebige einfache Punkte P der cubischen Fläche F^3 zu Knotenpunkten des F^2-Gebüsches in Σ. Dann entspricht (11.) jedem durch A und B gehenden Kegelschnitt von F^3 ein zu ihm projectiver Kegelschnitt in Σ_1; der Fläche F^3 aber entspricht in Σ_1 eine eindeutig auf sie bezogene rationale Fläche F_2^{8-r}, die eine Schaar von Kegelschnitten enthält. Die Fläche F_2^{8-r} ist von der $(8-r)^{\text{ten}}$ Ordnung und i. A. von der 24^{sten} Classe; denn eine beliebige Gerade von Σ_1 trifft sie in $8-r$ Punkten, und durch die Gerade gehen an sie i. A. 24 Berührungsebenen, weil F^3 mit der entsprechenden biquadratischen Raumcurve $C^{2,2}$ des Gebüsches ausser den Doppelpunkten A, B und den r Punkten P noch $8-r$ Punkte gemein hat, und weil durch $C^{2,2}$ i. A. 24 Flächen des F^2-Gebüsches gehen, welche F^3 berühren. Die Schnittcurven von F_2^{8-r} mit beliebigen Ebenen sind vom Geschlecht zwei wie die entsprechenden Raumcurven sechster Ordnung, in denen F^3 von den Flächen des Gebüsches geschnitten wird, und die aus dem Doppelpunkt A durch biquadratische Kegel mit dem Doppelstrahl AB und $4+r$ einfachen gemeinsamen Strahlen a und AP projicirt werden. Die ebenen Schnittcurven von F_2^{8-r} haben demnach je

$$\tfrac{1}{2}(7-r)(6-r) - 2 = 19 - \tfrac{1}{2}(13-r)r$$

Doppelpunkte, und die Doppelcurve von F_2^{8-r} ist von der Ordnung $19 - \frac{1}{2}(13-r)r$. Ihr entspricht, beiläufig bemerkt, auf F^3 eine sich selbst associirte Curve $(28-2r)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche A und B zu $(9-2r)$-fachen und die r Knotenpunkte P zu $(5-r)$-fachen Punkten hat.

36. Die Fläche F_2^{8-r} enthält $8+2r$ Gerade g_1, die paarweise sich schneiden. Acht dieser Geraden, $4a_1$ und $4b_1$, entsprechen den acht Geraden $4a$ und $4b$ auf F^3, die paarweise mit AB in vier Ebenen

liegen und durch resp. A und B gehen (33., 10.); die $2r$ übrigen entsprechen den r Knotenpunkten P und den r Kegelschnitten auf F^3, die je einen der Punkte P mit A und B verbinden (9., 17.). Die Kegelschnittschaar auf F_2^{8-r} enthält demnach $4+r$ Kegelschnitte, die in je zwei der $8+2r$ Geraden g_1 zerfallen. Die Ebenen der Geraden g_1 sowohl wie die der Kegelschnittschaar berühren die Fläche F_2^{8-r} doppelt (vgl. 20., 21.). Die $8+2r$ Geraden treffen, wie hieraus folgt, die Doppelcurve von F_2^{8-r} je $(5-r)$ mal; die Kegelschnitte der Schaar treffen die Doppelcurve je $(10-2r)$ mal. Die Ebenen der Schaar umhüllen eine abwickelbare Fläche, die eine Schaar von Doppeltangenten der F_2^{8-r} enthält (21.). Der Geraden s entspricht ein Kegelschnitt der Schaar, der Geraden AB entspricht (11.) ein Punkt C_1 dieses Kegelschnitts auf F_2^{8-r}.

Bei besonderen Lagen der Knotenpunkte P kann die Fläche F_2^{8-r} mehr als $8+2r$ Gerade enthalten. Wenn nämlich eine der 6 Geraden k auf F^3 durch einen Knotenpunkt P geht, so entspricht ihr eine Gerade auf F_2^{8-r}; dasselbe gilt von einem Kegelschnitt der F^3, welcher durch A oder B und zwei Knotenpunkte P oder durch drei P geht. Bei passender Annahme der r Punkte P kann die Fläche F_2^{8-r} bis zu $8+4r$ einfache Gerade enthalten, von denen aber nur $8+2r$ der Kegelschnittschaar angehören. Wir sehen von diesen besonderen Fällen der Fläche hier ab.

37. Ausser der Kegelschnittschaar enthält die Fläche F_2^{8-r} noch 2^{3+r} einzelne Kegelschnitte k_1, l_1, m_1, n_1, p_1. Und zwar entsprechen auf der cubischen Fläche F^3:

1) den 8 Kegelschnitten k_1 von F_2^{8-r} die 6 Geraden k und die beiden Doppelpunkte A, B oder vielmehr deren Tangentialkegel zweiter Ordnung (9.);

2) den $8r$ Kegelschnitten l_1 die Kegelschnitte l, die zu achten je einen Punkt P mit A oder B verbinden (34.);

3) den $8\frac{r(r-1)}{1.2}$ Kegelschnitten m_1 die cubischen Raumcurven m durch A, B und je zwei Punkte P (34.) und die ebenen Curven dritter Ordnung durch A oder B und je $2P$;

4) den $8\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}$ Kegelschnitten n_1 die biquadratischen Raumcurven durch A, B und je $3P$, die A oder B zum Doppelpunkt haben;

5) den $8\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.3.4}$ Kegelschnitten p_1 die Raumcurven fünfter Ordnung durch A, B und $4P$, die entweder A oder B zum dreifachen Punkte oder A und B zu Doppelpunkten haben.

Da $r \leqq 4$ ist, so wird

$$1 + r + \frac{r(r-1)}{2} + \cdots + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.3.4} = (1+1)^r = 2^r,$$

und 2^{3+r} ist die Anzahl der vereinzelten Kegelschnitte auf F_2^{8-r}.

Diese 2^{3+r} Kegelschnitte werden durch die Kegelschnittschaar der Fläche F_2^{8-r} projectiv so auf einander bezogen, dass sie ihre Schnittpunkte entsprechend gemein haben; denn ihre homologen Geraden, Tangentialkegel und Curven auf F^3 sind zu ihnen projectiv und werden durch den Ebenenbüschel AB und die entsprechende Kegelschnittschaar der cubischen Fläche auf einander projectiv bezogen. Jeder der 2^{3+r} Kegelschnitte trifft also alle Kegelschnitte der Schaar und insbesondere (36.) die Hälfte der $8 + 2r$ Geraden von F_2^{8-r}.

38. Aus der Abbildung der 2^{3+r} Kegelschnitte k_1, l_1, m_1, n_1, p_1 von F_2^{8-r} auf der cubischen Fläche F^3 ergiebt sich u. a. Folgendes (vgl. 33., 34.). Jeder der 8 Kegelschnitte k_1 wird gar nicht getroffen von 6 der übrigen k_1, von $4r$ der Kegelschnitte l_1 und von $\frac{1}{2}r(r-1)$ der m_1; er wird einmal getroffen von einem der übrigen k_1, von $4r$ der l_1, von $3r(r-1)$ der m_1, von $\frac{2}{3}r(r-1)(r-2)$ der n_1 und, wenn $r = 4$ ist, von einem der p_1; zweimal von $\frac{1}{2}r(r-1)$ der m_1, von $\frac{2}{3}r(r-1)(r-2)$ der n_1 und, wenn $r = 4$, von sechs der p_1; er trifft, wenn $r = 4$ ist, dreimal einen der Kegelschnitte p_1.

39. Beliebige drei der 2^{3+r} projectiven Kegelschnitte von F_2^{8-r} erzeugen durch ihre homologen Punkte die Ebenen der Kegelschnittschaar dieser Fläche (37.). Die drei Kegelschnitte aber lassen sich so auswählen, dass sie zu zweien $r + 1$ Punkte entsprechend gemein haben. Man wähle zwei sich treffende k_1 und füge für $r = 0$, 1 oder 2 einen Kegelschnitt k_1, l_1 resp. m_1 hinzu, der einen der beiden k_1 gar nicht, einmal resp. zweimal trifft; für $r = 3$ oder 4 aber wähle man einen Kegelschnitt k_1, einen ihn zweimal treffenden m_1 und einen ihn zwei- resp. dreimal treffenden n_1 resp. p_1.

Die Ebenen der Kegelschnittschaar auf F_2^{8-r} bilden demnach einen rationalen Ebenenbüschel $(5-r)^{\text{ter}}$ Ordnung; dieser wird erzeugt durch drei projective Kegelschnitte, die zu zweien $r + 1$ Punkte entsprechend gemein haben*).

*) Drei projective rationale Curven von den Ordnungen n, p, q erzeugen i. A. einen rationalen Ebenenbüschel $(n+p+q)^{\text{ter}}$ Ordnung. Denn die homogenen Coordinaten ihrer homologen Punkte lassen sich durch ganze Functionen n^{ten}, p^{ten} resp. q^{ten} Grades eines Parameters λ darstellen, die Gleichung der Verbindungsebene homologer Punkte wird also für λ vom Grade $n + p + q$, und hieraus folgt der Satz. Wenn aber drei homologe Curvenpunkte in einer Geraden u

40. Die Fläche F_2^{8-r} enthält 2^{3+r} Schaaren cubischer und 2^{3+r} Netze rationaler biquadratischer Raumcurven. Den Netzen biquadratischer Raumcurven entsprechen auf F^3 die sechs Netze cubischer Raumcurven durch A und B (34.), zwei Netze ebener cubischer Curven durch A oder B, $8r$ Netze biquadratischer Raumcurven durch A, B und je einen der r Knotenpunkte P mit einem Doppelpunkt in A oder B, $8\frac{r(r-1)}{2}$ Netze von Raumcurven 5^{ter} Ordnung durch A, B und je $2P$, die entweder A oder B zum dreifachen Punkte oder A und B zu Doppelpunkten haben; u. s. w. Den cubischen Raumcurven der 2^{3+r} Schaaren entsprechen auf F^3 die Kegelschnitte durch A oder B, deren Ebenen durch je eine der 8 Geraden a, b gehen, die cubischen Raumcurven durch A, B und je einen Knotenpunkt P, die ebenen Curven 3^{ter} Ordnung durch A oder B und je einen P, die biquadratischen Raumcurven durch A, B und je $2P$ mit einem Doppelpunkt in A oder B; u. s. w. Den Kegelschnittschaaren auf F^3, deren Ebenen durch je eine der sechs Geraden k gehen, entsprechen 6 Schaaren rationaler biquadratischer Raumcurven, ihren durch je einen Punkt P gehenden Kegelschnitten entsprechen $6r$ cubische Raumcurven auf F_2^{8-r}. Alle diese cubischen und biquadratischen Raumcurven der Fläche F_2^{8-r} werden durch deren Kegelschnittschaar projectiv auf einander bezogen (vgl. 37.); jede von ihnen trifft die Kegelschnitte der Schaar und $4+r$ Gerade der Fläche einmal.

41. Wird die cubische Fläche F^3 aus ihrem Doppelpunkte A auf eine Ebene η' projicirt, so wird zugleich mit ihr die Fläche F_2^{8-r} eindeutig auf η' abgebildet. Den ebenen Schnittcurven von F_2^{8-r} entsprechen in η' biquadratische Curven vom Geschlecht zwei, die einen Punkt B' zum Doppelpunkt haben und noch durch $4+r$ andere Punkte P' gehen. Vier dieser „Hauptpunkte" P' sind (35.) die Spuren der 4 Geraden a, die r übrigen aber und B' sind die Projectionen der r Punkte P und des Doppelpunktes B. Die Kegelschnitte der Schaar auf F_2^{8-r} werden in η' dargestellt durch die Geraden des Hauptpunktes B', die $4+r$ Geradenpaare aber durch je einen der $4+r$ Hauptpunkte P' und seine Verbindungslinie mit B'. Den 2^{3+r} einzelnen Kegelschnitten auf F_2^{8-r} entsprechen in η' der Punkt B', die Verbindungslinien der r Punkte P', die Kegelschnitte durch B' und je $4P'$, die Curven dritter Ordnung durch je $6P'$ mit einem

---

liegen, und insbesondere wenn zwei der Curven einen Punkt entsprechend gemein haben, so zerfällt der Ebenenbüschel in einen Büschel u erster und einen Büschel $(n+p+q-1)^{ter}$ Ordnung, und nur der letztere gilt als das Erzeugniss der projectiven Curven. In dem vorliegenden Fall vermindert sich die Ordnung $2+2+2$ des erzeugten Ebenenbüschels um $3+r$ Einheiten.

Doppelpunkt in B' und im Falle $r = 4$ die Curve vierter Ordnung durch alle $8P'$ mit einem dreifachen Punkte in B' (vgl. 37.).

Für die Flächen vierter und fünfter Ordnung F_2^4 und F_2^5 wurde diese bezw. die reciproke Abbildung schon von Clebsch*) entdeckt und zu ihrer eingehenden Untersuchung benutzt. Auf F_2^4 ist Herr Sturm**), und auf F_2^5 sind die Herren Noether, Cremona und Sturm***) gelegentlich zurückgekommen. Auch Caporali†) erwähnt die Flächen F_2^4 und F_2^5, sowie F_2^6. Alle Flächen dieses und des folgenden Paragraphen sind implicite unter den von Castelnuovo††) untersuchten Flächen m^{ter} Ordnung enthalten, welche das „Flächengeschlecht" Null und ebene hyperelliptische Schnittcurven vom Geschlecht $\pi > 1$ haben. Herr Castelnuovo beweist u. a., dass diese Flächen m^{ter} Ordnung alle rational sind und je eine Kegelschnittschaar enthalten, von welcher i. A. $4\pi + 4 - m$ Kegelschnitte in Gerade zerfallen. Er fasst sie auf als Projectionen von Flächen in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

42. Wir erhalten (nach Nr. 35., 36., 37., 39.)

wenn gesetzt wird: $r =$	0	1	2	3	4,
die rationalen Flächen $(8-r)^{ter}$ Ordnung:	F_2^8	F_2^7	F_2^6	F_2^5	F_2^4
mit Doppelcurven von der resp. Ordnung:	19	13	8	4	1.
Anzahl ihrer einfachen Geraden:	8	10	12	14	16;
Anzahl ihrer einzelnen Kegelschnitte:	8	16	32	64	128;
Ordnung des Ebenenbüschels ihrer K-Schaar:	5	4	3	2	1.

In F_2^{8-r} bezeichnet der untere Index 2 das Geschlecht der ebenen Schnittcurven, der obere $8 - r$ die Ordnung der Fläche.

43. Wenn die cubische Fläche F^3 durch i associirte Punkte geht, so hat die Fläche F_2^{8-r} einen i-fachen Punkt, und dieser ist ein $\frac{i(i-1)}{2}$-facher Punkt ihrer Doppelcurve. Enthält eine der 6 Geraden k von F^3 zwei Knotenpunkte P, so entspricht ihr auf F_2^{8-r} ein dreifacher Punkt, durch welchen die Kegelschnittschaar der Fläche geht; enthält sie associirte Punkte, so entspricht ihr eine Doppelgerade auf F_2^{8-r}. Einem von A und B verschiedenen Doppelpunkte von F^3 entspricht auf F_2^{8-r} ein Doppelpunkt, der i. A. nicht auf der Doppelcurve liegt. Ist F^3 eine cubische Regelfläche und AB ihre Doppelgerade,

---

*) Diese Annalen Bd. 1, S. 264 und Bd. 3, S. 71—75; Abhandlungen der Gött. Soc. 1870, Bd. 15.

**) Diese Annalen Bd. 4, S. 263.

***) Noether ebenda Bd. 3, S. 199—203 und 568; Cremona ebenda Bd. 4, S. 115 und 118; R. Sturm ebenda Bd. 4, S. 275—278.

†) Collectanea matem., 1881, S. 169.

††) Rendic. di Palermo IV, p. 73—88. Diese und die vorhergehende Litteraturangabe verdanke ich Herrn Noether.

so entspricht ihrer Geradenschaar die Schaar von Kegelschnitten auf F_2^{8-r}, der Geraden AB aber entspricht ein dreifacher Punkt dieser Fläche, in welchem alle Kegelschnitte der Schaar sich treffen.

44. In einem beachtenswerthen Specialfalle hat die Fläche F_2^{8-r} eine $(6-r)$-fache Gerade d_1 und eine Schaar von Kegelschnitten, deren Ebenen durch d_1 gehen. Sie entspricht einer cubischen Fläche F^3, die eine (durch A, B und die r Punkte P gehende) biquadratische Raumcurve d des F^2-Gebüsches enthält. Den Punkten der Geraden d_1 entsprechen je $6-r$ associirte Punkte der Raumcurve d, und den Ebenen von d_1 entsprechen Flächen zweiter Ordnung, die mit F^3 je einen durch A und B gehenden Kegelschnitt gemein haben. Die Gerade d_1 trifft die $8+2r$ einfachen Geraden und die 2^{3+r} einzelnen Kegelschnitte der Fläche F_2^{8-r} je einmal, die Kegelschnitte der Schaar aber je zweimal. Die Doppelcurve der Fläche zerfällt in die $(6-r)$-fache Gerade d_1 und $4-r$ Doppelgerade*), welche d_1 schneiden, und denen je ein sich selbst associirter Kegelschnitt auf F^3 entspricht.

45. Eine specielle Fläche fünfter Ordnung F_2^5 ergiebt sich, wenn für $r=3$ die drei Knotenpunkte P auf einem Kegelschnitte h von F^3 liegen, dessen Ebene durch die mit AB incidente Gerade s geht (vgl. 32.). Dem Kegelschnitt h entspricht nämlich auf F_2^5 eine zu ihm projective Gerade h_1; diese aber trifft die Kegelschnitte der Schaar auf F_2^5 in je einem Punktepaare einer Involution, weil h die Ebenen der Geraden AB und die entsprechenden Kegelschnitte auf F^3 in Punktepaaren einer Involution schneidet. Auf dieser speciellen Fläche F_2^5 liegen also die Kegelschnitte der Schaar in den Ebenen der ausgezeichneten Geraden h_1, und zwar paarweise; ihre Ebenen berühren die Fläche in je vier Punkten von h_1. Die Gerade h_1 schneidet die übrigen 14 Geraden g_1 der Fläche, denn in diese $14g_1$ zerfallen je 7 Kegelschnitte der Schaar.

46. Das F^2-Gebüsch besteht, wenn $r=4$ ist, aus den durch A, B und die 4 Punkte P gehenden Flächen zweiter Ordnung; es enthält also auch die Flächen 2. O., welche die $4P$ mit einem durch A und B gehenden Kegelschnitt der cubischen Fläche F^3 verbinden. Diese Flächen aber haben mit F^3 eine biquadratische Raumcurve des Gebüsches gemein (34.); der Raumcurve aber entspricht auf der biquadratischen Fläche F_2^4 eine Doppelgerade d_1, durch welche alle Ebenen der Kegelschnittschaar gehen (44.).

Die Fläche vierter Ordnung F_2^4 hat auf ihrer Doppelgeraden d_1 zwei dreifache Punkte K_1, in denen alle Kegelschnitte ihrer Schaar sich treffen, falls zwei der sechs Geraden k von F^3 durch je zwei der 4 Punkte P gehen (43.). Diese specielle F_2^4 enthält nur 14 einfache

*) Diese Bemerkung verdanke ich Herrn Noether.

Gerade; denn sie wird längs der Geraden d_1 von zwei Ebenen berührt (vgl. 32.), und zwei Kegelschnitte ihrer Schaar bestehen aus d_1 und je einer mit d_1 incidenten Geraden. Sechs andere Kegelschnitte zerfallen in die 12 übrigen Geraden g_1 von F_2^4, die zu sechsen durch die beiden dreifachen Punkte K_1 gehen. Von den acht Hauptpunkten P' der Bildebene η' liegen in diesem Specialfalle sieben auf zwei Geraden k', den Projectionen der beiden Geraden k, die je $2P$ enthalten (vgl. 41.), und diese $2k'$ entsprechen den dreifachen Punkten K_1. Durch jeden der beiden Punkte K_1 gehen 15 Kegelschnitte von F_2^4, die nicht der Schaar angehören; ihre Ebenen verbinden je zwei der sechs Geraden g_1 des Punktes. Ausser diesen 30 enthält die Fläche noch 40 einzelne Kegelschnitte, die paarweise in 20 dreifach berührenden Ebenen liegen, sowie 20 paarweise conjugirte Schaaren cubischer Raumcurven durch beide Punkte K_1, wie aus der Abbildung auf η' leicht sich ergiebt. Die Ebenen der 12 Geraden g_1 schneiden die Fläche F_2^4 in 12 Schaaren von Curven dritter Ordnung, die je einen der Punkte K_1 zum Doppelpunkte haben.

§ 5.

Rationale Flächen fünfter und höherer Ordnung mit je einer Kegelschnittschaar und ebenen Schnittcurven vom Geschlecht 3, 4, ..., n.

47. Bevor wir noch andere Reihen rationaler Flächen ableiten, besprechen wir kurz die quadratischen Transformationen, welche eine gerade Basis- oder Knotenlinie b haben*). Durch diese Gerade b gehen alle Flächen des F^2-Gebüsches in Σ, jeder Punkt von b ist ein Knotenpunkt der Transformation, und die mit b incidenten Geraden s sind Hauptstrahlen von Σ und zu den entsprechenden Geraden s_1 von Σ_1 projectiv (9.). Den Ebenen von Σ entsprechen (10.) i. A. cubische Regelflächen in Σ_1. Die biquadratischen Raumcurven des Gebüsches zerfallen in die Knotenlinie b und je eine cubische Raumcurve, die b zur Sehne hat; diese Raumcurve kann ihrerseits zerfallen in eine Gerade s und einen mit s associirten Kegelschnitt, welche b treffen. Einem beliebigen Punkte von Σ sind ausser den Punkten von b nur drei andere Punkte associirt; das Gebüsch enthält alle Flächen zweiter Ordnung, welche die vier associirten Punkte mit b verbinden, unter ihnen aber vier Ebenenpaare.

48. Jeder Ebene φ durch b ist demnach eine Ebene φ' associirt, die mit φ eine Fläche des Gebüsches bildet. Dem Ebenenpaare $\varphi\varphi'$ entspricht im Raume Σ_1 eine Ebene φ_1, die zu φ collinear ist; denn den Geraden s in φ, die durch irgend einen Punkt Q gehen, entsprechen in φ_1 die Geraden s_1 des homologen Punktes Q_1 (47.). Ein beliebiger zu b

*) Vgl. R. Krause, über ein specielles Gebüsch von Flächen 2. O., Inaug.-Diss., Strassburg 1879; Reye, Geom. d. Lage, 3. Aufl., III, S. 168.

windschiefer Hauptstrahl von Σ schneidet die Flächen F^2 und Ebenenpaare $\varphi\varphi'$ des Gebüsches in Punktepaaren einer Involution (7.). Folglich beschreibt die Ebene φ', wenn φ um b sich dreht, einen cubischen Ebenenbüschel, der zu dem Büschel b projectiv ist, und dessen Axen die zu b windschiefen Hauptstrahlen sind. Zugleich beschreibt die Schnittlinie der associirten Ebenen φ, φ' die Kernfläche K^4 des Gebüsches, die entsprechende Ebene φ_1 aber beschreibt einen rationalen biquadratischen Ebenenbüschel. Die zu b windschiefen Geraden l von Σ schneiden den Büschel b in projectiven Punktreihen; die ihnen entsprechenden Kegelschnitte l_1 von Σ_1 werden folglich durch den biquadratischen Büschel der Ebenen φ_1 projectiv auf einander bezogen. Dieser Büschel wird erzeugt durch drei projective Kegelschnitte l_1, die zu zweien zwei Punkte entsprechend gemein haben.

49. Hat das F^2-Gebüsch ausser den Punkten von b noch einen Knotenpunkt P, so ist die Ebene bP allen Ebenen einer Geraden q von Σ associirt, und ihren durch P gehenden Geraden entspricht in Σ_1 je ein Punkt einer Geraden q_1 (vgl. 11.). Der cubische Büschel der Ebenen φ' zerfällt dann in den Büschel q erster und einen Büschel zweiter Ordnung mit dem Mittelpunkt P; der biquadratische Büschel der Ebenen φ_1 aber besteht aus dem Büschel q_1 erster und einem Büschel dritter Ordnung. Die Geraden des Punktes P in Σ werden durch den Ebenenbüschel b, die ihnen entsprechenden Geraden von Σ_1 werden durch den cubischen Büschel der Ebenen φ_1 projectiv auf einander bezogen.

Kommt zu P noch ein Knotenpunkt Q, so ist einer beliebigen Ebene φ der Knotenlinie b eine Ebene φ' der Geraden PQ associirt. Die entsprechende Ebene φ_1 von Σ_1 aber geht durch den Punkt, welcher der Geraden PQ entspricht (11.); sie beschreibt, wenn φ um b sich dreht, einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung.

Hat das F^2-Gebüsch ausser den Punkten von b noch drei Knotenpunkte P, Q, R, so ist deren Ebene φ' allen Ebenen φ der Knotenlinie b associirt. Den Kegelschnitten in φ' durch P, Q und R, welche b treffen, entspricht in Σ_1 je ein Punkt einer Geraden b_1, den Ebenen φ der Knotenlinie b aber entsprechen in Σ_1 die Ebenen φ_1 dieser Geraden b_1 in projectiver Weise. Die quadratische Transformation ist in diesem Falle eindeutig umkehrbar, weil einem beliebigen Punkte von Σ oder Σ_1 nur ein Punkt in Σ_1 resp. Σ entspricht. Sie wird dargestellt durch:

$$\varrho y_1 = x_1 x_4, \quad \varrho y_2 = x_2 x_4, \quad \varrho y_3 = x_1(x_3 - x_2), \quad \varrho y_4 = x_2(x_3 - x_1),$$

und zwar sind

$$(x_1 = x_3 = x_4 = 0), \quad (x_2 = x_3 = x_4 = 0) \text{ und } (x_1 = x_2 = x_3,\ x_4 = 0)$$

die drei Knotenpunkte und $(x_1 = x_2 = 0)$, $(y_1 = y_2 = 0)$ die Geraden b, b_1. Die Umkehrung dieser Substitution ist vom dritten Grade, nämlich:

$$\tau x_1 = y_1(y_2 y_3 - y_4 y_1), \quad \tau x_2 = y_2(y_2 y_3 - y_4 y_1), \quad \tau y_3 = y_1 y_2 (y_3 - y_4),$$
$$\tau y_4 = y_1 y_2 (y_1 - y_2).$$

Diese Formeln hat schon Cayley angegeben*).

50. Die quadratischen Transformationen mit gerader Knotenlinie b nun wenden wir an auf die biquadratische Fläche F_2^4, indem wir b mit deren Doppelgeraden zusammenfallen lassen und noch $r = 0, 1, 2, 3$ Knotenpunkte P auf F_2^4 annehmen. Die Fläche F_2^4 wird durch sie in eine rationale Fläche F_3^{8-r} verwandelt so, dass jedem Kegelschnitt ihrer Schaar ein zu ihm collinearer Kegelschnitt auf F_3^{8-r} entspricht (48.). Die Ebenen der Kegelschnitte auf F_3^{8-r} bilden einen rationalen Ebenenbüschel $(4-r)^{\text{ter}}$ Ordnung (48., 49.). Die Fläche F_3^{8-r} ist von der $(8-r)^{\text{ten}}$ Ordnung; sie hat nämlich $8-r$ Punkte mit einer Geraden von Σ_1 gemein, weil F_2^4 mit der entsprechenden cubischen Raumcurve von Σ (vgl. 47.) ausser zwei Doppelpunkten auf b und den r Punkten P nur $12 - 4 - r = 8 - r$ Punkte gemein hat.

51. Die ebenen Schnittlinien der Flächen F_3^{8-r} sind i. A. vom Geschlecht drei. Ihnen entsprechen nämlich die Schnittlinien von F_2^4 mit den Flächen des F^2-Gebüsches, also Raumcurven sechster Ordnung, abgesehen von der Doppelgeraden b; diese Raumcurven aber haben je eine Schaar von viermal sie treffenden Geraden, werden also aus ihren Punkten durch Kegel fünfter Ordnung vom Geschlechte drei projicirt, die je eine dreifache Gerade haben. Die Doppelcurve von F_3^{8-r} ist von der Ordnung $18 - \frac{1}{2}r(13-r)$. Sie reducirt sich im Falle $r = 3$ auf eine dreifache Gerade b_1, durch welche die Ebenen der Kegelschnittschaar von F_3^5 gehen (49.). Zugleich mit F_2^4 wird die Fläche F_3^{8-r} auf der Ebene η' abgebildet (vgl. 41.); ihren ebenen Schnitten entsprechen in η' Curven fünfter Ordnung, die einen dreifachen Punkt B' und $8 + r$ einfache Punkte P' gemein haben.**)

52. Die Fläche F_3^{8-r} enthält $16 + 2r$ einfache Gerade, in welche $8 + r$ Kegelschnitte der Schaar zerfallen. Von diesen Geraden entsprechen 16 den einfachen Geraden von F_2^4, und die $2r$ übrigen den r Punkten P und den r Kegelschnitten von F_2^4 durch je einen Punkt P. Vereinzelte Kegelschnitte giebt es i. A. nicht auf F_3^{8-r}, wohl aber 2^{7+r} cubische Raumcurven, die jeden Kegelschnitt der Schaar

*) Proceedings of the London Math. Society, vol 8, p. 171. Vgl. Cremona in den Annali di Matem., Serie II, t. 5, p. 148.

**) Eine der Flächen F_3^{8-r}, nämlich F_3^8 mit einer Doppelcurve 7. O., erwähnt Caporali mit dieser ihrer Abbildung in Collectanea mat. p. 170.

und $8+r$ einfache Gerade der Fläche treffen und durch die Schaar projectiv auf einander bezogen werden. Von diesen cubischen Raumcurven werden $2^7 = 128$ auf F_2^4 dargestellt durch die 128 einzelnen Kegelschnitte (42.), welche b treffen; andere $128r$ durch cubische Raumcurven, die je einen der r Punkte P enthalten und b zweimal treffen (vgl. 40.); noch $128\frac{r(r-1)}{2}$ andere durch biquadratische Raumcurven, die je $2P$ enthalten und b dreimal treffen; endlich, wenn $r = 3$ ist, die übrigen 128 durch Raumcurven fünfter Ordnung, die alle $3P$ enthalten und b viermal treffen. Auf F_3^{8-r} liegen 2^{7+r} Schaaren rationaler biquadratischer Raumcurven und 2^{7+r} Netze von rationalen Raumcurven fünfter Ordnung, wie gleichfalls aus der Abbildung auf F_2^4 sich ergiebt, und auch diese Raumcurven werden durch die Kegelschnittschaar projectiv auf einander bezogen.

53. Die Fläche fünfter Ordnung F_3^5 insbesondere enthält eine dreifache Gerade b_1, eine K.-Schaar, deren Ebenen durch b_1 gehen, und 22 mit b_1 incidente einfache Gerade, die paarweise eilf Kegelschnitte der Schaar bilden. Auf ihr liegen $2^{10} = 1024$ cubische Raumcurven, welche jeden Kegelschnitt der Schaar und je 11 der 22 Geraden einmal, die Gerade b_1 aber zweimal treffen; ferner 2^{10} Schaaren biquadratischer Raumcurven und 2^{10} Netze von Raumcurven fünfter Ordnung, die jeden Kegelschnitt der Schaar und je 11 der 22 Geraden einmal und die Gerade b_1 drei- resp. viermal treffen. Die Fläche F_3^5 ist i. A. von der 36^{sten} Classe, und ebenso F_3^{8-r} (vgl. 35.).

54. Die Flächen F_2^4 und F_3^5 sind besondere Fälle der rationalen Fläche $(n+2)^{\text{ter}}$ Ordnung F_n^{n+2} mit einer n-fachen Geraden b und einer Kegelschnittschaar, deren Ebenen durch b gehen, und welche $3n+2$ paar einfache Gerade enthält. Auf diese Fläche wenden wir jetzt eine quadratische Transformation an, welche b zur Knotenlinie und $r = 0, 1, 2, 3$ Punkte P der Fläche zu Knotenpunkten hat. Dann verwandelt sich F_n^{n+2} in eine rationale Fläche F_{n+1}^{n+6-r}, die mit einer beliebigen Geraden $n+6-r$ Punkte gemein hat. Denn der Geraden entspricht (47.) eine cubische Raumcurve, die mit F_n^{n+2} ausser den r Punkten P und zwei n-fachen Punkten auf b nur

$$3(n+2) - r - 2n = n + 6 - r$$

Punkte gemein hat. Die ebenen Schnitte von F_{n+1}^{n+6-r} sind i. A. vom Geschlecht $n+1$. Ihnen entsprechen nämlich die Schnittlinien von F_n^{n+2} mit den Flächen des F^2-Gebüsches, also Raumcurven $(n+4)^{\text{ter}}$ Ordnung, da von der n-fachen Geraden b abzusehen ist; jede dieser Raumcurven aber hat eine Schaar von $(n+2)$-mal sie schneidenden Geraden, wird also aus ihren Punkten durch Kegel $(n+3)^{\text{ter}}$ Ordnung projicirt, die je eine $(n+1)$-fache Gerade enthalten, und ist wie diese

Kegel vom Geschlecht $n+1$. Die Fläche F_{n+1}^{n+6-r} enthält eine Kegelschnittschaar mit $3n+2+r$ paar Geraden (vgl. 52.); die Ebenen der Schaar bilden einen rationalen Büschel $(4-r)^{\text{ter}}$ Ordnung (48., 49.). Die Fläche F_{n+1}^{n+3} insbesondere hat eine $(n+1)$-fache Gerade b_1, eine K.-Schaar, deren Ebenen durch b_1 gehen, und in der Schaar $3(n+1)+2$ paar Gerade.

Jede der Flächen F_1^3, F_2^4, F_3^5, ..., F_n^{n+2}, F_{n+1}^{n+3}, ... lässt sich also durch quadratische Transformation aus der vorhergehenden ableiten, und sie alle sind rational*). Ausser ihnen aber erhalten wir für $r=0, 1, 2$ die rationalen Flächen F_n^{n+6-r}, die keine n-fache Gerade, sondern eine Doppelcurve von der Ordnung $\frac{1}{2}(n+4-r)(n+3-r)-n$ haben.

55. Noch andere rationale Flächen mit je einer Kegelschnittschaar ergeben sich durch quadratische Transformation von Flächen n^{ter} Ordnung mit zwei $(n-1)$-fachen Punkten. Von der hierher gehörigen speciellen Fläche F_2^4 vierter Ordnung (46.) wählen wir die beiden dreifachen Punkte K_1, die wir jetzt mit A und B bezeichnen, und $s=0, 1, 2, 3, 4$ einfache Punkte P zu Knotenpunkten der Transformation. Dann geht F_2^4 über in eine rationale Fläche F_3^{10-s} von der Ordnung $16-2\,.\,3-s=10-s$ (vgl. 50.), die eine K.-Schaar und darin $6+s$ paar Gerade enthält. Jedem Kegelschnitte der Schaar entspricht auf F_2^4 ein durch A und B gehender Kegelschnitt, den $6+s$ paar Geraden aber entsprechen auf F_2^4 die 6 paar Geraden durch A und B (46.) und die s Punkte P nebst den Kegelschnitten, die sie mit A und B verbinden, Die ebenen Schnitte von F_3^{10-s} sind i. A. vom Geschlecht drei; denn ihnen entsprechen die Schnittcurven 8^{ter} Ordnung von F_2^4 mit den Flächen des F^2-Gebüsches, diese Curven aber gehen je dreimal durch A und B, und werden aus A durch Kegel fünfter Ordnung projicirt, welche AB zur dreifachen Geraden haben, also vom Geschlecht drei sind. Die Fläche F_3^{10-s} hat demnach (vgl. 35.) eine Doppellinie von der Ordnung:

$$\frac{1}{2}(9-s)(8-s)-3=33-\frac{1}{2}(17-s)s.$$

56. Der Doppelgeraden AB von F_2^4 entspricht ein ausgezeichneter Doppelpunkt C_1 der Fläche F_3^{10-s}; den cubischen Tangentialkegeln ihrer dreifachen Punkte A, B entsprechen auf F_3^{10-s} zwei ebene Curven dritter Ordnung mit dem Doppelpunkt C_1 (vgl. 9.). Die Fläche F_3^{10-s} enthält ausser diesen zwei ebenen noch $32\,.\,2^s-2=2^{5+s}-2$ Raum-

*) Dass die Fläche n^{ter} Ordnung mit einer $n-2$-fachen Geraden eindeutig auf der Ebene abgebildet werden kann, hat schon Herr Noether (in diesen Annalen Bd. 3, S. 175) bewiesen.

curven dritter Ordnung. Und zwar entsprechen 30 dieser Raumcurven den 30 einzelnen Kegelschnitten auf F_2^4 durch A und B (46.), andere $32s$ den $20s$ cubischen Raumcurven durch A, B und je einen Punkt P und den $12s$ ebenen Curven dritter Ordnung durch A oder B und je einen P (46.); noch anderen $32 \cdot \frac{1}{2}s(s-1)$ entsprechen auf F_2^4 biquadratische Raumcurven durch A, B und je $2P$, die A oder B zum Doppelpunkte haben; u. s. w. Alle diese 2^{5+s} rationalen cubischen Curven auf F_3^{10-s} werden durch die K.-Schaar der Fläche projectiv so auf einander bezogen, dass sie ihre Schnittpunkte entsprechend gemein haben (vgl. 37.). Jede von ihnen trifft alle Kegelschnitte und die Hälfte der $12 + 2s$ Geraden der Fläche. Die Ebenen der K.-Schaar aber bilden einen Büschel $(6-s)^{\text{ter}}$ Ordnung; denn sie werden erzeugt durch drei der projectiven cubischen Curven, die zu zweien $3 + s$ Punkte gemein haben (vgl. 39.).

57. Wir erhalten demnach, wenn $s = 0$ 1 2 3 4,

die rationalen Flächen $(10-s)^{\text{ter}}$ Ordnung:	F_3^{10}	F_3^{9}	F_3^{8}	F_3^{7}	F_3^{6}
mit Doppelcurven von der resp. Ordnung:	33	25	18	12	7;
Anzahl ihrer einfachen Geraden:	12	14	16	18	20;
Anzahl ihrer rationalen cubischen Curven:	32	64	128	256	512;
Ordnung des Ebenenbüschels ihrer K.-Schaar:	6	5	4	3	2.

Die Zahlen der letzten drei Spalten gelten zugleich für die früher (50.) abgeleiteten Flächen F_3^{8-r} in den Fällen $r = 0, 1, 2$. Diese drei Flächen F_3^{8-r} sind etwas allgemeiner als die Flächen F_3^{10-s} für $s = 2, 3, 4$; denn unter ihren 2^{7+r} rationalen cubischen Curven kommen i. A. keine ebenen vor, wie bei F_3^{10-s}. Für $r = 3$ kommt hinzu die Fläche fünfter Ordnung F_3^5 mit einer dreifachen und 22 einfachen Geraden (53.).

Projiciren wir die Fläche F_2^4 aus ihrem dreifachen Punkte A auf eine Ebene η', so wird zugleich mit ihr die Fläche F_3^{10-s} auf η' abgebildet. Den ebenen Schnitten von F_3^{10-s} entsprechen in η' Curven fünfter Ordnung, die einen dreifachen Punkt B' und $6 + s$ einfache Punkte P' gemein haben (55.); und zwar sind B' und s der Punkte P' die Projectionen von B und den s Knotenpunkten P, und die übrigen $6P'$ sind die Spuren der 6 einfachen Geraden von F_2^4, die durch A gehen (46.).

58. Wie aus der speciellen F_2^4 die Fläche F_3^{10-s}, so kann aus einer Fläche n^{ter} Ordnung F_{n-2}^n mit zwei $(n-1)$-fachen Punkten A, B eine rationale Fläche $(2n + 2 - s)^{\text{ter}}$ Ordnung abgeleitet werden $(s = 0, 1, 2, 3, 4)$, die eine Kegelschnittschaar und darin $2(n-1) + s$ paar Gerade enthält, und deren ebene Schnitte i. A. vom Geschlecht $n - 1$ sind. Diese Fläche lässt sich durch Projection von F_{n-2}^n aus dem Punkte A so auf der Ebene η' abbilden, dass ihre ebenen Schnitte

dargestellt werden durch Curven $(n+1)^{ter}$ Ordnung, die einen $(n-1)$-fachen Punkt B' und $2(n-1)+s$ einfache Punkte P' gemein haben. Die Fläche hat einen $n-2$-fachen Punkt C_1, welcher der Geraden AB entspricht, und enthält 2^{2n-3+s} rationale Curven $(n-1)^{ter}$ Ordnung, darunter zwei ebene Curven, die C_1 zum $(n-2)$-fachen Punkte haben. Durch die K.-Schaar der Fläche werden diese rationalen Curven projectiv auf einander bezogen. Die Ebenen der Schaar bilden einen Büschel $(n+2-s)^{ter}$ Ordnung.

Mit dem F^2-Gebüsch sind auch alle von uns abgeleiteten rationalen Flächen der synthetischen Geometrie zugänglich, da die projective Beziehung des Gebüsches auf den Ebenenraum und damit die quadratische Transformation rein geometrisch hergestellt werden kann.

Strassburg, den 4. Mai 1896.

Ueber ebene einfache Fachwerke.

Von

Friedrich Schur in Aachen.

Nach dem Referate, das Henneberg im 3. Bande der Berichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung (1892—1893)*) gegeben hat, könnte eine ausführlichere Abhandlung über ebene einfache Fachwerke überflüssig erscheinen. Die folgenden Untersuchungen werden indessen zeigen, dass dem Verfasser, der diese Theorie einer erneuten Durcharbeitung unterzog, noch viel zu thun übrig blieb. Für den Theoretiker ist ja das Spannungsproblem, um das es sich hier handelt, nämlich die unter dem Einflusse äusserer in den Knotenpunkten eines einfachen und stabilen Fachwerks angreifender Kräfte in den Stäben des Fachwerks entstehenden Spannungen zu bestimmen, in gewissem Sinne dadurch vollkommen erledigt, dass es auf die Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen mit nicht verschwindender Determinante zurückgeführt ist. Eine solche Lösung des Problems ist aber in den allermeisten Fällen praktisch gänzlich unbrauchbar; hier wird es sich vielmehr darum handeln, graphische Methoden zu finden, welche die Spannungen in übersichtlicher und dem Gedächtnisse sich leicht einprägender Weise zu construiren gestatten. Eine Methode, die diesen Anforderungen genügt und zugleich in jedem Falle anwendbar wäre, war aber bisher nicht bekannt. Denn wenn auch die Methode von Henneberg**) in keinem Falle versagen kann, so dürfte man doch schwerlich behaupten können, dass sie der obigen Forderung genügt. Uebersichtlicher gestaltet sich schon die Construction der Spannungen nach der Methode von Müller-Breslau***), von der allerdings erst durch

*) a. a. O. S. 568—596, wo man sich auch bezüglich der Litteratur über dieses Gebiet vollständig informiren kann.

**) Henneberg, Statik der starren Systeme S. 228 ff. Darmstadt 1886 und a. a. O. S. 586 ff.

***) Müller-Breslau, Beitrag zur Theorie des ebenen Fachwerks, Schweizer Bauzeitung 1887, S. 121, sowie Müller-Breslau, die graphische Statik der Bauconstructionen, II. Aufl. Bd. I, S. 206. Leipzig 1887.

die folgenden Untersuchungen gezeigt wird, dass sie in jedem Falle anwendbar ist. Sie gestattet wenigstens die Spannung jedes einzelnen Stabes für sich zu bestimmen ohne Kenntniss der übrigen Spannungen, während man nach Henneberg immer die Spannungen mehrerer Stäbe zugleich zu finden hat. Das ist allerdings nicht immer ein Nachtheil, da es häufig gerade darauf ankommen wird, die Spannungen in allen Stäben zu kennen. Das kann aber in wirklich übersichtlicher Weise nur erreicht werden nach einer Methode, welche die Spannungen in jedem Falle in einem sogenannten Cremona'schen Kräfteplane*) anzuordnen lehrt. Erwägen wir nämlich, dass hierbei das Spannungsproblem für ein gegebenes Fachwerk auf ein solches für ein Fachwerk mit einem Knotenpunkte weniger durch Zerlegung der in dem fortzulassenden Knotenpunkte angreifenden Kraft nach den durch ihn gehenden Stäben zurückzuführen ist, so wird es offenbar darauf ankommen, diese Zerlegung so vornehmen zu können, dass das Polygon der äusseren Kräfte für das neue Fachwerk sich unmittelbar aus dem Zerlegungsprocesse ergiebt und nicht erst durch neue Constructionen gefunden zu werden braucht. Das wird aber gerade durch einen Kräfteplan erreicht, und für den Praktiker Taylor, der zuerst Kräftepläne zeichnete, ist dieses Princip gewiss maassgebend gewesen.

Was aber die Möglichkeit betrifft die Stabkräfte irgend eines einfachen stabilen Fachwerks bei beliebiger Annahme der äusseren Kräfte in einen Kräfteplan zu ordnen, so sind alle bisherigen Untersuchungen hierüber durchaus unzulänglich. Besonders gilt dies von den Untersuchungen, welche Maurice Lévy**) in der ersten Auflage seiner Statique graphique veröffentlicht hat; es handelt sich dort grösstentheils um Scheinbeweise. Es wird nicht nöthig sein, dies im Einzelnen zu belegen, da M. Lévy in der zweiten Auflage seines Werkes jenes Capitel fortgelassen hat. Den ersten ernsthaften Versuch, die Bedingungen für die Existenz eines Kräfteplanes aufzustellen, hat Petersen***) in seinem Lehrbuch der Statik gemacht. Er ist allerdings zu keinem brauchbaren Resultate gekommen. Wohl im Anschlusse hieran hat Grübler†) einige Sätze über die Zerlegung eines Fachwerks

*) Man vergleiche hierzu besonders die folgende Schrift: Les figures réciproques en statique graphique par Luigi Cremona, ouvrage précédé d'une introduction de G. Jung et suivi d'un appendice extrait des Mémoires et des cours du statique graphique de Saviotti. Traduit par L. Bossut. Paris 1885. In dieser Schrift findet man weiteres litterarisches Material zur Theorie des Fachwerks, besonders das Wesentliche dessen, was über Kräftepläne veröffentlicht wurde.

**) a. a. O. S. 28—53, Paris 1874.

***) Petersen, Lehrbuch der Statik fester Körper, S. 151 ff. Kopenhagen 1882. S. auch die Anmerkungen auf S. 173, 180 und 182.

†) Grübler, Beitrag zur Theorie des ebenen einfachen Fachwerks, Rigaische Industrie-Zeitung 1887. Nr. 4 u. 5, II. S. auch die Anmerkungen auf S. 169 u. 181.

in Polygone aufgestellt, die, so weit sie überhaupt richtig sind, mit einer Ausnahme für die Frage nach der Existenz eines Kräfteplanes nicht von Belang sind.

Noch mehr als das Fehlen der Aufstellung von exacten und brauchbaren Kriterien für die Existenz eines Kräfteplanes fällt der Umstand ins Gewicht, dass es noch nicht gelungen war, in jedem Falle der Existenz den Kräfteplan auch wirklich zu construiren, d. h. die Construction des Kräfteplanes zur Ermittelung der Spannungen zu benutzen; denn gerade hierin besteht die Stärke der Cremona'schen Methode in den Fällen der Praxis. Zwar hat Saviotti*) einige neue Regeln angegeben, die eine solche Construction in bisher unzulänglichen Fällen auszuführen erlaubten, und zugleich durch Einführung der sogenannten idealen Knotenpunkte die Aussicht eröffnet, die Aufstellung eines Kräfteplanes unter geeigneter Modification der ursprünglichen Forderung in jedem Falle möglich erscheinen zu lassen**). Dass aber diese Aussicht keine trügerische ist, und dass jene Regeln stets zum Ziele führen, das konnte erst auf Grund eines tieferen Eindringens in die Natur eines zu einem einfachen, stabilen Fachwerks gehörigen Kräfteplanes erkannt werden, wie es der Verfasser im Folgenden versucht hat.

Um auch für diejenigen Leser verständlich zu sein, welche über unser zwar der Statik entlehnte, aber schliesslich doch geometrische Problem nicht hinreichend orientirt sind, habe ich in dem Folgenden eine vollständige und voraussetzungslose Theorie der ebenen, einfachen Fachwerke auf neuer Grundlage gegeben. Ich habe mich dabei überall rein geometrischer Methoden bedient, weil dies einmal dem graphischen Ziele dieser Abhandlung besser entspricht, und sich andrerseits bei analytischer Behandlungsweise wegen der Unsymmetrie der betreffenden Gleichungen und der Nothwendigkeit auch besondere Lagen des Coordinatensystems zu berücksichtigen keine Vereinfachung ergiebt.

Als Angelpunkt unserer Untersuchungen dient der zwar nahe liegende, aber in dieser Form bisher noch nicht ausgesprochene Satz, dass ein Fachwerk stabil ist oder nicht, je nachdem es durch seine Gliederung und die Richtungen seiner Stäbe seiner Form nach vollständig bestimmt ist oder nicht. Ebenso werden fast alle in Betracht kommenden Aufgaben zurückgeführt auf die Fundamentalaufgabe: „Ein einfaches, stabiles Fachwerk zu construiren, von dem die Gliederung und die Richtungen der Stäbe gegeben sind". Die Lösung dieser Fundamentalaufgabe löst zugleich das Spannungsproblem nach verschiedenen Methoden. Erstens nach einer Modification der Henneberg'schen Methode, die zugleich zum Beweise des Satzes benutzt wird, dass jedes

*) l. c. Appendice par Saviotti p. 65—69.

**) Man vergl. hierzu die Schrift des Verfassers: Ueber die reciproken Figuren der graphischen Statik, Zeitschrift für Math. u. Physik. 40. Jahrg. 1895, S. 52.

einfache, stabile Fachwerk auch statisch bestimmt sei. Die Modification besteht darin, dass wir die Bestimmung der Kräfte, von deren Kenntniss die Lösung des Problems für das Fachwerk mit einem Knotenpunkte weniger abhängt, ohne die Henneberg'sche Voraussetzung ausführen, dass das niedere Problem bei jeder Annahme der äusseren Kräfte gelöst sei. Gerade diese Behandlung lässt leicht erkennen, wann das Problem unlösbar wird.

Zweitens zeigt die vollständige Lösung der Fundamentalaufgabe, dass die Methode von Müller-Breslau stets zum Ziele führt, endlich aber hat sie den Verfasser auf eine neue stets anwendbare Methode geführt. Wie die Methode von Müller-Breslau in dem besonderen Falle, dass das Fachwerk durch Angliederung eines einfachen stabilen Fachwerks an ein anderes entstanden ist, in die längst bekannte von Ritter übergeht, so geht die Methode des Verfassers in diesem Falle in die Culmann'sche über und gestattet dem entsprechend auch eine einfachere graphische Ausführung als diejenige von Müller-Breslau.

Um nun zu einer entsprechenden Erweiterung der Cremona'schen Methode zu kommen, haben wir zuerst der allgemeinen Idee eines Kräfteplanes, wie sie aus dem einfachsten Falle der Dreiecksnetze erwachsen ist, in folgerichtiger Entwickelung diejenige Bestimmtheit gegeben, welche die Aufstellung der nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines Kräfteplanes erfordert. Hierzu bedurfte es scharfer Begriffsbestimmungen und der Entwickelung der wesentlichen Eigenschaften von sogenannten Zerlegungen eines Fachwerks in einfache Polygone. Der Verfasser will keineswegs behaupten, dass die betreffenden Sätze alle durchaus neu seien, er vermuthet vielmehr, dass sie in anderer Form, als Sätze über Polyeder höherer Art schon irgendwo ausgesprochen seien. Es ist dem Verfasser nicht gelungen in der Litteratur über Polyeder oder Analysis situs bestimmte Sätze zu finden, aus denen die für den vorliegenden Zweck nöthigen Sätze sich leicht herleiten liessen, er hat es daher vorgezogen sie besonders abzuleiten, er wird aber für jeden darauf bezüglichen genauen Hinweis dankbar sein. Wir kamen so zu dem Resultate, dass jede zu einem Kräfteplane führende Zerlegung eines einfachen, stabilen Fachwerks auf diejenige Zerlegung eines gleich gegliederten Fachwerks zurückgeführt werden kann, welche in der schlichten Zerlegung des von ihm überdeckten Theiles der Ebene unmittelbar vorliegt, also auf diejenige Art der Zerlegung, die bisher ausschliesslich angewendet wurde und schliesslich auch die einzige ist, an deren praktische Anwendung ernsthaft gedacht werden kann.

Die Einführung gewisser idealer Knotenpunkte und Stäbe gestattet so das Spannungsproblem für jedes einfache, stabile Fachwerk und bei jeder Annahme der äusseren Kräfte, welcher Punkt bisher ganz ausser

Acht gelassen war, in übersichtlicher Weise mit Hülfe eines Kräfteplanes zu lösen. Die wirkliche Construction des Kräfteplanes ist hierbei ebenfalls in der Lösung der Fundamentalaufgabe enthalten, insofern der um das Kräftepolygon und die Seilstrahlen erweiterte Kräfteplan als ein stabiles Fachwerk nachgewiesen wird, das zwei Stäbe mehr besitzt, als zu seiner Stabilität nothwendig und hinreichend sind.

Im letzten Paragraphen wurden die Beziehungen der beiden reciproken Figuren des Fachwerks und des zugehörigen Kräfteplanes zum Nullsysteme in erschöpfender Weise behandelt, vor allem wurde gezeigt, was bisher wohl nicht scharf genug hervorgehoben worden ist, dass jene Figuren in jedem Falle als Parallelprojectionen zweier in Beziehung auf ein Nullsystem reciproker Polyeder angesehen werden können; von dem einen dieser Polyeder wurde zugleich eine von der Kenntniss des Kräfteplanes unabhängige Construction gegeben.

So hoffen wir, durch diese Inhaltsangabe gezeigt zu haben, dass die vorliegende Schrift nicht überflüssig sei.

§ 1.

Ueber die Stabilität eines Fachwerkes.

Ein Fachwerk besteht aus s Stäben, welche um k Knotenpunkte $P_1, P_2, \ldots, P_k$ drehbar so mit einander verbunden sind, dass eine starre oder stabile Scheibe entsteht; die Stäbe werden in unseren Betrachtungen durch geradlinige Strecken, die Stabachsen, zu ersetzen sein. Will man ein gegebenes Fachwerk beschreiben, so muss zunächst bekannt sein, welche Knotenpunkte mit einander durch Stäbe verbunden sind; die hierzu dienenden Angaben wollen wir *die Gliederung des Fachwerks* nennen. Falls s nicht den Maximalwerth $\frac{k(k-1)}{2}$ hat, kann diese Gliederung für gegebene Knotenpunkte ja noch eine mannigfaltige sein. Selbst wenn zwei Fachwerke dieselbe Anzahl von Knotenpunkten und Stäben besitzen, kann ihre Gliederung noch verschieden sein, wie aus dem Beispiele zweier Fachwerke mit sechs Knotenpunkten und neun Stäben hervorgeht; dies kann entweder aus den sechs Seiten zweier Dreiecke und drei deren Ecken verbindenden Stäben bestehen oder aus den sechs Seiten eines Sechsecks und den drei Diagonalen desselben (s. Fig. 1).

Um aber auch *die Form eines stabilen Fachwerks* beschreiben zu können, wird sich die Kenntniss der *Richtungen der Stäbe* als ausreichend erweisen. Die sich hieran knüpfenden Kriterien der Stabilität eines Fachwerks finden wir am schnellsten aus einigen einfachen Sätzen der Bewegungslehre, an die wir zunächst erinnern wollen. Ist irgend ein Punktsystem der Ebene in dieser in Bewegung begriffen, so wollen

wir den Endpunkt P' derjenigen Strecke PP', welche die momentane Geschwindigkeit jedes Punktes P darstellt, aber in einer im Sinne des Uhrzeigers um einen rechten Winkel gegen die Bewegungsrichtung gedrehten Richtung, den *Geschwindigkeitspol* von P nennen. Da nun die momentane Bewegung jeder starren Scheibe entweder als eine Rotation oder als eine Translation betrachtet werden kann, die momentanen Geschwindigkeiten aller Punkte der Scheibe also entweder senkrecht zu den Strahlen nach dem momentanen Drehpol stehen und diesen proportional sind oder aber alle gleich und gleich gerichtet sind, so gilt der folgende Satz:

1. *Die Figur der Geschwindigkeitspole einer irgendwie bewegten starren Scheibe ist in jedem Momente der Scheibe selbst ähnlich und mit ihr in Bezug auf den momentanen Drehpol ähnlich gelegen**).

Soll also die momentane Bewegung einer Scheibe beschrieben werden, so genügt es offenbar, die Geschwindigkeitspole P_1' und P_2' zweier Punkte P_1 und P_2 so anzunehmen, dass sie auf einer Parallelen zu P_1P_2 liegen. Handelt es sich umgekehrt um ein aus mehreren Scheiben, die durch Gelenke mit einander verbunden sind, bestehendes System, so wird dasselbe offenbar starr sein oder nicht, je nachdem jede momentane Bewegung desselben durch die Annahme der Geschwindigkeitspole P_1' und P_2' zweier Punkte P_1 und P_2 des Systems, wo $P_1'P_2' \parallel P_1P_2$ ist, eindeutig bestimmt ist oder nicht. Denn die dem gegebenen Systeme ähnliche und in Beziehung auf den Punkt $D \equiv (P_1P_1', P_2P_2')$ ähnlich gelegene Figur, in welcher den Punkten P_1 und P_2 die Punkte P_1' und P_2' entsprechen, kann sicher als die Figur der Geschwindigkeitspole einer möglichen Bewegung des Systems betrachtet werden. Soll es also nur eine solche Figur geben, in der die Geschwindigkeitspole von P_1 und P_2 bekannt sind, so ist sie die gesuchte; das System kann also nur als starre Scheibe eine momentane Rotation oder Translation ausführen, ist also stabil. Wir erhalten daher den Satz:

2. *Eine aus mehreren Scheiben, welche durch Gelenke mit einander verbunden sind, bestehendes System, ist starr oder nicht, je nachdem die jeder momentanen Bewegung desselben entsprechende Figur der Geschwindigkeitspole durch die dem entsprechende Annahme der Geschwindigkeitspole von zwei Punkten des Systems eindeutig bestimmt ist oder nicht.*

Wenden wir diese Sätze auf ein Fachwerk an, in welchem wir ja jeden Stab als eine Scheibe betrachten können, so ergiebt sich zunächst der folgende Satz:

3. *Die Figur der Geschwindigkeitspole eines irgendwie bewegten Fachwerks ist in jedem Momente ein Fachwerk von derselben Gliederung*

*) Vgl. Müller-Breslau, Graphische Statik u. s. w. S. 203, auch Burmester, Lehrbuch der Kinematik, S. 23, Leipzig 1888.

und mit entsprechenden Stäben gleicher Richtung; und es kann umgekehrt jedes solche Fachwerk als die Figur der Geschwindigkeitspole einer dadurch bestimmten Bewegung des ersten Fachwerks betrachtet werden.

Das Letzte folgt daraus, dass die dadurch bestimmte Bewegung jedes Knotenpunktes mit derjenigen jedes ihn enthaltenden Stabes vereinbar ist. Hiermit nimmt Satz 2 die folgende Form an:

4. *Ein Fachwerk ist stabil oder nicht, je nachdem es durch seine Gliederung, die Richtungen seiner Stäbe und die diesen Bedingungen entsprechende Annahme der Endpunkte eines Stabes eindeutig bestimmt ist oder nicht.**).

Das aus zwei stabilen Fachwerken, die durch drei Stäbe mit einander verbunden sind, zusammengesetzte Fachwerk liefert uns das einfachste *Beispiel* für diesen Satz. Gehen nämlich die drei Verbindungsstäbe durch einen Punkt, so kann man ein zweites Fachwerk von derselben Gliederung und mit entsprechenden Stäben gleicher Richtung aus einem der beiden Theilfachwerke und einem andern zusammensetzen, welches dem zweiten ähnlich ist und mit ihm in Beziehung auf jenen Punkt ähnlich liegt, während die Lage der Verbindungsstäbe dieselbe bleibt. Man kann in diesem Falle auch leicht direct sehen, dass der eine Theil gegen den andern um den Schnittpunkt der drei Verbindungsstäbe eine unendlich kleine Drehung ausführen kann, bei welcher die Längen der Verbindungsstäbe sich nur um unendlich kleine Grössen höherer Ordnung ändern. Sind die drei Verbindungsstäbe einander parallel und gleich, so ist offenbar auch eine endliche Bewegung des einen Theiles gegen den anderen möglich.

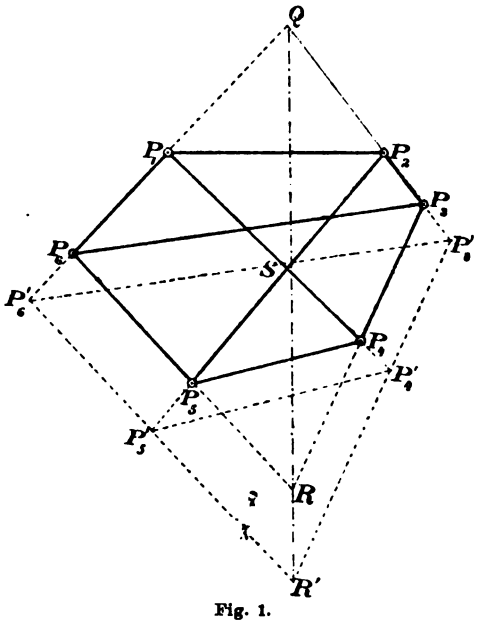


Fig. 1.

Ein zweites Beispiel**) liefert das Sechsseit

$$P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$$

(s. Fig. 1) nebst den Diagonalen $P_1 P_4$, $P_2 P_5$, $P_3 P_6$. Denken wir uns P_1 und P_2 fest und nehmen P_3' beliebig auf $P_2 P_3$ an,

*) Diesem Satze kommt am nächsten Müller-Breslau. Man vergl. den o. a. Bericht von Henneberg S. 596.

**) Hierzu vergl. man z. B. Müller-Breslau, a. a. O. S. 208 ff.

so ist auch P_4' auf P_1P_4 durch die Parallele durch P_3' zu P_3P_4 bestimmt, ebenso P_6' auf P_1P_6 durch die Parallele durch P_3' zu P_3P_6, endlich P_5' auf P_2P_5 durch die Parallele durch P_6' zu P_6P_5, und es frägt sich, ob dann auch $P_4'P_5'$ parallel zu P_4P_5 sein wird, wenn P_3' von P_3 verschieden war. Da bei der Bewegung von P_3' alle diese Punkte ähnliche Punktreihen beschreiben, so würde, wenn $P_4'P_5'$ einmal parallel zu P_4P_5 wäre, es ihm stets parallel bleiben. Nun ist der Ort der Schnittpunkte $R' = (P_6'P_5', P_3'P_4')$ eine Gerade, da diese Geraden auf RR' ähnliche Punktreihen ausschneiden, die zwei Elemente entsprechend gemein haben. Diese Gerade RR' geht nun sicher durch den Punkt $Q = (P_1P_6, P_2P_3)$, weil $P_3'P_6'$ stets parallel zu P_3P_6 ist. Wäre daher auch $P_4'P_5'$ stets parallel zu P_4P_5, so ginge die Gerade $RR' = RQ$ auch durch den Punkt $S = (P_5P_2, P_4P_1)$, d. h. das Sechseck $P_6P_5P_2P_3P_4P_1$ wäre ein Pascal'sches, oder die sechs Knotenpunkte des Fachwerkes liegen auf einem Kegelschnitte. Weiss man umgekehrt, dass dies der Fall ist, dass also Q, R, S in einer Geraden liegen, so wären die Punktreihen (P_4') und (P_5') perspectiv, es wäre also $P_4'P_5'$ stets parallel zu P_4P_5, das Fachwerk kann folglich nicht stabil sein. *Unser Fachwerk ist also instabil oder stabil, je nachdem seine sechs Knotenpunkte auf einem Kegelschnitte liegen oder nicht.*

Ist nun die Stabilität eines Fachwerks in gegebenem Falle festgestellt, so wird die weitere Frage nach dem Grade der Beweglichkeit desjenigen Fachwerks entstehen, welches aus dem gegebenen durch Entfernung eines Stabes hervorgeht. In dieser Beziehung wird uns der folgende Satz später gute Dienste leisten:

5. *Wird ein stabiles Fachwerk bei Entfernung eines Stabes instabil, so besitzt das neue Fachwerk nur einen Grad der Beweglichkeit, oder es giebt nur einfach unendlich viele Fachwerke, welche mit dem gegebenen die Gliederung, die Richtungen der entsprechenden Stäbe bis auf die des fortgelassenen Stabes und die Endpunkte eines Stabes gemein haben; die Knotenpunkte aller dieser Fachwerke beschreiben hierbei, so weit sie überhaupt beweglich sind, gerade ähnliche Punktreihen.*

Ist nämlich PQ (s. Fig. 2) der fortgelassene Stab und QR ein anderer Stab durch Q, und soll dann das Fachwerk bei Festhaltung von QR beweglich sein, so seien etwa P', S', T', U', V'... die Geschwindigkeitspole von P, S, T, U, V, ...; sie sind ja die Knotenpunkte eines der unendlich vielen im Satze gemeinten Fachwerke. Nehmen wir nämlich die Punkte P'', S'', T'', U'', V'', ... so auf den Geraden PP', SS', TT',... an, dass $PP'P'' \sim SS'S'' \sim TT'T'' \sim$..., wo natürlich T'' mit T zusammenfällt, falls dasselbe von T' gilt, so sind auch diese Punkte die Knotenpunkte eines Fachwerks derselben Art. Es ist nun leicht zu zeigen, dass es ausserhalb dieser Schaar keine andern Fachwerke derselben Art geben kann, welche den Stab

QR enthalten. Zunächst wolle man bemerken, dass P' niemals auf PQ liegen darf, weil sonst das ursprüngliche Fachwerk nach Satz 4 nicht stabil wäre, es müsste denn P' mit P, S' mit S u. s. w. zusammenfallen, was wieder unserer Voraussetzung widerspricht, dass $P', S', T', \ldots$

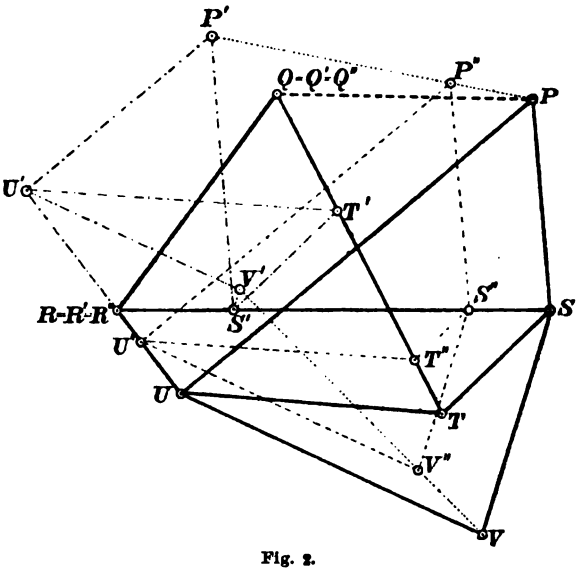


Fig. 2.

die Geschwindigkeitspole von $P, S, T, \ldots$ für eine wirkliche Bewegung des Fachwerks seien. Nehmen wir nunmehr an, es gebe ausserhalb der obigen Schaar noch ein Fachwerk $P_1, Q, R, S_1, T_1, \ldots$ von derselben Art, so gilt dasselbe auch von dem Fachwerke $P_2, Q, R, S_2, T_2, \ldots$, wo die Punkte $P_2, S_2, T_2, \ldots$ wieder auf den Geraden $P''P_1$, $S''S_1$, $T''T_1, \ldots$ so angenommen sind, dass $P''P_1P_2 \sim S''S_1S_2 \sim P''T_1T_2 \sim \ldots$ sind. Denn ist z. B. ST ein Stab des ursprünglichen Fachwerks, so ist $S''T''$ und S_1T_1 parallel zu ST, also auch S_2T_2. Da hierbei der Punkt P_2 auf der Geraden $P''P_1$ ganz beliebig angenommen werden könnte, ebenso wie P'' auf PP', so würde P_2 auch ein beliebiger Punkt von PQ sein können, es müsste denn P_1 auf PP' liegen, in welchem Falle wir P_2 nach P verlegen könnten. Dann dürften aber nicht gleichzeitig $S_2, T_2, U_2, \ldots$ nach $S, T, U, \ldots$ fallen, weil sonst das Fachwerk $P_1, Q, R, S_1, T_1, U_1, \ldots$ unserer obigen Schaar angehören würde. Würden wir also voraussetzen, dass dies nicht der Fall sei, so könnten wir jedenfalls ein von dem gegebenen Fachwerke verschiedenes Fachwerk finden, das mit ihm die Gliederung, die Richtungen *aller* entsprechenden Stäbe und den Stab QR gemein hätte, das gegebene Fachwerk wäre also nicht stabil. Hiermit ist unser Satz bei Festhaltung des Stabes QR bewiesen, welcher mit dem fort-

gelassenen Stabe PQ einen Endpunkt gemein hat. Hieraus ergiebt er sich aber leicht für den Fall, dass irgend ein anderer Stab UV festgehalten wird. Denn jedes Fachwerk, das mit dem gegebenen die Gliederung, die Richtungen entsprechender Stäbe bis auf diejenige von PQ und den Stab UV gemein hat, muss aus einem Fachwerke $P'', Q, R, S'', T'', U'', V'', \ldots$ obiger Schaar durch die Aehnlichkeitstransformation entstehen, bei welcher $U''V'' \sim UV$, den Punkten Q, R also zwei Punkte Q_I, R_I entsprechen, wie auch das Umgekehrte der Fall ist. Gäbe es also bei Festhaltung von UV mehr als einfach unendlich viele Fachwerke der eben beschriebenen Art, so müsste dasselbe auch bei Festhaltung von QR gelten. Hiermit ist also unser Satz in seinem vollen Umfange bewiesen.

Alle die Fachwerke unserer obigen Schaar sind offenbar die Figuren der Geschwindigkeitspole für die Bewegungen des Fachwerks, welche bei Fortlassung von PQ und Festhaltung von QR noch möglich sind. Alle diese momentanen Bewegungen unterscheiden sich aber nur durch das Maass der Geschwindigkeit, da bei allen jeder Stab denselben momentanen Drehpol besitzt; desshalb besitzt das Fachwerk nur einen Grad der Beweglichkeit.

Unser Satz lehrt uns, dass die Richtung *eines* Stabes eines stabilen Fachwerks, durch dessen Entfernung das Fachwerk instabil wird, beliebig abgeändert werden kann, ohne dass das neue Fachwerk aufhört stabil zu sein. Hieraus geht hervor, dass die Instabilität eines Fachwerks schon durch die Richtungen von weniger als s Stäben bedingt sein muss. Wir gehen auf diese interessante Frage hier nicht näher ein, da sie für das Folgende ohne Belang ist.

§ 2.

Die Bildungsgesetze der einfachen stabilen Fachwerke.

Das einfache Beispiel eines Vierseits mit seinen zwei Diagonalen lehrt, dass ein stabiles Fachwerk mehr Stäbe besitzen kann, als zu seiner Stabilität unbedingt nothwendig sind. Da die Spannungen in einem solchen Fachwerke, wie wir später sehen werden, sich nicht mehr auf Grund der blossen Sätze der Statik starrer Körper bestimmen lassen, so schliessen wir sie von unserer Betrachtung aus und beschränken uns auf die sogenannten einfachen stabilen Fachwerke, welche folgendermassen zu definiren sind: *Ein stabiles Fachwerk heisst einfach, wenn seine Stabilität durch Fortnahme jedes einzelnen Stabes aufgehoben werden kann.*

Für solche einfachen stabilen Fachwerke gilt nun zunächst der folgende Satz:

6. *Laufen durch einen Knotenpunkt P eines einfachen stabilen*

*Fachwerks mehr als zwei Stäbe, so kann man nach Fortlassung eines durch P laufenden Stabes stets einen nicht durch P laufenden Stab so einfügen, dass das Fachwerk stabil und einfach bleibt, vorausgesetzt dass die übrigen durch P laufenden Stäbe nicht gleiche Richtung haben oder nicht alle übrigen Knotenpunkte in einer Geraden liegen**).

Ist wie im vorigen Paragraphen PQ der fortgelassene, QR der festgehaltene und etwa ST der einzufügende Stab, so brauchen wir nach Satz 5 nur eins der Fachwerke $P'QRS'T'U'V', \ldots$ zu untersuchen, das mit dem gegebenen Fachwerke $PQRSTUV \ldots$ die Gliederung, die Richtungen entsprechender Stäbe bis auf die von PQ und den Stab QR gemein hat; denn je nachdem $S'T'$ parallel zu ST ist oder nicht, muss nach diesem Satze für jedes denselben Bedingungen genügende Fachwerk die ST entsprechende Strecke ihr parallel sein oder nicht, wird folglich nach Satz 4 das durch Einfügung des Stabes ST entstehende Fachwerk stabil sein oder nicht. Irgend ein solches Fachwerk $P'QRS'T'U'V' \ldots$ muss aber als Figur der Geschwindigkeitspole einer nach Fortlassung von PQ und Festhaltung von QR möglichen Bewegung des ursprünglichen Fachwerks existiren, weil dieses sonst nicht einfach wäre; wie wir es in jedem Falle wirklich construiren können, werden wir sehr bald sehen.

Es ist nunmehr leicht zu sehen, dass nicht alle Verbindungslinien je zweier der Punkte $QRS'T'U'V' \ldots$ den Verbindungslinien der entsprechenden Punkte $QRSTUV \ldots$ parallel sein könneu, weil sonst die erste Figur der zweiten ähnlich, also mit ihr zusammenfallen müsste, es müssten denn alle diese Punkte in einer Geraden liegen. Gehen daher durch P ausser PQ noch mindestens zwei Stäbe, welche nicht dieselbe Richtung haben, so müsste auch P' mit P zusammenfallen gegen die Voraussetzung. Es muss also sicher möglich sein, nach Fortlassung von PQ einen Stab ST so einzufügen, dass das neue Fachwerk wieder stabil ist. Es muss aber auch einfach sein. Würde nämlich dieses Fachwerk bei Fortlassung etwa des Stabes UV noch stabil bleiben, so kann es nach weiterer Fortlassung von ST — und da wird es sicher instabil — und Festhaltung von QR wegen des Satzes 5 nur denjenigen Grad der Beweglichkeit haben, wie er durch die Figur der Geschwindigkeitspole $P'S'T'U'V' \ldots$ charakterisirt ist, es würde also wieder stabil werden, falls PQ eingefügt würde. Daraus aber würde folgen, dass das ursprüngliche Fachwerk auch bei Fortlassung von UV noch stabil bliebe gegen die Voraussetzung dass es einfach sein sollte. Es muss folglich das durch Fortlassung von PQ und Einfügung von ST entstehende stabile Fachwerk einfach sein, unser Satz ist also vollständig bewiesen.

*) Wegen der letzten Ausnahme des Satzes vergl. man den o. a. Bericht Hennebergs S. 582.

Haben wir nunmehr ein einfaches, stabiles Fachwerk mit k Knotenpunkten und s Stäben, welches einen Knotenpunkt P besitzt, in dem nur zwei Stäbe zusammenlaufen, so wird nach Ablösung desselben offenbar ein einfaches, stabiles Fachwerk mit $k-1$ Knotenpunkten und $s-2$ Stäben entstehen; denn wäre dies Fachwerk nicht stabil und nicht zugleich auch einfach, so würde dasselbe von dem ersten Fachwerke gelten. Besitzt aber das gegebene Fachwerk keinen Knotenpunkt mit nur zwei Stäben, so sei P einer der Knotenpunkte, in welchem die geringste Anzahl von Stäben zusammenläuft. Dann können wir nach Satz 6 einen solchen Stab fortlassen und einen nicht durch P laufenden Stab so einfügen, dass wieder ein einfaches, stabiles Fachwerk entsteht. Die von P ausgehenden Stäbe können nämlich nicht sämmtlich gleiche Richtung haben, weil sonst P ohne Aenderung der Richtung dieser Stäbe in ihnen beliebig verschoben werden könnte, das Fachwerk also nicht stabil wäre; man braucht daher immer nur einen solchen Stab fortzulassen, dass durch P noch ein anderer Stab verschiedener Richtung geht. Im zweiten Ausnahmefalle des Satzes 6 müssen ja immer zweistäbige Knotenpunkte vorhanden sein. Mit dem so entstehenden Fachwerke können wir nun, falls durch P immer noch mehr als zwei Stäbe laufen, ebenso verfahren, bis ein Fachwerk entsteht, das in P nur noch zwei Stäbe hat. Giebt es also ein einfaches stabiles Fachwerk mit k Knotenpunkten und s Stäben, so giebt es stets ein solches mit $k-1$ Knotenpunkten und $s-2$ Stäben. Dieses Verfahren kann man so oft anwenden, bis man ein Fachwerk mit nur drei Knotenpunkten, also auch drei Stäben enthält; es ist folglich:

$$s - 2(k-3) = 3 \quad \text{oder} \quad s = 2k - 3.$$

Wir haben also den Satz:

7. *In einem einfachen stabilen Fachwerke ist die Anzahl der Stäbe gleich der doppelten Anzahl der Knotenpunkte vermindert um drei.*

Es bedarf hier kaum des Hinweises, dass diese Bedingung zwar nothwendig, aber nicht hinreichend für die Stabilität des Fachwerks ist, die vielmehr immer in Satz 4 zu suchen ist. Wohl aber ist die Bedingung $s = 2k - 3$ für die Einfachheit des Fachwerks hinreichend, falls seine Stabilität festgestellt ist, weil eben das Fachwerk nicht stabil sein kann, wenn $s < 2k - 3$ ist.

Aus unserem Satze ergiebt sich sofort der folgende:

8. *Ein einfaches stabiles Fachwerk besitzt mindestens einen Knotenpunkt, in welchem höchstens drei Stäbe zusammenlaufen**).

Denn liefen in allen k Knotenpunkten mindestens 4 Stäbe zusammen, so wäre die Anzahl der Stäbe mindestens $\frac{4k}{2} = 2k$, was unmög-

*) S. Henneberg, a. a. O. S. 213.

lich ist. Es lässt sich sogar leicht zeigen, das, falls gar keine Knotenpunkte mit nur zwei Stäben vorhanden sind, mindestens 6 mit nur drei Stäben vorhanden sein müssen*); doch ist dieser Satz von geringerer Bedeutung.

Dieser Satz in Verbindung mit dem Satze 6 erlaubt uns alle möglichen einfachen stabilen Fachwerke mit k Knotenpunkten zu finden, wenn wir diejenigen mit $k-1$ Knotenpunkten kennen, und zwar auf Grund zweier Processe: *Erstens* können wir an das Fachwerk mit $k-1$ Knotenpunkten einen neuen Knotenpunkt durch zwei Stäbe angliedern, ein solches Fachwerk $\mathfrak{F}_k$ wird immer stabil sein, vorausgesetzt dass der neue Knotenpunkt nicht mit den beiden Knotenpunkten, mit denen er durch Stäbe verbunden ist, in einer Geraden liegt. *Zweitens* können wir in dem Fachwerk $\mathfrak{F}_{k-1}$ einen Stab fortlassen und einen neuen Knotenpunkt durch drei Stäbe angliedern. Um zu entscheiden, ob das so entstehende Fachwerk stabil ist oder nicht, werden wir die Figur der Geschwindigkeitspole $\mathfrak{F}'_{k-1}$ construiren müssen, die einer nach Fortlassung des Stabes und Festhaltung eines anderen noch möglichen momentanen Bewegung von $\mathfrak{F}_{k-1}$ entspricht; je nachdem die den drei hinzugefügten Stäben parallelen Geraden durch die Geschwindigkeitspole der Endpunkte jener drei Stäbe durch einen Punkt laufen oder nicht, wird $\mathfrak{F}_k$ instabil sein oder stabil.

Es ist hiernach leicht zu entscheiden, wie man bei gegebenem $\mathfrak{F}_{k-1}$ den neuen Knotenpunkt P zu wählen haben wird, damit das durch Hinzufügung der Stäbe P_1P, P_2P, P_3P entstehende Fachwerk $\mathfrak{F}_k$ stabil sei. Bewegt sich P' auf einem Strahle p_3' durch P_3' (s. Fig. 3),

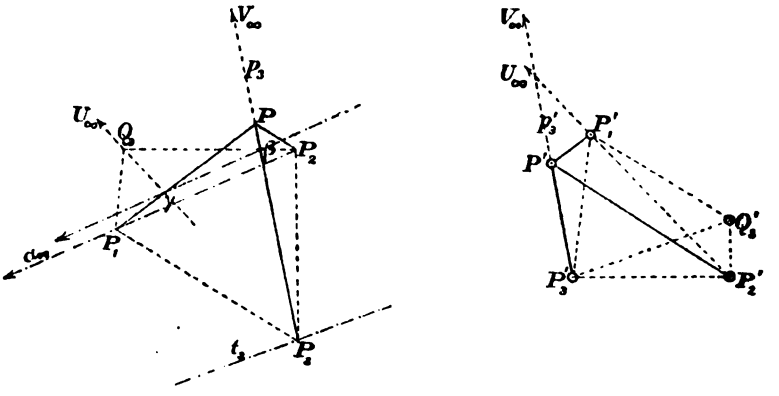


Fig. 3.

so ist der Ort der Schnittpunkte der durch P_1 und P_2 zu $P_1'P'$ und $P_2'P'$ gezogenen Parallelen offenbar ein Kegelschnitt durch die Punkte

*) Vergl. Grübler, a. a. O. I.

P_1 und P_2, den Punkt Q_3, in welchem sich die Parallelen durch P_1 und P_2 zu $P_1'P_3'$ und $P_2'P_3'$ schneiden, den unendlich fernen Punkt U_∞ von $P_1'P_2'$ und den unendlich fernen Punkt V_∞ von p_3'. Schneidet dieser Kegelschnitt die Parallele p_3 zu p_3' durch P_3 zum zweiten Male in P, so werden daher nach dem Pascal'schen Satze in einer Geraden liegen die Punkte: $\alpha_\infty = (P_1P_2,\ U_\infty V_\infty)$, $\beta = (P_2Q_3,\ V_\infty P)$, $\gamma = (Q_3U_\infty,\ PP_1)$. Beschreibt daher p_3 das Strahlenbündel (p_3) um P_3, so bleibt α_∞ fest, β beschreibt eine zu (p_3) projective Punktreihe (β) auf P_2Q_3, γ eine zu (β) ähnliche Punktreihe (γ) auf Q_3U_∞, also $P_1P = P_1\gamma$ ein zu (P_3P) projectives Strahlenbüschel. Es liegen demnach alle Punkte P, welche ein instabiles Fachwerk $\mathfrak{F}_k$ liefern würden, auf einem Kegelschnitte*) durch P_3, P_1, P_2 und Q_3, wie man leicht sieht, wenn man β nach P_2 resp. Q_3 fallen lässt. Offenbar liegen auch die entsprechenden Punkte P' auf einem Kegelschnitte durch P_3', P_1', P_2' und Q_3', wo Q_3' der Schnittpunkt der Parallelen durch P_1' und P_2' zu P_1P_3 und P_2P_3 ist. Fällt daher P' nach Q_3', so rückt P nach P_3, sodass $P_3'Q_3'$ der Tangente von P_3 an den Ort der Punkte P parallel ist**). Wir erhalten demnach das Resultat:

9. *Kennt man alle einfachen stabilen Fachwerke mit $k-1$ Knotenpunkten, so findet man aus ihnen alle einfachen stabilen Fachwerke mit k Knotenpunkten entweder dadurch, dass man zwei Knotenpunkte P_1 und P_2 eines der ersteren mit einem nicht in der Geraden P_1P_2 liegenden neuen Knotenpunkte P durch Stäbe verbindet, oder dadurch, dass man in einem der ersteren Fachwerke einen Stab fortlässt und drei seiner Knotenpunkte P_1, P_2, P_3 mit einem nicht auf einem gewissen Kegelschnitte durch P_1, P_2, P_3 liegenden Knotenpunkte P durch drei Stäbe verbindet.*

Soll der Kegelschnitt in gegebenem Falle gefunden werden, so müssten wir die Aufgabe lösen können:

Ein einfaches Fachwerk zu construiren, von dem gegeben sind die Gliederung und die Richtungen seiner Stäbe.

Sie erweist sich als *die Fundamentalaufgabe* der ganzen Theorie der einfachen Fachwerke. Der obige Gedankengang führt uns unmittelbar zu ihrer Lösung, indem wir voraussetzen, sie sei für das Fachwerk von $k-1$ Knotenpunkte gelöst, aus dem das Fachwerk von k Knotenpunkten durch einen der beiden Processe entstanden ist. Dann ist sie ja sofort gelöst für diejenigen Fachwerke $\mathfrak{F}_k$, welche aus einem Fachwerke $\mathfrak{F}_{k-1}$ durch den ersten Process entstehen. Um die Aufgabe auch für den zweiten Entstehungsprocess zu lösen, denken wir uns neben $\mathfrak{F}_{k-1}$ mit den Knotenpunkten $P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}$ ein

*) Henneberg, Statik der starren Systeme, S. 219.

**) Grübler, Die momentane Bewegung dreier starrer Geraden mit gemeinschaftlichen Punkten in einer Ebene. Zeitschr. für Math. u. Phys. 35. Jahrg. S. 247.

zweites Fachwerk $\mathfrak{F}'_{k-1}$ mit den Knotenpunkten $P_1', P_2', \ldots, P'_{k-1}$ gefunden, das dieselbe Gliederung und von einem Stabe $P_a' P_b'$, der dem zu entfernenden Stabe $P_a P_b$ entspricht, abgesehen entsprechende Stäbe gleicher Richtung hat. Dann genügen ja denselben Bedingungen alle diejenigen Fachwerke $\mathfrak{F}''_{k-1}$, deren Knotenpunkte $P_1'', P_2'', \ldots, P''_{k-1}$ auf den Geraden $P_1 P_1'$, $P_2 P_2'$, $\ldots$, $P_{k-1} P'_{k-1}$ so liegen, dass

$$P_1 P_1' P_1'' \sim P_2 P_2' P_2'' \sim \cdots \sim P_{k-1} P'_{k-1} P''_{k-1}$$

ist, wobei P_c'' mit P_c zusammenfällt, falls von P_c' dasselbe gilt. Legen wir nun durch P_1'' und P_2'' jedesmal Geraden p_1'' und p_2'' in gegebenen Richtungen, so wird ihr Schnittpunkt Q_3'' offenbar eine Gerade $Q_3 Q_3'$ beschreiben, weil $Q_3 Q_3'$ von den beiden Schaaren paralleler Geraden in zwei ähnlichen Punktreihen geschnitten wird, welche Q_3 und Q_3' entsprechend gemein haben. Ist nun ebenso auch für eine Gerade p_3'' durch P_3'' die Richtung vorgeschrieben, so erhalten wir auch als Ort der Punkte $Q_1'' = (p_2'', p_3'')$ und $Q_2'' = (p_3'', p_1'')$ zwei Geraden $Q_1 Q_1'$ und $Q_2 Q_2'$, deren Schnittpunkt P''' auch auf $Q_3 Q_3'$ liegt. Das dem Punkte P''' entsprechende Fachwerk $\mathfrak{F}'''_{k-1}$ in jener Reihe ist nach Angliederung des Knotenpunktes P''' durch die Stäbe $P_1''' P'''$, $P_2''' P'''$, $P_3''' P'''$ ein solches Fachwerk $\mathfrak{F}_k$, in welchem diese drei Stäbe sowohl als die $\mathfrak{F}'''_{k-1}$ angehörigen Stäbe, von dem fortzulassenden Stabe $P_a''' P_b'''$ abgesehen, vorgeschriebene Richtungen haben.

Will man hiernach in gegebenem Falle die Aufgabe lösen, so wird man sich zuerst schematisch die Entstehung des Fachwerks durch die beiden Processe klar machen und dann die Aufgabe vom Dreiecke anfangend den gegebenen Richtungen der Stäbe entsprechend successive nach obiger Vorschrift zu lösen haben, indem die Richtungen der später fortzulassenden Stäbe zunächst willkürlich angenommen werden, und zwar wird man jedesmal zwei solche willkürliche Annahmen zu machen haben, wenn ein Stab fortzulassen ist. Durch ein Beispiel wird dies Verfahren, das, falls unsere Aufgabe überhaupt eine Lösung hat, zwar unter Umständen sehr langwierig sein, aber niemals versagen kann, am besten klar werden.

Wir wählen als *Beispiel**), das in Fig. 4 dargestellte Fachwerk $P_1 P_2 \ldots P_{11}$ so abzuändern, dass P_1 und P_2 fest bleiben und alle Stäbe mit Ausnahme des Stabes $P_{10} P_{11}$, welcher $P_{10} P_{12} P_{13}$ parallel werden soll, ihre Richtungen beibehalten. Das Bildungsgesetz des Fachwerks ergiebt sich zunächst nach dem Schema, dass zuerst P_{11} abgelöst wird und der Stab $P_2 P_3$ eingefügt, dann der Reihe nach die zweistäbigen Knotenpunkte P_{10} und P_9, ferner der dreistäbige Knotenpunkt P_8 mit gleichzeitiger Einfügung des Stabes $P_1 P_4$, endlich der Reihe nach die zweistäbigen Knotenpunkte P_7, P_6, P_4 abgelöst werden,

*) Vergl. Fig. 201, S. 212 des a. Werkes von Müller-Breslau.

bis das Dreieck $P_1 P_2 P_3$ übrig bleibt. Es wird also unsere erste Aufgabe sein müssen, ein Fachwerk $P_1 P_2 Q_3 Q_4 \ldots Q_{10}$ zu construiren, in welchem $P_2 Q_3$ eine von $P_2 P_3$ verschiedene Richtung hat, und das den Stab $P_1 Q_4$ noch nicht enthält. Um diese Aufgabe zu lösen, werden wir zuerst zwei Fachwerke $P_1 P_2 Q_3 P_4 Q_5' Q_6' Q_7'$ und $P_1 P_2 Q_3 Q_4'' Q_5'' Q_6'' Q_7''$ zu construiren haben, welche zwei verschiedenen Richtungen des Stabes $P_1 P_4$ zugehören, dessen Einfügung der Ablösung von P_8 entspricht. Schneiden sich dann die Parallelen durch Q_5' und Q_7' einerseits und durch Q_5'' und Q_7'' andrerseits zu $P_5 P_8$ und $P_7 P_8$ resp. in Q_8' einer-

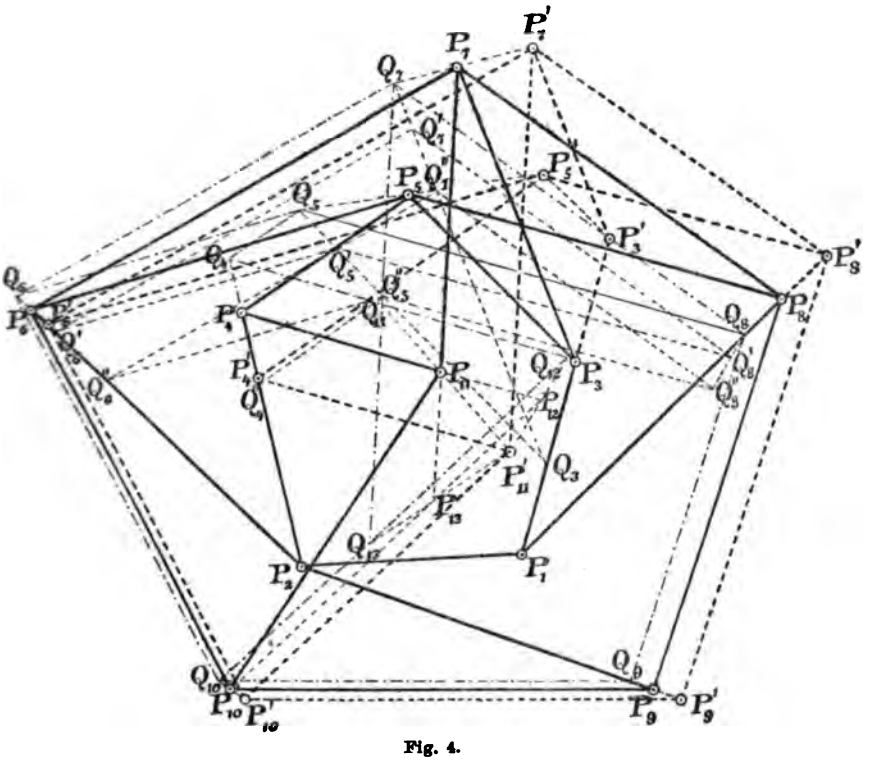


Fig. 4.

seits und Q_8'' andrerseits, so schneidet $Q_8' Q_8''$ offenbar die $P_1 P_8$ in dem Punkte Q_8 des gesuchten Fachwerkes $P_1 \ldots Q_{10}$, wonach die übrigen Knotenpunkte desselben leicht zu finden sind. Nunmehr bestimmen die Parallelen durch P_4, P_7, P_{10} einerseits und durch Q_4, Q_7, Q_{10} andrerseits zu $P_4 P_{11}$, $P_7 P_{11}$, $P_{10} P_{12} P_{13}$ resp. zwei ähnliche und ähnlich liegende Dreiecke $P_{11} P_{12} P_{13}$ und $Q_{11} Q_{12} Q_{13}$, deren Aehnlichkeitscentrum der Knotenpunkt P_{11}' des gesuchten Fachwerks sein muss; aus ihm ergeben sich leicht die übrigen Punkte $P_{10}', \ldots, P_3'$, welche je auf $P_{10} Q_{10}, \ldots, P_3 Q_3$ liegen müssen. Hätten alle Stäbe andre Richtungen

erhalten sollen, so hätten wir alle zu dem Fachwerke $P_1 P_2 Q_3 \ldots Q_{10}$ führenden Constructionen für eine zweite Richtung des einzufügenden Stabes $P_2 P_3$ wiederholen müssen; da hierdurch unsre Figur jede Uebersichtlichkeit verloren hätte, so haben wir uns auf jene einfachere Aufgabe beschränkt, die dem Leser doch vollkommen klar zu machen geeignet ist, wie sich unser Verfahren in der Ausführung gestaltet.

Wir haben es nicht für nöthig gehalten, die verschiedenen Fälle zu discutiren, in denen unsre Aufgabe, *unendlich viele oder nur solche Lösungen hat, bei der ein oder mehrere Knotenpunkte in's Unendliche rücken;* bei der Ausführung wird sich das von selbst herausstellen.

Wohl aber wird manchem Leser die folgende *methodische* Bemerkung vielleicht von Interesse sein. Denken wir uns den Begriff der Stabilität eines Fachwerks auf Grund des Satzes 4 aufgestellt, so zeigt uns Satz 9, dass wir sicher einfache stabile Fachwerke mit beliebig viel Knotenpunkten und von jeder Gliederung, die nicht durch das Vorhandensein überzähliger Stäbe in an sich stabilen Theilen des Fachwerks die Stabilität des ganzen Fachwerks von selbst ausschliesst, construiren können. Für die so construirten Fachwerke lässt sich auch unabhängig von den infinitesimalen Untersuchungen des § 1 beweisen, dass *es bei Festhaltung eines Stabes und Veränderung der Richtung eines anderen immer eine Schaar von einfach unendlich vielen Fachwerken giebt, die mit dem gegebenen in der Gliederung und in den Richtungen aller übrigen Stäbe übereinstimmen, so zwar, dass alle beweglichen Knotenpunkte gerade ähnliche Punktreihen beschreiben, der Stab veränderlicher Richtung also eine zu diesen Punktreihen projective Parabel umhüllt oder ein dazu projectives Strahlenbüschel beschreibt* (vergl. Satz 5). Wird nämlich der Satz für die Fachwerke $\mathfrak{F}_{k-1}$ als bewiesen betrachtet, aus denen $\mathfrak{F}_k$ durch einen der beiden Processe entstanden ist, so gilt er sofort auch für $\mathfrak{F}_k$, falls es sich um den ersten Process handelt. Ist aber $\mathfrak{F}_k$ aus $\mathfrak{F}_{k-1}$ durch Angliederung der Stäbe $P_1 P$, $P_2 P$, $P_3 P$ entstanden, so betrachten wir die Schaar der Fachwerke $\mathfrak{F}_{k-1}$, $\mathfrak{F}'_{k-1}$, $\mathfrak{F}''_{k-1}$, ..., die aus $\mathfrak{F}_{k-1}$ bei Festhaltung von $P_1 P_c$ und blosser Veränderung der Richtung von $P_a P_b$ entstehen. Der Schnittpunkt P' der Parallelen durch P_2' und P_3' zu PP_2 und PP_3 beschreibt dann eine gerade Punktreihe durch P, die zu dem Büschel der Richtungen des Stabes $P_a' P_b'$ projectiv ist. Geben wir dann einem Stabe $P_c P_b$ von $\mathfrak{F}_{k-1}$ eine andre Richtung, halten wieder $P_1 P_c$ fest und verändern nur die Richtung von $P_a P_b$ der obigen Aenderung entsprechend, so erhalten wir eine neue Schaar von Fachwerken $\mathfrak{G}_{k-1}$, $\mathfrak{G}'_{k-1}$, $\mathfrak{G}''_{k-1}$, ..., für welche der P' entsprechende Punkt Q' wieder eine Gerade beschreibt, die $P_1 P$ in einem Knotenpunkte Q''' eines Fachwerks $\mathfrak{G}_k'''$ der gesuchten Art schneiden würde, wenn man annehmen könnte, dass diese Gerade QQ' nicht bei jeder

Annahme der Richtung von $P_c P_b$ parallel zu $P_1 P$ wäre. Geben wir aber wieder $P_c P_b$ alle möglichen Richtungen, so beschreiben nach dem Obigen die Punkte Q und Q' gerade projective Punktreihen; wäre also QQ' beständig parallel zu $P_1 P$, so müsste dasselbe für PP' gelten, was wegen der Stabilität von $\mathfrak{F}_k$ nicht der Fall ist. Haben wir aber überhaupt *ein* Fachwerk $\mathfrak{G}_k''$ der gesuchten Art gefunden, so ergiebt sich alles Weitere wie beim Beweise des Satzes 5. Da unser Satz nun sicher für das Dreieck gilt, so ist er hiermit allgemein bewiesen.

Wir bemerken schliesslich noch, dass mit unserer Aufgabe auch die nur scheinbar allgemeinere gelöst ist, die *nicht einfachen* Fachwerke bei gegebenen Richtungen der Stäbe zu finden; soll nämlich diese Aufgabe überhaupt lösbar sein, so müssen die Richtungen der sogenannten *überzähligen Stäbe, deren Fortlassung die Stabilität des Fachwerks nicht aufhebt*, durch die übrigen bestimmt sein; man braucht also die Aufgabe nur zu lösen für dasjenige einfache Fachwerk, das aus dem gegebenen durch Fortlassung der überzähligen Stäbe entsteht, dann müssen diese von selbst die gegebenen Richtungen annehmen.

§ 3.

Die Bestimmung der Spannungen in den Stäben eines einfachen Fachwerks.

In den k Knotenpunkten $P_1 P_2 \ldots P_k$ eines einfachen stabilen Fachwerks $\mathfrak{F}_k$ denken wir uns die mit einander im Gleichgewichte stehenden Kräfte angebracht, deren Angriffslinien $a_1 a_2 \ldots a_k$ sind, während ihre Grössen und ihre Pfeilrichtungen durch die Seiten eines geschlossenen Kräftepolygons $K_0 K_1 K_2 \ldots K_{k-1} K_0$ dargestellt sind. Sollen die Kräfte im Gleichgewichte sein, so muss ausserdem das irgend einem Pole C zugehörige Seilpolygon*) $S_1 S_2 S_3 \ldots S_k$, wo S_a auf a_a liegt und $S_{a-1} S_a$ zu CK_{a-1} parallel ist, ein geschlossenes sein derart, dass $S_k S_1$ zugleich erste und letzte Seite des Seilpolygons ist (s. Fig. 5). Man kann offenbar die in $k - 2$ Knotenpunkten angreifenden Kräfte der Grösse und Richtung nach willkürlich annehmen, und es müssen sich dann die den letzten beiden Knotenpunkten zugehörigen Angriffslinien auf der Resultante jener schneiden; sind sie dieser Bedingung gemäss gewählt, so sind auch die Grössen der letzten

*) Jede (in a_a wirkende) Kraft $K_{a-1} K_a$ ist nämlich zerlegt in die beiden in $S_{a-1} S_a$ und $S_a S_{a+1}$ wirkenden Componenten $K_{a-1} C$ und CK_a, sodass nur die in der ersten und letzten Seite des Seilpolygons wirkenden Kräfte übrig bleiben, welche sich also ebenfalls aufheben müssen. Man vergl. z. B. Müller, Breslau, a. a. O. S. 7 u. 8.

beiden Kräfte als Componenten der jener Resultante entgegengesetzt gleichen Kraft bestimmt.

Die Aufgabe, die unter dem Einflusse dieser äusseren Kräfte in den Stäben entstehenden inneren Kräfte oder Spannungen zu bestimmen, das sogenannte *Spannungsproblem*, kommt nun, wie bekannt, darauf hinaus, *die in jedem Knotenpunkte P_a wirkende Kraft $k_a = K_{a-1}K_a$ so nach den in P_a zusammenlaufenden Stäben zu zerlegen, dass in jedem Stabe seinen beiden Endpunkten entsprechend zwei entgegengesetzt gleiche Componenten oder Spannungen resultiren;* nimmt man an, dass jede Componente in dem jedesmaligen andern Endpunkte des Stabes wirkt, so herrscht sowohl in jedem Stabe als in jedem Knotenpunkte unter dem Einflusse der äusseren Kräfte Gleichgewicht, wie es die Entstehung dieser gegliederten Scheibe erfordert. Eine solche in dem Stabe P_aP_b wirkende Componente von k_a wird Druck oder Zug sein, je nachdem sie von P_a nach P_b oder in umgekehrter Richtung wirkt. Wir könnten offenbar den in jedem Stabe wirkenden Druck oder Zug beliebig annehmen und daraus die äusseren Kräfte als Resultanten der in jedem Knotenpunkte angebrachten Spannungen bestimmen; diese müssen dann mit einander im Gleichgewichte sein, weil dasselbe von ihren Componenten gilt. Es giebt also jedenfalls ∞^s Kräftesysteme, für welche unser Spannungsproblem lösbar ist. Da es nun nach unsern obigen Betrachtungen ∞^{2k-3} Systeme von im Gleichgewicht stehenden äusseren Kräften giebt, die in den k Knotenpunkten des Fachwerks angreifen, so wird unsre Aufgabe im Allgemeinen nur für die einfachen Fachwerke lösbar oder bestimmt sein.

Um dies näher zu untersuchen, setzen wir wieder voraus, das Spannungsproblem sei für das einfache stabile Fachwerk $\mathfrak{F}_{k-1}$ lösbar, aus dem das Fachwerk $\mathfrak{F}_k$ durch einen unserer beiden Processe entstanden ist. Dann gilt dasselbe unmittelbar für $\mathfrak{F}_k$, falls es sich nur um den ersten Process handelt. Ist aber $\mathfrak{F}_k$ aus $\mathfrak{F}_{k-1}$ dadurch entstanden, dass die drei neuen Stäbe PP_1, PP_2, PP_3 hinzugefügt wurden, der Stab P_aP_b hingegen fortgelassen, so wird es offenbar darauf ankommen, die in P angreifende Kraft k so nach den drei Stäben zu zerlegen, dass das Spannungsproblem für $\mathfrak{F}_{k-1}$ bei Hinzufügung dieser drei Componenten zu den übrigen äusseren Kräften in dem Stabe P_aP_b keine Spannung ergiebt, dieser Stab also wirklich als nicht vorhanden betrachtet werden kann*). Nehmen wir nun an, das Spannungsproblem sei für $\mathfrak{F}_{k-1}$ dieser Bedingung gemäss gelöst, und bringen wir die so bestimmten Spannungen in den entsprechenden Stäben eines Fachwerks $\mathfrak{F}'_{k-1}$ an, das sich von $\mathfrak{F}_{k-1}$ nur in der Richtung von $P_a'P_b'$ unterscheidet, so werden auch die äusseren Kräfte in ent-

*) Vgl. Henneberg a. a. O. S. 230.

sprechenden Knotenpunkten dieselben sein, da die beiden entsprechenden Stäbe verschiedener Richtung $P_a P_b$ und $P_a' P_b'$ spannungslos sind. Es sind demnach die Componenten von k nach PP_1, PP_2, PP_3 so zu bestimmen, dass die hiernach für $\mathfrak{F}_{k-1}$ resultirenden äusseren Kräfte auch in den entsprechenden Knotenpunkten von $\mathfrak{F}_{k-1}'$ angebracht mit einander im Gleichgewicht stehen. Nun werden die in den Knotenpunkten von $\mathfrak{F}_{k-1}$ angreifenden, *gegebenen* äusseren Kräfte $k_1 k_2 \ldots k_{k-1}$ in den Knotenpunkten $P_1' P_2' \ldots P_{k-1}'$ von $\mathfrak{F}_{k-1}'$ angebracht eine gewisse Resultante $-k'$ haben, welche mit der in P angreifenden Kraft k gleich gerichtet und ihr entgegengesetzt gleich ist. Zerlegen wir also die Kraft k' nach den drei Parallelen p_1', p_2', p_3' durch P_1', P_2', P_3' zu PP_1, PP_2, PP_3, so sind diese drei Componenten die gesuchten; denn die ihnen gleichen Kräfte in PP_1, PP_2, PP_3 selbst haben k zur Resultante. Da unser Fachwerk stabil sein soll, so dürfen p_1', p_2', p_3' nicht durch denselben Punkt laufen, jene Zerlegung von k nach PP_1, PP_2, PP_3 ist also eine völlig bestimmte*). Es lässt sich übrigens auch leicht direct zeigen, dass sie von der Wahl des Fachwerks $\mathfrak{F}_{k-1}'$ unabhängig ist; wir übergehen diesen Beweis, da er offenbar überflüssig ist.

Es sind also nunmehr für das Fachwerk $\mathfrak{F}_{k-1}$ die äusseren Kräfte so bestimmt, dass erstens in PP_1, PP_2, PP_3 die Componenten von k wirken und zweitens der fortzulassende Stab $P_a P_b$, falls für $\mathfrak{F}_{k-1}$ das Spannungsproblem überhaupt lösbar ist, spannungslos ist. Wir können diese Schlussweise fortsetzen, bis wir zum Dreiecke $P_c P_b P_e$ kommen. Zerlegen wir dann die in P_c angreifende Kraft, die sich natürlich im Allgemeinen aus k_c und mehreren schon bestimmten Spannungskräften zusammensetzen wird, nach den Richtungen $P_c P_b$ und $P_c P_e$, so werden diese beiden Componenten $s_{c,b}$ und $s_{c,e}$ den in P_b und P_e angreifenden Kräften das Gleichgewicht halten müssen. Setzen wir also $s_{c,b}$ mit der in P_b angreifenden Kraft zur Resultante $s_{b,e}$ zusammen, so muss diese aufgehoben werden durch die Resultante $s_{e,b}$ von $s_{c,e}$ und der in P_e angreifenden Kraft. Es wirken diese Resultanten folglich in dem Stabe $P_b P_e$ und sind den Spannungen desselben gleich. Schliessen wir nun wieder rückwärts, so haben wir das Spannungsproblem der Reihe nach für ein Fachwerk mit drei, vier, . . ., $k-1$, k Knotenpunkten gelöst und zwar für die vorher be-

*) Laufen p_1', p_2', p_3' durch denselben Punkt P', ist also $\mathfrak{F}_k$ ein instabiles Fachwerk, so liefert das Spannungsproblem entweder unendlich viele oder nur unendlich grosse Werthe der Spannungen, je nachdem k' durch P' läuft oder nicht. Denn die Zerlegung wird bekanntlich dadurch bewerkstelligt, dass man zuerst k' in zwei Componenten nach p_3' und der Verbindungslinie der beiden Punkte (k', p_3') und (p_1', p_2') zerlegt und dann die letzte Componente in zwei Componenten nach p_1' und p_2'.

stimmten äusseren Kräfte, sodass die später fortzulassenden Stäbe von selbst spannungslos werden. Der von uns eingeschlagene Weg lässt zugleich erkennen, dass unter der Voraussetzung der Stabilität des gegebenen einfachen Fachwerks das Spannungsproblem nur eine Lösung haben kann. Wir erhalten also den Satz:

10. *Ein einfaches stabiles Fachwerk ist stets auch statisch bestimmt, d. h. die unter dem Einflusse von äusseren mit einander im Gleichgewichte stehenden Kräften, die in seinen Knotenpunkten angreifen, entstehenden Spannungen sind vollkommen bestimmt**).

Ist ein Fachwerk $\mathfrak{F}_k'$ bekannt, das mit $\mathfrak{F}_k$ die Gliederung und die Richtungen der entsprechenden Stäbe bis auf diejenige irgend eines Stabes $P_a P_b$ gemein hat, so lässt sich die Spannung $s_{a,b}$ in diesem Stabe auch ganz direct ohne Kenntnis anderer Spannungen construiren. Wird nämlich das durch Fortlassung des Stabes $P_a P_b$ entstehende Fachwerk durch Einfügung eines geeigneten Stabes $P_c P_b$ wieder zu einem stabilen Fachwerke $\mathfrak{G}_k$ gemacht und werden, damit das Spannungsproblem dasselbe bleibe, in P_a und P_b die beiden Kräfte $s_{b,a}$ und $s_{a,b}$ hinzugefügt, so wird ja $P_c P_b$ spannungslos sein. Denken wir uns daher wieder in allen Stäben eines Fachwerks $\mathfrak{G}_k'$, das sich von $\mathfrak{G}_k$ nur in der Richtung des Stabes $P_c P_b$ unterscheidet, also z. B. mit $\mathfrak{F}_k'$ alle Knotenpunkte gemein haben darf, dieselben Spannungen wirkend wie in den entsprechenden Stäben von $\mathfrak{G}_k$, so müssen auch in allen Knotenpunkten von $\mathfrak{G}_k'$ äussere Kräfte derselben Richtung und Grösse resultiren wie in den entsprechenden Knotenpunkten von $\mathfrak{G}_k$. Denken wir also umgekehrt in allen Knotenpunkten von $\mathfrak{G}_k'$ oder $\mathfrak{F}_k'$ Kräfte derselben Richtung und Grösse angebracht wie die gegebenen äusseren Kräfte in den entsprechenden Knotenpunkten von $\mathfrak{F}_k$, so werden dieselben ein Kräftepaar bestimmen, dessen Componenten nach zwei Parallelen zu $P_a P_b$ durch P_a' und P_b' den gesuchten Zusatzkräften in P_a und P_b für $\mathfrak{G}_k$ entgegengesetzt gleich, also den gesuchten Spannungen $s_{a,b}$ und $s_{b,a}$ in $P_a P_b$ (als Componenten von k_a resp. k_b) gleich sind. Wir können diese Regel in dem folgenden Satze aussprechen:

11. *Ist ein Fachwerk $\mathfrak{F}_k'$ von derselben Gliederung wie $\mathfrak{F}_k$ bekannt, das sich von $\mathfrak{F}_k$ nur in der Richtung eines Stabes $P_a' P_b'$ unterscheidet, so bringe man in den Knotenpunkten von $\mathfrak{F}_k'$ gleiche und gleich gerichtete Kräfte an wie in den entsprechenden Knotenpunkten von $\mathfrak{F}_k$; reducirt man dann das diesen Kräften äquivalente Paar auf zwei zu $P_a P_b$ parallele Angriffslinien durch P_a' und P_b', so stellt die durch P_a' gehende Kraft dieses neuen Paares die von P_a ausgehende Spannung in $P_a P_b$ dar.*

---

*) S. Föppl, Theorie des Fachwerks, S. 23 ff., Leipzig 1880, und Henneberg a. a. O. S. 233.

Was die hier nöthige Reduction des Kräftepaares betrifft, so braucht man nur für irgend einen Pol C, der sich auf einer Parallelen zu $P_a P_b$ durch den Anfangspunkt K_0 des gegebenen Kräftepolygons befindet, und für die den Seiten dieses Kräftepolygons parallelen Angriffslinien durch $P_1' P_2' \ldots P_k'$ ein Seilpolygon $S_0' S_1' \ldots S_k' S_{k+1}'$ zu

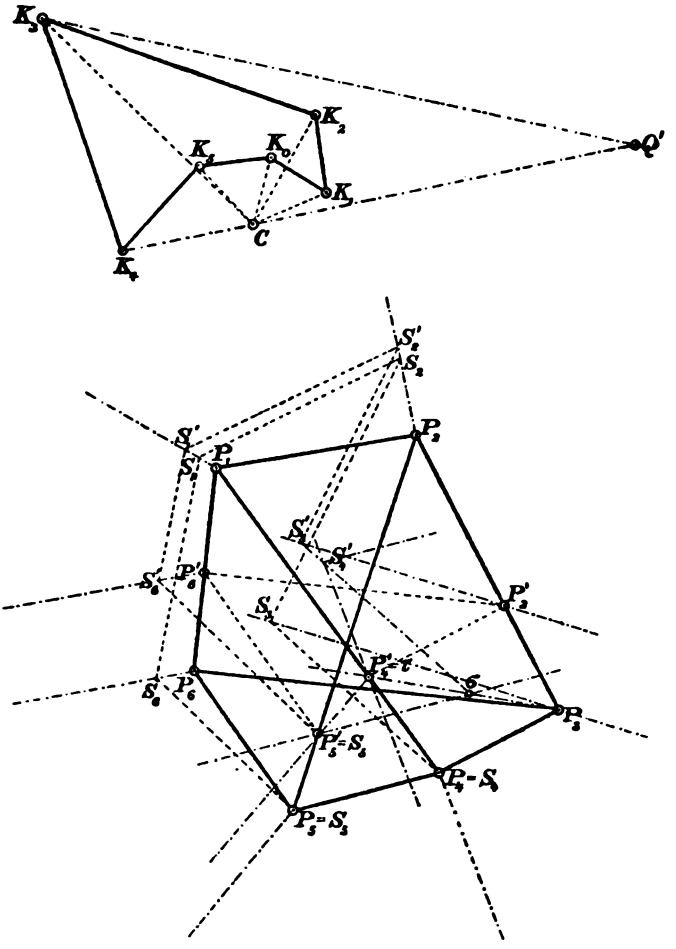


Fig. 5.

zeichnen, dessen erste Seite durch P_a' geht; schneiden sich dann die erste und vorletzte Seite des Seilpolygons in σ, die Parallele durch P_b' zu $P_a P_b$ aber und die letzte Angriffslinie in τ, so schneidet die Parallele durch K_{k-1} zu $\sigma\tau$ den Seilstrahl CK_0 in einem solchen Punkte Q', dass $K_0 Q'$ die gesuchte Spannung $s_{a,b}$ darstellt; denn das Seilpolygon für den Pol Q', dessen erste Seite durch P_a' geht, schickt seine letzte

Seite durch P_b'*). Wir haben diese Construction in Fig. 5 zur Bestimmung der Spannung im Stabe $P_4 P_5$ des mehrfach betrachteten Fachwerks mit sechs Knotenpunkten benutzt, wobei wir nur der grösseren Bequemlichkeit wegen den Punkt K_4 zum Anfangspunkte des ja geschlossenen Kräftepolygons gemacht haben; das Seilpolygon $S_1 S_2 \ldots S_6$ diente zur Bestimmung der ursprünglichen äusseren Kräfte und konnte zugleich mit dem anderen construirt werden. Man wird hiernach beurtheilen können, welche Vortheile diese neue graphische Methode zur Bestimmung der Spannungen in einem Fachwerke in den Fällen bietet, in denen die alten Methoden versagen.

Hierbei wird es nicht ohne Interesse sein, zu sehen, wie diese Methode in die alte Culmann'sche übergeht, falls das Fachwerk $\mathfrak{F}_k$ aus zwei Fachwerken $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch Verbindung mit drei Stäben entstanden ist, von denen $P_a P_b$ der eine ist. Dann kann man nämlich als das Fachwerk $\mathfrak{F}_k'$ dasjenige betrachten, das aus $\mathfrak{A}$ und einem Fachwerke $\mathfrak{B}'$ besteht, das zu $\mathfrak{B}$ ähnlich und mit ihm in Bezug auf den Schnittpunkt D der beiden andern Stäbe ähnlich gelegen ist; diese zwei Verbindungsstäbe behalten dann ihre Lage, während $P_a P_b$ in $P_a P_b'$ übergeht. Das Kräftepaar können wir uns hier gegeben denken durch die Resultante a der auf $\mathfrak{A}$ wirkenden Kräfte und die Resultante b' der auf $\mathfrak{B}'$ wirkenden Kräfte, deren Angriffslinie offenbar durch die obige Aehnlichkeitstransformation hervorgeht aus der mit der von a zusammenfallenden Angriffslinie der Resultante b der auf $\mathfrak{B}$ wirkenden Kräfte; denn die Angriffslinie der Resultante einer Reihe von Kräften ändert sich nicht, wenn die Kräfte in demselben Verhältnisse vergrössert oder verkleinert werden. Es liegen folglich D, der Punkt $A = (a, P_a P_b)$ und der Schnittpunkt B' der Parallelen durch P_b' zu $P_a P_b$ mit b' in einer Geraden. Man kann hier also die Reduction des Kräftepaares a, b' auf die beiden zu $P_a P_b$ parallelen Angriffslinien so vornehmen, dass man a nach $P_a P_b$ und AD und b' nach AD und $P_b' B'$ zerlegt, und in dem ersten Schnitte besteht bekanntlich die Culmann'sche Methode**).

Auch die Methode zur Bestimmung der Spannung in irgend einem Stabe, welche man Müller-Breslau***) verdankt, setzt die Construction des Fachwerks $\mathfrak{F}_k'$ voraus, das bei M. die Rolle der Figur der Geschwindigkeitspole spielt. M. bildet nämlich für jeden Knotenpunkt P_c die Gleichung, welche ausdrückt, dass das Drehungsmoment

*) Es beruht das auf dem bekannten Satze der graphischen Statik, dass die Schnittpunkte gleichvielter Seiten zweier Seilpolygone, die zu demselben Systeme von Kräften, aber zu verschiedenen Polen gehören, auf einer zur Verbindungslinie dieser Pole parallelen Geraden liegen. Man vergl. z. B. Müller-Breslau a. a. O. S. 9.

**) Culmann, Die graphische Statik 1. Aufl., S. 363, Zürich 1866.

***) S. das Citat auf S. 142.

der von P_c ausgehenden Spannungen in Beziehung auf den Punkt P_c' gleich dem Momente der Kraft k_c für denselben Punkt ist. Addirt man alle diese Gleichungen, so bleibt auf der einen Seite nur die Spannung $s_{a,b}$ multiplicirt mit der Differenz der Entfernung des Punktes P_b' von derjenigen des Punktes P_a' von $P_a P_b$, während auf der andern Seite die algebraische Summe der Drehungsmomente der äusseren Kräfte in Beziehung auf die entsprechenden Geschwindigkeitspole steht. Die graphische Verwerthung der hieraus fliessenden Methode führt entschieden zu weniger einfachen Constructionen als die von mir angegebene Methode, wie schon daraus hervorgeht, dass man Satz 11 auch in folgende Form setzen kann: *Ist ein Fachwerk $\mathfrak{F}_k'$ von derselben Gliederung wie $\mathfrak{F}_k$ bekannt, das sich von $\mathfrak{F}_k$ nur in der Richtung des Stabes $P_a' P_b'$ unterscheidet, so ist das Moment der in P_a' angebrachten Spannung $s_{a,b}$ des Stabes $P_a P_b$ in Beziehung auf den Punkt P_b' gleich dem Momente der in den Punkten P_c' von $\mathfrak{F}_k'$ angebrachten gegebenen äusseren Kräfte k_c für denselben Momentenpunkt.* Auch hiernach kann $s_{a,b}$ in bekannter Weise mit Hülfe eines Seilpolygons ermittelt werden, da es sich überall um denselben Momentenpunkt handelt, während hierzu nach Müller-Breslau erst eine umständliche Verlegung der äusseren Kräfte erforderlich ist. In der That gehen beide Methoden in einander über, wenn man berücksichtigt, dass erstens die Summe der Momente der in P_c angreifenden Kräfte k_c in Beziehung auf einen und denselben Momentenpunkt P_b' verschwindet, und dass zweitens das Moment der in P_c angreifenden Kraft k_c für P_c' gleich der Differenz der Momente derselben in P_c resp. P_c' angreifenden Kraft für den Punkt P_b' ist. Es muss jedoch bemerkt werden, dass der Verfasser diese Ueberführbarkeit der beiden Methoden in einander erst nachträglich erkannte, dass für ihn vielmehr der auch bei den obigen Beweisen befolgte Gesichtspunkt massgebend war, für die beiden Fachwerke $\mathfrak{F}_k$ und $\mathfrak{F}_k'$, die sich nur in der Richtung eines Stabes unterscheiden, auch die Spannungsprobleme in möglichst grosse Uebereinstimmung zu bringen.

Nimmt man wieder an, dass das Fachwerk aus zwei stabilen Fachwerken $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch Einfügung von drei Stäben entstanden ist, so geht die Methode von Müller-Breslau in die Ritter'sche*) über; denn dann kann man die Geschwindigkeitspole der Punkte von $\mathfrak{B}$, die der Bewegung von $\mathfrak{B}$ gegen $\mathfrak{A}$ nach Entfernung des Verbindungsstabes $P_a P_b$ entsprechen, alle in den momentanen Drehpunkt D der Scheibe $\mathfrak{B}$ verlegen, während die Geschwindigkeitspole der Punkte von $\mathfrak{A}$ mit ihnen selbst zusammenfallen, also keinen Beitrag für obige algebraische Summe liefern.

*) Ritter, Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brücken-Constructionen. Hannover 1863.

Jedenfalls sieht man, wie die verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Spannungen in einem Fachwerke alle aus unserer Methode ohne Schwierigkeit abgeleitet werden können. Wie sie auch zur Vervollständigung der Cremona'schen Methode dient, werden wir im nächsten Paragraphen sehen.

§ 4.

Ueber Kräftepläne.

Die erste von uns entwickelte Methode zur Bestimmung der Spannungen in einem einfachen stabilen Fachwerke, das aus einem Dreiecke durch allmähliche Anfügung von je zwei Stäben entstanden ist, gestaltet sich dann besonders einfach, wenn die allmähliche Zerlegung der in dem jedesmal fortzulassenden Knotenpunkte P_a angreifenden Kraft $K_{a-1}K_a$ so vorgenommen werden kann, dass der die

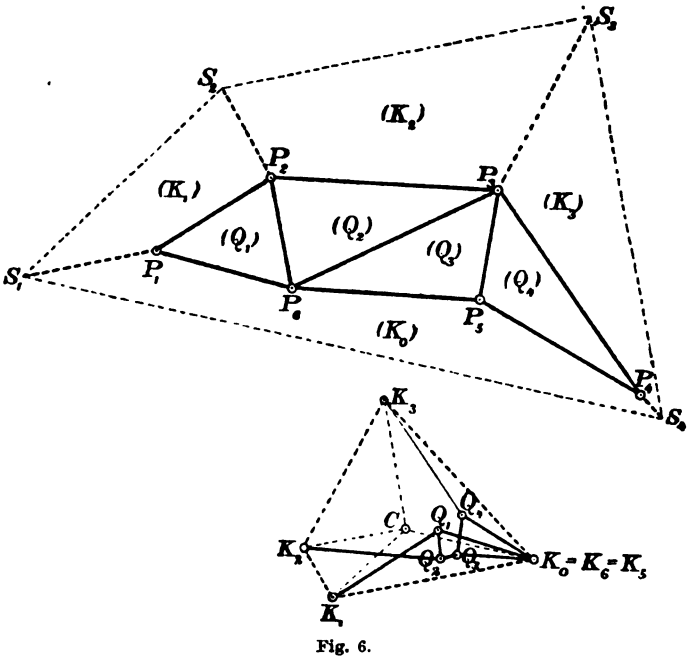


Fig. 6.

beiden Spannungen $K_{a-1}Q_b$ und Q_bK_a liefernde Punkt Q_b unmittelbar als Eckpunkt des Kräftepolygons betrachtet werden kann, das zu dem durch Fortlassung der beiden Stäbe entstehenden Fachwerke gehört, sodass der Zerlegungsprocess ohne Unterbrechung fortgesetzt werden kann. Das wird z. B. bei den in der Praxis besonders häufig benutzten Fachwerken der Fall sein, die aus lauter schlicht neben einander

gelagerten Dreiecken bestehen. Dann liegen nämlich sämmtliche Knotenpunkte am Rande der von diesen Dreiecken überdeckten Fläche, und wir brauchen die äusseren Kräfte nur in die Reihenfolge zu bringen, welche der Aufeinanderfolge ihrer Angriffspunkte auf diesem Rande entspricht. Dann ist $K_{a-1}Q_b \parallel P_{a-1}P_a$ und $Q_bK_a \parallel P_aP_{a+1}$, sodass nach Fortlassung von P_a in P_{a-1} und P_{a+1} Kräfte angreifen, welche durch die aufeinander folgenden Seiten $K_{a-2}Q_b$ und Q_bK_{a+1} des neuen Kräftepolygons dargestellt sind (vergl. Fig. 6). Diese Figur, welche die Stabkräfte nunmehr in übersichtlicher Anordnung enthält, wird ein *Kräfteplan* genannt. *In einem Kräfteplane ist die Lösung des Spannungsproblems gewissermassen in Evidenz gesetzt, insofern den von jedem Knotenpunkte auslaufenden Stäben als Darstellungen ihrer Spannungen im Kräfteplane Strecken entsprechen, die mit der dem Knotenpunkte entsprechenden Seite des Kräftepolygons ein geschlossenes Polygon bilden, und jede Stabkraft gemeinsame Seite von zwei solchen Polygonen ist.* Es wird nun unsre Aufgabe sein, die allgemeinen Bedingungen aufzustellen, an welche die Existenz eines solchen zu einem einfachen, stabilen Fachwerke gehörigen Kräfteplanes geknüpft ist. Hierbei werden wir allerdings die folgende allgemeine Voraussetzung zu Grunde legen: *Die Existenz eines Kräfteplanes für ein gegebenes, einfaches, stabiles Fachwerk und gegebene äussere Kräfte soll nicht aufgehoben werden durch Veränderung der Richtungen der Stäbe und der Grössen und Richtungen der nicht verschwindenden äusseren Kräfte.* Ohne eine solche Voraussetzung würden in der That unsre Untersuchungen, wenn sich dann überhaupt noch ein Angriffspunkt für sie böte, zu keiner allgemeinen und praktisch brauchbaren Methode führen können.

Dieser Voraussetzung fügen wir noch die weitere hinzu, dass *kein Stab des Fachwerks bei beliebiger Annahme der von Null verschiedenen äusseren Kräfte spannungslos sei;* wir werden diese Annahme, damit unsre Untersuchungen sich nicht von vornherein zu verwickelt gestalten, erst auf S. 172 u. 173 als stets erfüllt nachweisen, falls das Fachwerk in geeigneter Weise reducirt ist.

Es wird nun unsre nächste Aufgabe sein, durch Ermittelung der Anzahl p der Eckpunkte Q_a des Kräfteplanes unseren weiteren Untersuchungen eine feste Grundlage zu geben. Zu diesem Zwecke erweitern wir die Figur des Kräfteplanes durch Hinzufügung der Seilstrahlen $CK_0, CK_1, \ldots, CK_{n-1}$, wo n, wie wir sehen werden, im Allgemeinen kleiner als k ist, d. h. in einer Reihe von Knotenpunkten wirken keine äusseren Kräfte. Wir wollen die neue Figur den *erweiterten Kräfteplan* nennen; er ist offenbar ein Fachwerk mit $n + p + 1$ Knotenpunkten, nämlich den n Ecken des Kräftepolygons, den p Ecken des Kräfteplanes und dem Pole des Seilpolygons, und mit $2n + s$ Stäben,

nämlich den n Seilstrahlen, den n Seiten des Kräftepolygons und den s Seiten des eigentlichen Kräfteplanes. Es ist nun zuerst leicht zu sehen, dass *der erweiterte Kräfteplan ein stabiles Fachwerk ist*, d. h. durch seine Gliederung, die Richtungen seiner Stäbe und die Endpunkte eines Stabes vollkommen bestimmt ist. Wählen wir in der That etwa CK_0 als diesen Stab, so ist zunächst das ganze Kräftepolygon durch die Richtungen seiner Seiten und der Seilstrahlen bestimmt; von diesen $2n$ Stäben ist sogar der eine überzählig, d. h. seine Richtung durch diejenige der übrigen mitbestimmt (vergl. S. 159). Würden nun hiernach die Punkte Q_α nicht durch die Richtungen der s weiteren Stäbe bestimmt sein, sondern würde noch ein zweites System von Eckpunkten Q_α' existiren, das dieselben Bedingungen erfüllt, und denken wir uns diese neuen s Stäbe als Spannungen in den entsprechenden s Stäben des Fachwerks $\mathfrak{F}_k$ wirkend, so werden die resultirenden äusseren Kräfte mit den gegebenen identisch sein, weil die Gliederung des erweiterten Kräfteplans die Lösung des Spannungsproblems in Evidenz setzt. Unser ursprüngliches Spannungsproblem hätte also mehr als eine Lösung. Weiterhin ist es nicht schwer zu sehen, dass der erweiterte Kräfteplan ein stabiles Fachwerk mit zwei überzähligen Stäben ist*). Lassen wir nämlich etwa den Seilstrahl CK_{n-1} und die Kräftepolygonseite $K_{n-1}K_0$ fort und nehmen an, der erweiterte Kräfteplan würde dadurch instabil, so würde durch analoge Schlüsse wie eben folgen, dass einer zweiten hierdurch bedingten Spannungsvertheilung entsprechend in den Knotenpunkten $P_1, P_2, \ldots, P_{n-2}$ die gegebenen äusseren Kräfte resultiren müssten, während die Kraft in P_{n-1} wenigstens die gegebene Richtung haben müsste; dann müssten aber auch die Kräfte in P_{n-1} und P_n die gegebenen sein (vergl. S. 159 u.), sodass unser Spannungsproblem wieder mehr als eine Lösung hätte. Nun beweist man in analoger Weise, dass der erweiterte Kräfteplan bei Fortlassung jedes weiteren Stabes instabil wird, indem wir von unserer Grundvoraussetzung auf S. 167 Gebrauch machen. Darnach können wir nämlich entsprechend der Aenderung der Richtung jedes Stabes von $\mathfrak{F}_k$ oder jeder Angriffslinie in $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ oder jeder Seilpolygonseite $S_nS_1, S_1S_2, \ldots, S_{n-2}S_{n-1}$ einen Kräfteplan finden, und die Aenderung jeder dieser Richtungen für sich ist ja möglich (vergl. S. 158 u. 159). Lassen wir also CK_{n-1} und $K_{n-1}K_0$ fort, so kann die Richtung jedes andern Stabes des erweiterten Kräfteplanes ohne Aenderung der übrigen verändert werden, *der erweiterte Kräfteplan ist also nach Fortlassung der Stäbe CK_{n-1} und $K_{n-1}K_0$ ein einfaches, stabiles Fachwerk*, es muss folglich die Gleichung bestehen: $2(n+k)-5=2(n+p+1)-3$ oder:

$$p = k - 2.$$

*) Vergl. S. 159 o.

Um hieraus weitere Schlüsse zu ziehen, schicken wir einige Definitionen und Hülfssätze voraus. Unter einem *einfachen Polygone* verstehen wir ein geschlossenes Polygon, das zwar überschlagen sein kann, von dem aber keine zwei Ecken zusammenfallen. Wir sprechen ferner von *einer vollständigen Zerlegung eines Fachwerks in p einfache Polygone*, wenn die Stäbe so als die Seiten von p einfachen Polygonen angeordnet werden können, dass jeder Stab die gemeinsame Seite von zwei und nur zwei Polygonen ist. Eine solche vollständige Zerlegung eines Fachwerks wollen wir *zusammenhängend* nennen, wenn man dadurch, dass man von einem Polygone ausgehend an dieses ein zweites ansetzt das mit dem ersten eine oder mehrere Seiten gemein hat, an diese ebenso ein drittes u. s. f., schliesslich zu allen Polygonen der Zerlegung kommen kann. Dann können wir folgenden Hülfssatz beweisen, bei dem, wie wir ausdrücklich bemerken wollen, keinerlei Voraussetzung über Stabilität oder Einfachheit des Fachwerks gemacht wird. Der Satz lautet:

12. *Hat man eine vollständige und zusammenhängende Zerlegung eines Fachwerks mit k Knotenpunkten und s Stäben in p einfache Polygone, so ist stets* $p \leqq s - k + 2$*).

Seien nämlich die Polygone in eine Reihenfolge

$$(Q_1), (Q_2), \ldots, (Q_a), \ldots, (Q_p)$$

ihrer Ansetzung gebracht, und bezeichne q_a die bei der Ansetzung von (Q_a) nöthige Anzahl verschiedener Reihen aufeinander folgender *neuer* Stäbe und t_a die Anzahl der zwei neuen Stäben gemeinsamen Ecken, welche nach schon vorhandenen Ecken fallen, so vermehrt sich offenbar die Zahl $s - k$ bei Ansetzung von (Q_a) um $q_a + t_a$. Denn bei Ansetzung jeder Reihe aufeinander folgender neuer Stäbe wird ein Stab mehr angesetzt als Ecken, falls diese alle neu sind; die Zahl 1

*) Man vergl. hiermit die Behauptung von Grübler auf S. 4 der o. a. Schrift: *„dass die Anzahl ν der von den Stäben gebildeten Polygone, falls jeder Stab nur zweien derselben angehören soll, nur die beiden Werthe* $s-(k-1)$ *und* $s-(k-1)+1$ *haben kann,“* welcher die Zerlegung des mehrfach benutzten Fachwerks mit sechs Knotenpunkten (Fig. 1) in die *drei* Sechsecke $P_1P_2P_3P_6P_5P_4(P_1)$, $P_2P_3P_4P_1P_6P_5(P_2)$ und $P_3P_4P_5P_2P_1P_6(P_3)$ offenbar widerspricht. (Diese Zerlegung hat mir Friedrich Schilling mitgetheilt). Es wird hiernach überflüssig sein, die Unzulänglichkeit des Grübler'schen Beweises darzuthun, die eben in der ganzen Methode liegt. Die analytische Beweisführung kann hier überhaupt nur auf solche Fachwerke angewendet werden, für welche die Richtungen der Stäbe unabhängig von einander sind, während die betreffenden Sätze rein topologischer Natur sind und nur von den Zahlen s und k abhängen. Es mag schliesslich noch bemerkt werden, dass die obigen scharfen Begriffsbestimmungen bei Grübler ganz fehlen. Ohne diese lässt sich aber nichts beweisen. So kann man z. B., wenn der Zusammenhang der Zerlegung aufgegeben wird, auch Fachwerke construiren, für die es eine vollständige Zerlegung in mehr als $s - k + 2$ Polygone giebt.

vermehrt sich also jedesmal noch um die Zahl der zwei neuen Stäben gemeinsamen Ecken, welche in alte Ecken fallen; hierbei sind $q_a = t_a = 0$ zu setzen, falls das Polygon aus lauter schon vorhandenen Stäben besteht. Es ist hiernach die Vermehrung von $s - k$ um $q_a + t_a - 1$ grösser als die von p. Hiernach ist sicher:

$$p = s - k + 1 - \sum_{a=2}^{p} (q_a + t_a - 1).$$

Es wird also darauf ankommen, zu beweisen, dass diese letzte Summe nicht dadurch, dass öfters der Fall $q_a = t_a = 0$ eintritt, < -1 werden kann.

Nun wird doch vor Beendigung unseres Ansetzungsprocesses immer eine Reihe von Stäben nur in einem Polygone vorkommen, diese Stäbe werden jedesmal ein oder mehrere einfache Polygone bilden, welche wir *Randpolygone* nennen wollen. Denn durchlaufen wir die Reihe der Polygone, die sich um den Endpunkt eines Randstabes an das diesen enthaltende Polygon mit durch den Endpunkt gehenden Stäben ansetzen, so finden wir, dass durch jeden Endpunkt eines Randstabes mindestens noch ein zweiter Randstab gehen muss. Am Anfange unseres Processes ist ja 1 die Anzahl dieser einfachen Randpolygone. Sei nun nach Ansetzung von (Q_2) die Anzahl der einfachen Randpolygone r, und durchlaufen wir (Q_2) in irgend einem Sinne, so werden wir offenbar von einem Randpolygone zu einem anderen nur gelangen können durch eine Reihe auf einander folgender Stäbe von (Q_2), die zugleich (Q_1) angehören, oder bei Ueberschreitung eines Eckpunktes von (Q_1), in dem zwei neue Stäbe von (Q_2) zusammenstossen. Da nun keins der einfachen Randpolygone aus Stäben von (Q_1), das selbst einfach ist, allein bestehen kann, so ist sicher $r \leq q_2 + t_2$; denn man braucht ja auf einem jener Verbindungswege nicht in ein noch nicht passirtes Polygon zu kommen. Durch Ansetzung des Polygons (Q_2) kann sich also die Anzahl der Randpolygone um höchstens $q_2 + t_2 - 1$ vermehren. Ganz ebenso ergiebt sich, dass die Anzahl der Randpolygone, die nach Ansetzung von (Q_a) an (Q_a) anstossen, höchstens $q_a + t_a$ sein kann. Sind daher diese Randpolygone aus ϱ alten entstanden — und aus *einem* alten müssen sie mindestens entstanden sein — so hat sich bei Ansetzung von (Q_a) die Zahl der einfachen Randpolygone um höchstens $q_a + t_a - \varrho$ vermehrt. Da sich für den Fall $q_a = t_a = 0$ die Zahl der einfachen Randpolygone um 1 vermindert, so können wir jedenfalls sagen, dass die Zahl der einfachen Randpolygone vor Ansetzung von (Q_p) höchstens gleich

$$1 + \sum_{a=2}^{p-1} (q_a + t_a - 1)$$

sein kann. Da aber diese Zahl thatsächlich 1 ist, so folgt in der That, dass

$$\sum_{a=1}^{p}(q_a + t_a - 1)$$

nicht kleiner als -1 werden darf; unser Satz ist folglich bewiesen.

Aus unserem Satze ergiebt sich unmittelbar der folgende:

13. *Eine vollständige und zusammenhängende Zerlegung eines Fachwerks mit k Knotenpunkten und $2k-3$ Stäben kann höchstens $k-1$ einfache Polygone enthalten.*

Ehe wir hiervon weitere Anwendungen machen, bemerken wir, dass wir dem erweiterten Kräfteplane $\mathfrak{K}$ entsprechend auch ein *erweitertes Fachwerk* $\mathfrak{F}$ haben werden, das durch Erweiterung des Fachwerks $\mathfrak{F}_k$ um die Ecken und Seiten des Seilpolygons und den Stäben $S_a P_a$ entsteht, die in die Angriffslinien der äusseren Kräfte fallen. Da die Seiten des Seilpolygons noch parallel mit sich selbst verschoben werden können, so ist das erweiterte Fachwerk $\mathfrak{F}$ ein instabiles Fachwerk mit $k+n$ Knotenpunkten und $2(k+n)-3$ Stäben.

Für den erweiterten Kräfteplan haben wir offenbar der Definition gemäss eine vollständige Zerlegung in $k+n$ Polygone. Von diesen sind die n Dreiecke, welche den Ecken des Seilpolygons entsprechen, sicher einfach, und es frägt sich, ob dasselbe auch von den k Polygonen gilt, welche den Knotenpunkten von $\mathfrak{F}_k$ entsprechen. Das würde sicher der Fall sein, wenn unsere Zerlegung zusammenhängend wäre. Denn zerfielen dann jene k Polygone in $k+k'$ einfache, so müsste nach Satz 12 sein:

$$n + k + k' \leqq 2(k+n) - 3 - (k+n-1) + 2 = k + n,$$

es müsste also $k' = 0$, also jedes Polygon einfach sein. Wäre aber unsre Zerlegung nicht zusammenhängend, zerlegte sie vielmehr den erweiterten Kräfteplan $\mathfrak{K}$ in i Theile $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_i$, für welche je eine zusammenhängende vollständige Zerlegung vorläge, und hätte jeder dieser Theile $\varkappa_a$ einfache Polygone, s_a Stäbe und $\varkappa_a$ Knotenpunkte, so wäre entweder höchstens für einen Theil $s_a - 2 = 2\varkappa_a - 3$ oder für zwei Theile $s_a - 1 = 2\varkappa_a - 3$, für alle andern Theile aber sicher $s_a \leqq 2\varkappa_a - 3$, da sonst $\mathfrak{K}$ mehr als zwei überzählige Stäbe enthielte. Es folgt daher durch Addition:

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_i - 2 = 2(k+n) - 5 \leqq 2(\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_i) - 3i,$$

also:

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_i \geqq k + n - 1 + \tfrac{3}{2}(i-1).$$

Den i Theilen von $\mathfrak{K}$ entsprechend müsste aber auch das erweiterte Fachwerk $\mathfrak{F}$ in i Theile mit je s_a Stäben und mit je höchstens $\varkappa_a$

Knotenpunkten zerfallen, insofern zwei Polygonen desselben Theiles derselbe Knotenpunkt im Fachwerk entsprechen könnte. Es ist also, da $\mathfrak{F}$ nicht aus Theilen nicht-einfacher Gliederung bestehen kann, jedenfalls: $s_\alpha \leqq 2\pi_\alpha - 3$. Daraus folgt:

$$2(k+n) - 3 \leqq 2(\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_i) - 3i$$

oder:

$$\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_i \geqq k + n + \tfrac{3}{2}(i-1).$$

Nun gilt aber für jeden Theil $\mathfrak{F}_\alpha$ die Ungleichung:

$$\pi_\alpha \leqq s_\alpha - \varkappa_\alpha + 2,$$

woraus folgt:

$$\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_i \leqq 2(k+n) - 3 - \left(k + n - 1 + \tfrac{3}{2}(i-1)\right) + 2i$$

$$\leqq k + n + \tfrac{1}{2}(i-1),$$

welche beide Ungleichungen offenbar nur für $i = 1$ und unter Annahme des Gleichheitszeichens mit einander verträglich sind. Hiermit ist also bewiesen, dass *der erweiterte Kräfteplan den $k+n$ Knotenpunkten des erweiterten Fachwerks entsprechend in $k+n$ einfache Polygone zerlegt sein muss.* Es mag hervorgehoben werden, dass dies Resultat natürlich auf unserer Grundvoraussetzung beruht, dass die Existenz des Kräfteplanes nicht von den Richtungen seiner Seiten abhänge.

Nun ist weiter klar, dass *in jedem Eckpunkte Q_α des Kräfteplanes mehr als zwei Stäbe zusammenlaufen müssen;* denn sonst könnte man die Richtung eines solcher zwei Stäbe abändern, ohne dass sich die Richtungen der übrigen Stäbe des erweiterten Kräfteplanes ändern, dieser könnte also nicht zwei überzählige Stäbe haben, es müsste denn in dem entsprechenden Stabe des Fachwerks bei jeder zulässigen Annahme der äusseren Kräfte keine Spannung herrschen, die Richtung des Stabes im Kräfteplane also an sich unbestimmt werden. Es wird deshalb gut sein, diese Möglichkeit überhaupt einmal ins Auge zu fassen.

Soll in einem oder mehreren Stäben des Fachwerkes bei allen möglichen Richtungen der Stäbe des erweiterten Fachwerks keine Spannung herrschen, so werden die übrigen s' Stäbe von $\mathfrak{F}_k$ ein Fachwerk $\mathfrak{F}_{k'}$ mit k' Knotenpunkten bilden; denn ein gespannter Stab darf bei beliebiger Richtung keinen Endpunkt haben, in dem sonst lauter spannungslose Stäbe zusammenstossen, da auch die in dem Endpunkte etwa angreifende Kraft beliebig ist. Existirt nun für $\mathfrak{F}_k$ ein Kräfteplan, so ist er zugleich ein Kräfteplan für $\mathfrak{F}_{k'}$, von dessen Erweiterung man genau in derselben Weise wie oben zeigt, dass er ein stabiles Fachwerk mit zwei überzähligen Stäben ist, für das eine vollständige Zerlegung in mindestens $n + k'$ einfache Polygone vorliegt. Zerfiele diese Zerlegung

wieder in i zusammenhängende, denen Theile des erweiterten Kräfteplanes mit je s_a' Stäben, $\varkappa_a'$ Knotenpunkten und π_a' einfachen Polygonen entsprechen, so beweist man in analoger Weise wie oben, dass:

$$\varkappa_1' + \varkappa_2' + \cdots + \varkappa_i' \geqq \frac{s'+2n+1}{2} + \frac{3}{2}(i-1),$$

$$\pi_1' + \pi_2' + \cdots + \pi_i' \geqq \frac{s'+2n+3}{2} + \frac{3}{2}(i-1)$$

und

$$\pi_1' + \pi_2' + \cdots + \pi_i' \leqq \frac{s'+2n+3}{2} + \frac{1}{2}(i-1),$$

sodass $i = 1$ und $k' \leqq \frac{s'+3}{2}$ sein muss. Da nun wegen der Einfachheit des Fachwerks $\mathfrak{F}_k$ nicht $s' > 2k' - 3$ sein darf, so ist $s' = 2k' - 3$; aus demselben Grunde hat daher $\mathfrak{F}_{k'}$ die Gliederung eines einfachen stabilen Fachwerks, ist also wegen der Veränderlichkeit der Richtungen seiner Stäbe selbst stabil. Der von uns angenommene Fall erlaubt demnach das Problem dahin zu vereinfachen, dass statt $\mathfrak{F}_k$ das einfache stabile Fachwerk $\mathfrak{F}_{k'}$ zu behandeln ist. *Wir werden also annehmen können, dass die Stäbe des Kräfteplanes sämmtlich von Null verschieden sind*, also durch jeden seiner Eckpunkte Q_a mindestens drei Stäbe laufen.

Nun sieht man auch leicht, dass niemals zwei Polygone des Kräfteplanes mehr als eine Seite gemein haben dürfen, weil sonst durch die ihnen entsprechenden Knotenpunkte des Fachwerks mindestens ein Paar paralleler Stäbe laufen müsste, was man durch Veränderung der Richtung eines Stabes immer vermeiden kann. Durchlaufen wir daher die in einem Eckpunkte Q_a des Kräfteplanes zusammenstossenden Polygone in der Reihenfolge ihrer Ansetzung an die Stäbe durch Q_a, so finden wir, dass jedem Punkte Q_a ein oder mehrere einfache Polygone im Fachwerke entsprechen*). Da dasselbe vom Pole C, dem ja das Seilpolygon entspricht, und den Eckpunkten des Kräftepolygons gilt, so folgt aus der Existenz eines Kräfteplanes eine vollständige Zerlegung des erweiterten Fachwerks $\mathfrak{F}$ in mindestens $k+n-1$ einfache Polygone. Durch Wiederholung der mehrfach angewendeten Schlüsse findet man dann wieder, dass diese Zerlegung zusammenhängend sein muss, also jedem der $k+n-1$ Knotenpunkte des erweiterten Kräfteplanes gerade ein einfaches Polygon des erweiterten Fachwerks entsprechen muss; *zwischen beiden Figuren besteht also vollkommene Reciprocität.*

*) S. Petersen, a. a. O. S. 156. Was die weiteren Sätze von Petersen betrifft, so halten wir dieselben theils für praktisch unbrauchbar zur Entscheidung über die Existenz eines Kräfteplanes, theils haben wir uns nach den kurzen Andeutungen, die von ihren Beweisen gegeben sind, nicht überzeugen können, dass Petersen wirklich im Besitze strenger Beweise dieser Sätze gewesen ist. Einige Sätze verlieren z. B. ihre Gültigkeit, wenn man den Zusammenhang der Zerlegung aufgiebt, während ein diesbezüglicher Vorbehalt nirgends gemacht wurde.

Unter den $n + k - 1$ einfachen Polygonen des erweiterten Fachwerks interessiren uns hauptsächlich diejenigen $k - 2$, welche dem Fachwerke $\mathfrak{F}_k$ selbst ganz und gar angehören. Diese Polygone bilden offenbar keine vollständige Zerlegung von $\mathfrak{F}_k$, es kommen vielmehr eine Reihe von Stäben nur in je einem Polygone vor. Diese sogenannten *Randstäbe* gehören nach Satz 13 offenbar einem einfachen *Randpolygone* an, das die Zerlegung von $\mathfrak{F}_k$ vervollständigt. Hiernach ***hängt die Existenz eines Kräfteplanes für ein einfaches, stabiles Fachwerk*** $\mathfrak{F}_k$ ***nothwendig ab von der Möglichkeit, eine vollständige und folglich auch zusammenhängende Zerlegung von*** $\mathfrak{F}_k$ ***in*** $k - 1$ ***einfache Polygone zu finden.***

Um diese nothwendige Bedingung für die Existenz eines Kräfteplanes auch als hinreichend nachzuweisen, müssen wir die Beziehung je zweier dieser Polygone zu einander studiren. Bei diesen Betrachtungen sind natürlich nur die Gliederung und nicht die Richtungen der Stäbe wesentlich, sodass man die letzteren z. B. alle als von einander verschieden annehmen kann. Ueberhaupt können wir zunächst von einem Fachwerk mit k Knotenpunkten und s Stäben ausgehen, für das eine vollständige und zusammenhängende Zerlegung in $p = s - k + 2$ einfache Polygone vorliegt.

Da bemerken wir denn zuerst, dass *die um einen Punkt* P_a *von* $\mathfrak{F}_k$ *gelagerten Polygone niemals mehr als einen zusammenhängenden Cyklus bilden dürfen.* Sonst könnte man nämlich ein Fachwerk mit ebenso viel Stäben, aber mindestens einem Knotenpunkte mehr construiren, für das dem Satze 12 zuwider eine vollständige und zusammenhängende Zerlegung in $s - k + 2$ einfache Polygone existirte; man braucht dazu nur die Endpunkte der einem zweiten Cyklus angehörigen Stäbe durch P_a mit irgend einem anderen Punkte der Ebene zu verbinden.

Aus dieser Bemerkung folgt sofort, dass durch einen Knotenpunkt, in welchem zwei gemeinsame Seiten zweier Polygone der Zerlegung zusammenstossen, kein weiterer Stab laufen darf; denn sonst gehörte diesem Knotenpunkte mehr als ein Cyklus zu.

Nehmen wir nun an, ein Polygon $(Q) = P_1 P_2 \ldots P_i$ der Zerlegung habe mit dem Vierecke $P_1 P_2 P_a P_{a+1}$ die beiden Seiten $P_1 P_2$ und $P_a P_{a+1}$ und nur diese gemein. Dann würden doch nach Fortlassung dieser beiden Seiten aus (Q) und dem Vierecke zwei neue einfache Polygone $P_1 P_{a+1} P_{a+2} \ldots P_i$ und $P_2 P_3 \ldots P_a$ entstehen, und wir hätten für ein Fachwerk mit k Knotenpunkten und $s - 2$ Stäben eine vollständige Zerlegung in $s - k + 2$ einfache Polygone. Dann kann nach Satz 12 diese Zerlegung sicher nicht zusammenhängend sein. Da aber der Zusammenhang des Cyklus in keinem Knotenpunkte aufgehoben ist — in P_1, P_2, P_a, P_{a+1} wird ja nur ein Stab fortgelassen, aber die anstossenden Stäbe werden je durch ein neues Polygon ver-

bunden —, so muss das neue Fachwerk nothwendig aus zwei Fachwerken, denen je eins der obigen beiden Polygone angehört, bestehen, und diese beiden Fachwerke dürfen keinen Knotenpunkt gemein haben. Da diese beiden Theile folglich im ursprünglichen Fachwerke nur durch die beiden Stäbe $P_1 P_2$ und $P_a P_{a+1}$ zusammenhängen können, so ist es für ein stabiles Fachwerk ausgeschlossen, dass irgend ein Polygon der Zerlegung mit einem Vierecke zwei gegenüberliegende Seiten und nur diese gemein habe.

Auf diesen Fall können wir aber jeden andern Fall, in dem zwei Polygone der Zerlegung zwei nicht zusammenstossende Seiten gemein haben, durch Einziehung gewisser idealer Stäbe zurückführen. Diese *idealen Stäbe* werden gezogen von einem Eckpunkte eines Polygons nach einem idealen Knotenpunkte, der auf einer Seite des Polygons liegt. Da die Seite hierdurch in zwei Stäbe zerfällt, so treten beim Einziehen eines solchen idealen Stabes zwei neue Stäbe, ein neuer Knotenpunkt und ein neues Polygon hinzu, während im Uebrigen das Fachwerk stabil und einfach und seine Zerlegung in eine Anzahl einfacher Polygone, die um eins geringer ist als die Anzahl der Knotenpunkte, vollständig und zusammenhängend bleibt. Das Object der Untersuchung behält also alle seine charakteristischen Eigenschaften bei.

Nehmen wir nun an, ein Polygon (Q) hätte mit einem Polygone (Q') ausser dem Stabe $P_1 P_2$ noch einen nicht daran stossenden Stab $P_a P_{a+1}$ gemein, so ziehen wir die beiden idealen Stäbe $P_1 P'_{a+1}$ und $P_a P_2'$ ein, wo P'_{a+1} auf $P_a P_{a+1}$ und P_2' auf $P_1 P_2$ liegen möge. Wir hätten also ein Fachwerk mit einer Zerlegung, in welcher ein Viereck mit einem andern Polygone zwei gegenüberliegende Seiten und nur diese gemein hätte. Da wir das für ein stabiles Fachwerk als unmöglich nachgewiesen haben, so erhalten wir den folgenden Satz:

14. *Je zwei Polygone einer vollständigen und zusammenhängenden Zerlegung eines einfachen, stabilen Fachwerks* $\mathfrak{F}_k$ *in* $k-1$ *einfache Polygone können höchstens zwei Stäbe gemein haben; diese müssen dann in einem Knotenpunkte zusammenstossen, durch welchen kein weiterer Stab des Fachwerks läuft.*

Nunmehr gehen wir von einem bestimmten einfachen und stabilen Fachwerke aus, für das eine vollständige und zusammenhängende Zerlegung in $k-1$ einfache Polygone gefunden sei. Von diesen Polygonen zeichnen wir eins als das *Randpolygon* aus, das dann mit jedem der $k-2$ übrigen Polygone in der durch den Satz bezeichneten Beziehung steht. Die Fortlassung dieses Randpolygons kann dann den Zusammenhang der übrigen nicht aufheben; denn jedem zusammenhängenden Complexe dieser Polygone müsste ja mindestens ein einfaches Randpolygon zugehören (vergl. S. 170).

Was nun die äusseren Kräfte betrifft, so ist klar, dass *sie nur in den Eckpunkten dieses Randpolygons angreifen dürfen;* denn jedem inneren Stabe müsste im Kräfteplane ein Stab entsprechen, welcher keinen Eckpunkt des Kräftepolygons enthält, also auch einem inneren Knotenpunkte ein Polygon, das keine Seite mit dem Kräftepolygone gemein hat. Wir können desshalb zuerst alle inneren Knotenpunkte mit nur zwei Stäben fortlassen, da je zwei solche Stäbe spannungslos sein werden. Hierbei gehen je ein Knotenpunkt und je zwei Stäbe verloren, sodass das neue Fachwerk einfach und stabil bleibt, es gehen daher auch die beiden Polygone, welchen die beiden Stäbe gemeinsam sind, nach Satz 13 jedesmal in ein einfaches Polygon über. Das neue Fachwerk behält also alle charakteristischen Eigenschaften, nur können jetzt, wenn wir das Randpolygon ausnehmen, je zwei der anderen Polygone, die wir *eigentliche Polygone* der Zerlegung nennen wollen, nur einen Stab gemein haben.

Die in den Randknotenpunkten angreifenden äusseren Kräfte ordnen wir nunmehr nach der Aufeinanderfolge ihrer Angriffspunkte im Randpolygone zu einem geschlossenen Kräftepolygone $K_0K_1 \ldots K_{n-1}K_0$. Dann können wir den simplen Process der Zerlegung so lange vornehmen, als zweistäbige Randknotenpunkte vorhanden sind. Jedem solchen Knotenpunkte entsprechend wird ein Polygon abgetrennt, dessen entsprechender Punkt im Kräfteplane ein Eckpunkt des Kräftepolygons für das durch Fortlassung des Knotenpunktes entstehende Fachwerk ist (vergl. S. 167). Es ist nach Analogie früherer Beweise leicht zu erkennen, dass auch dies Fachwerk alle charakteristischen Eigenschaften behält.

Sind nun einmal am neuen Rande des Fachwerks $\mathfrak{F}_k$ keine zweistäbigen Knotenpunkte mehr vorhanden, so *muss mindestens ein Randstab* $P_\alpha P_{\alpha+1}$ *durch eine solche Diagonale eines der eigentlichen Polygone der Zerlegung ersetzt werden können, dass das neue Fachwerk auch stabil ist.* Ist nämlich $\mathfrak{F}_k'$ eins der Fachwerke, das sich von $\mathfrak{F}_k$ nur in der Richtung des $P_\alpha P_{\alpha+1}$ entsprechenden Stabes, aber in dieser wirklich unterscheidet, so wird das durch Fortlassung von $P_\alpha P_{\alpha+1}$ und Einfügung einer gewissen Diagonale entstehende Fachwerk stabil sein oder nicht, je nachdem die dieser Diagonale in $\mathfrak{F}_k'$ entsprechende Diagonale eine andere Richtung hat oder nicht. Nun sind aber zwei entsprechende Polygone ähnlich und ähnlich gelegen, wenn alle entsprechendsn Seiten und Diagonalen je dieselbe Richtung haben; denn der Fall, dass alle Seiten und folglich auch alle Diagonalen eines Polygons gleiche Richtung haben, ist ausgeschlossen, weil das Fachwerk sonst einen Stab enthielte, dessen Richtung durch diejenigen der übrigen bestimmt wäre. Weiter ist klar, dass jeder Complex zusammenhängender Polygone von $\mathfrak{F}_k$, denen in $\mathfrak{F}_k'$ ähnliche und

ähnlich gelegene Polygone entsprechen, ein Fachwerk bildet, dem in $\mathfrak{F}_{k'}$ ein ähnliches und ähnlich gelegenes Fachwerk entspricht.

Würde es nun unmöglich sein für den Stab $P_a P_{a+1}$ eine solche Diagonale eines der eigentlichen Polygone so einzufügen, dass das neue Fachwerk wieder stabil ist, so entspricht sicher, von dem $P_a P_{a+1}$ enthaltenden Polygone (Q_b) abgesehen, jedem Polygone von $\mathfrak{F}_{k'}$ ein ihm ähnliches und ähnlich gelegenes in $\mathfrak{F}_{k'}$; was (Q_b) selbst betrifft, so könnte es ein Dreieck sein oder z. B. ein Viereck, von dem zwei der drei andern Seiten gleiche Richtung haben, sodass hier im Allgemeinen nicht auf seine Aehnlichkeit zu (Q_b') geschlossen werden darf. In der That müssen wir vielmehr schliessen, dass die Fortlassung von (Q_b) den Zusammenhang unserer Zerlegung aufhebt, weil sonst auch $\mathfrak{F}_{k'}$ zu $\mathfrak{F}_{k'}$ ähnlich und ähnlich gelegen wäre gegen die Voraussetzung. Da aber unsere zusammenhängende Zerlegung durch Fortlassung von (Q_b) in höchstens zwei zusammenhängende Complexe von Polygonen zerfallen kann, so besteht $\mathfrak{F}_{k'}$ nach Fortlassung von $P_a P_{a+1}$ aus zwei Theilfachwerken, denen zwei ähnliche und ähnlich gelegene Fachwerke in $\mathfrak{F}_{k'}$ entsprechen müssen. Diese beiden Theilfachwerke dürfen folglich, da $\mathfrak{F}_{k'}$ zu $\mathfrak{F}_{k'}$ nicht ähnlich und ähnlich gelegen ist, nur einen Knotenpunkt gemein haben, der offenbar ein am Rande gelegener Eckpunkt von (Q_b) ist, weil nur in einem solchen der Zusammenhang der um ihn gelagerten Polygone durch (Q_b) aufgehoben werden kann; die beiden Theilfachwerke sind daher beide stabil. *Falls es also unmöglich ist, für den einzigen Randstab $P_a P_{a+1}$ des Polygons (Q_b) eine solche Diagonale in eines der eigentlichen Polygone der Zerlegung einzufügen, dass wieder ein stabiles Fachwerk entsteht, so besteht das Fachwerk aus zwei stabilen Theilen, die durch einen Eckpunkt von (Q_b) und den Stab $P_a P_{a+1}$ mit einander verbunden sind.*

Nunmehr ist es leicht zu sehen, dass nach Fortlassung aller zweistäbigen Knotenpunkte nicht für alle Randstäbe diese Unmöglichkeit vorliegen kann. Dann würde nämlich jedes der beiden Theilfachwerke, deren Rand ja einerseits aus Stäben des trennenden Polygons und andrerseits aus auf einander folgenden alten Randstäben besteht, wieder in zwei Theile zerfallen, von denen einer dieselbe Art der Berandung besitzt, dieser wieder u. s. f., sodass wir schliesslich auf ein stabiles Polygon, also ein Dreieck kommen müssten; da dieses aber mit dem zuletzt fortgelassenen Polygone nur eine Seite gemein haben kann, so enthielte es zwei alte Randstäbe, die nach unserem Satze nur in einem zweistäbigen Knotenpunkte zusammenstossen können. Sind also wirklich alle zweistäbigen Knotenpunkte fortgelassen, so muss irgend ein Randstab $P_a P_{a+1}$ existiren, der durch eine solche Diagonale eines eigentlichen Polygons ersetzt werden kann, dass das dadurch entstehende Fachwerk stabil bleibt. Hierbei tritt entweder an Stelle von

(Q_b) eins der Polygone, in welche (Q_b) durch die Diagonale zerlegt wird, oder ein anderes Polygon wird in zwei zerlegt. Wir haben also wieder ein Fachwerk mit den mehrfach bezeichneten charakteristischen Eigenschaften.

Soll aber bei dieser Veränderung des gegebenen Fachwerks das Spannungsproblem nicht verändert werden, so werden wir in P_a und P_{a+1} die Kräfte $s_{a+1,a}$ und $s_{a,a+1}$ anbringen müssen. Sind diese Kräfte durch $K_a Q_b$ resp. $Q_b K_a$ dargestellt, so wirken in P_a und P_{a+1} die durch die Seiten $K_{a-1} Q_b$ und $Q_b K_{a+1}$ des neuen Kräftepolygons dargestellten Kräfte, wobei in der Diagonale natürlich die Spannung Null resultirt. Die Bestimmung von Q_b kann hierbei nach Satz 11 geschehen. Man hat also nur für das Kräftepolygon $K_a K_{a+1} \dots K_0 K_1 \dots K_{a-1} K_a$ und die den Seiten desselben parallelen Angriffslinien durch $P'_{a+1} \dots P'_{a-1} P'_a$ den Pol Q_b auf einer Parallelen durch K_a zu $P_a P_{a+1}$ eines solchen Seilpolygons zu finden, dass die erste Seite durch P'_{a+1} und die letzte durch P'_a geht.

Indem man so fortfährt, also entweder den zuletzt beschriebenen Process wiederholt oder eine Kraft nach zwei Stäben eines zweistäbigen Knotenpunktes zerlegt, wird man schliesslich auf ein Dreieck kommen, das Seilpolygon für die drei in seinen Ecken angreifenden Kräfte sein muss, der zugehörige Pol vervollständigt also den Kräfteplan. In der Ueberbestimmtheit dieses letzten Punktes kommt wieder die Thatsache zum Ausdruck, dass der erweiterte Kräfteplan ein stabiles Fachwerk mit zwei überzähligen Stäben ist, als welche man eine Seite des Kräftepolygons und einen dieser letzten drei Stäbe, welche den Seiten des Dreiecks entsprechen, betrachten kann. Bei diesem Verfahren werden die Punkte des Kräfteplanes, die Theilen eines der ursprünglichen Polygone entsprechen, von selbst zusammenfallen. Wir können das Resultat unserer Betrachtungen in den folgenden Satz zusammenfassen:

15. *Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die in einem einfachen, stabilen Fachwerke $\mathfrak{F}_k$ unter dem Einflusse äusserer Kräfte entstehenden Spannungen sich zu einem Kräfteplane ordnen lassen, ist die, dass erstens für $\mathfrak{F}_k$ eine vollständige und zusammenhängende Zerlegung in $k-1$ einfache Polygone existire, und dass zweitens die äusseren Kräfte nur in den Eckpunkten eines solchen Polygons angreifen. Der durch Hinzufügung der Seilstrahlen erweiterte Kräfteplan ist dann ein stabiles Fachwerk mit zwei überzähligen Stäben.*

Wir haben bei dem Beweise für die Existenz eines Kräfteplanes einen Weg eingeschlagen, der auch praktisch zur wirklichen Herstellung des Kräfteplanes in den meisten Fällen der geeignetste zu sein scheint und deutlich die Vortheile erkennen lässt, welche die Möglichkeit der Anordnung der Spannkräfte zu einem Kräfteplane bei ihrer Bestimmung gewährt. Man nimmt zuerst den simplen Process der Zerlegung

je einer Kraft nach je zwei Componenten durch Ziehen von je zwei Parallelen so lange vor, als zweistäbige Randknotenpunkie vorhanden sind, wobei natürlich immer neue Knotenpunkte an den Rand treten können. Sind alle zweistäbigen Randknotenpunkte erschöpft, so construire man ein Fachwerk $\mathfrak{F}_k'$, das mit dem vorhandenen die Gliederung und die Richtungen aller Stäbe ausgenommen diejenige eines Randstabes $P_a P_{a+1}$ gemein hat, und bestimme mit Hülfe eines Seilpolygons den Punkt Q_b des Kräfteplanes, der dem $P_a P_{a+1}$ enthaltenden Polygone (Q_b) entspricht.

Die Construction von $\mathfrak{F}_k'$ kann im Anschlusse an die Zerlegung des Fachwerks geschehen, da ja hiernach das Fachwerk aus einem Dreiecke durch Ansetzung neuer Polygone so gebildet werden kann, dass jedes neue Polygon entweder mit zwei neuen Seiten, die in einer neuen Ecke zusammenstossen, oder mit einer neuen Seite angesetzt wird, in welchem Falle zugleich eine zwei alten Polygonen gemeinsame Seite oder Diagonale fortgelassen wird. Soll eine solche neue Seite $P_a P_{a+1}$ eine gegebene Richtung erhalten, so wird man zuerst zwei verschiedenen Richtungen des fortzulassenden Stabes entsprechend je zwei Lagen der Punkte P_a und P_{a+1} nämlich P_a', P_a'' und P_{a+1}', P_{a+1}'' bestimmen; werden dann die Geraden durch P_a' und P_a'' in der gegebenen Richtung von irgend zwei parallelen Geraden durch P_{a+1}' und P_{a+1}'' in R' resp. R'' geschnitten, so schneidet $R'R''$ die Gerade $P_{a+1}' P_{a+1}''$ in dem gesuchten Punkte P_{a+1}, woraus sich auch P_a auf $P_a' P_a''$ ergiebt.

Es braucht aber $P_a P_{a+1}$ keineswegs, wie wir es beim Beweise grösserer Uebersichtlichkeit wegen als erreichbar nachwiesen, stets durch eine Diagonale eines der Polygone ersetzbar sein. Ist das nicht der Fall, besteht also nach dem Obigen das Fachwerk aus zwei stabilen Fachwerken, die durch $P_a P_{a+1}$ und einen Eckpunkt P_c von (Q_b) mit einander verbunden sind, so bestimmt man Q_b sogar einfacher nach dem Culmann'schen Verfahren und kann dann für die beiden Theilfachwerke mit den geschlossenen Kräftepolygonen $Q_b K_{a+1} K_{a+2} \ldots K_c Q_b$ und $Q_b K_{c+1} K_{c+2} \ldots K_{a-1} Q_b$ jedes für sich in derselben Weise behandeln.

Man kann schliesslich, wenn die Existenz eines Kräfteplanes einmal nachgewiesen ist, das Problem seiner Construction auch direct auf die in § 2 gegebene Lösung der Fundamentalaufgabe zurückführen, ein einfaches Fachwerk zu construiren, von dem die Gliederung und die Richtungen der Stäbe gegeben sind, indem man eine Seite des Kräftepolygons und eine Stabkraft als überzählig fortlässt. Die Gliederung wird man sich zuerst nach der gegebenen Zerlegung des Fachwerks schematisch darstellen und alsdann vom Kräftepolygon ausgehend Anfangs ebenso verfahren wie oben, während man für den

Punkt Q_b zunächst zwei willkürliche Lagen Q_b' und Q_b'' auf der Parallelen durch K_a zu $P_a P_{a+1}$ annehmen wird; die wirkliche Lage von Q_b findet man dann in der Bedingung, dass zwei aus ihr folgende Punkte Q_b und Q_c in einer Geraden gegebener Richtung liegen müssen. Dieser Weg zur Construction des Kräfteplanes kommt auf die sogenannte méthode de fausse position von Saviotti*) hinaus; nur war es bisher nicht gelungen zu beweisen, dass er in jedem Falle zum Ziele führen muss. Welche von den beiden hier entwickelten Methoden zur Herstellung eines Kräfteplanes die kürzere ist, lässt sich bei der Mannigfaltigkeit der Fachwerke natürlich allgemein nicht entscheiden. Die erste Methode hat immerhin den Vortheil, dass sie unmittelbar an den Existenzbeweis des Kräfteplanes anknüpft und einen neuen Beweis für die Lösbarkeit des Spannungsproblems in diesem besonderen Falle liefert.

§ 5.

Herstellung vollständiger Zerlegungen durch schlichte Zerlegung des vom Fachwerke überdeckten Theiles der Ebene.

Das in Satz 15 ausgesprochene Resultat unserer Untersuchungen über Kräftepläne würde erst dann seine volle Bedeutung erhalten, wenn es uns gelänge, für jede Form des Spannungsproblems eine entsprechende vollständige Zerlegung zu finden. Diese Aufgabe ist allerdings nur unter gewissen Modificationen lösbar, die indessen die praktische Brauchbarkeit der darauf begründeten Lösung des Spannungsproblems nicht beeinträchtigen. Es ist nämlich leicht, eine solche Eigenschaft einer vollständigen Zerlegung eines einfachen, stabilen Fachwerks $\mathfrak{F}_k$ in $k-1$ einfache Polygone anzugeben, dass ihr Fehlen bei gewissen Fachwerken unmittelbar einleuchtend ist. Ist n die Anzahl der Ecken des Randpolygons, der Punkte also, in denen äussere Kräfte angreifen dürfen, enthält ferner unsere vollständige Zerlegung n_3 Dreiecke, n_4 Vierecke, ..., n_i i-Ecke, so ist:

$$1. \qquad n_3 + n_4 + \cdots + n_i = k - 2$$

und

$$2. \quad n + 3n_3 + 4n_4 + \cdots + in_i = 4k - 6.$$

Hieraus folgt:

$$n - 2 + n_5 + 2n_6 + \cdots + (i-4)n_i = n_3;$$

diese Formel können wir in dem folgenden Satze aussprechen:

*) Vgl. die Anm. auf S. 144. Auch bei Petersen a. a. O. S. 165 findet sich eine in dieser Richtung liegende Andeutung. Wie weit aber Petersen von der Erkenntniss der Natur des allgemeinen Problems entfernt war, geht aus seiner Behauptung auf S. 163 hervor, dass die hier zu lösende Constructionsaufgabe „sich nicht immer mittels Zirkel und Lineal lösen lasse".

16. *Ist n die Anzahl der Ecken des Randpolygons einer vollständigen Zerlegung eines einfachen, stabilen Fachwerks $\mathfrak{F}_k$ in übrigens $k-2$ einfache Polygone, so giebt es unter diesen mindestens $n-2$ Dreiecke**).

Nun haben wir in dem mehrfach von uns behandelten Fachwerke mit 6 Knotenpunkten ein solches kennen gelernt, welches gar keine Dreiecke enthält (s. Fig. 1), es giebt folglich sicher einfache, stabile Fachwerke, für welche die gewünschte Zerlegung nicht möglich ist. Die hiernach nothwendigen Modificationen unserer Forderung, dass ein Kräfteplan existire, werden sich durch einige weitere Folgerungen aus den obigen Gleichungen von selbst ergeben. Multiplicirt man nämlich die erste Gleichung mit 3 und subtrahirt sie von der zweiten so folgt:

$$3. \quad n_4 + 2n_5 + \cdots + (i-3)n_i = k - n.$$

Hiernach erhalten wir den Satz:

17. *Liegt eine vollständige Zerlegung eines einfachen stabilen Fachwerks $\mathfrak{F}_k$ in ein Randpolygon und $k-2$ weitere Polygone vor, so ist die Anzahl der inneren oder nicht am Rande gelegenen Knotenpunkte des Fachwerks gleich der Summe aus der Anzahl der Vierecke, der doppelten Anzahl der Fünfecke, der dreifachen Anzahl der Sechsecke u. s. f., die unter den $k-2$ Polygonen vorkommen.*

Besteht also eine Zerlegung vom Randpolygone abgesehen aus lauter Dreiecken, so liegen alle Knotenpunkte des Fachwerks auf dem Randpolygone, und es ist leicht zu sehen, dass man ein Fachwerk derselben Gliederung finden kann, für welches die Dreiecke die Ebene schlicht überdecken; denn betrachten wir irgend ein convexes Polygon mit k Ecken als das Randpolygon, so erhalten wir nach dem Früheren der Reihe nach alle Dreiecke durch Einziehen von Diagonalen, die zwei durch einen Eckpunkt getrennte Ecken des jedesmaligen hierbei immer convex bleibenden Randpolygons verbinden. Hierbei werden sich also niemals zwei Stäbe des Fachwerks überschneiden.

Haben wir umgekehrt ein einfaches, stabiles Fachwerk $\mathfrak{F}_k$, von dem sich niemals zwei Stäbe überschneiden, so zerlegt dasselbe offenbar den von ihm überdeckten Theil der Ebene in lauter einfache Polygone, und jeder Randstab gehört einem, jeder innere Stab zwei solchen Polygonen an. Da auch der Rand wegen der Stabilität des Fachwerks ein einfaches Polygon sein muss, so haben wir hier jedenfalls eine vollständige und zusammenhängende Zerlegung des Fach-

---

*) Es ist dies der richtige von Grübler a. a. O. S. 5 aufgestellte Satz, während z. B. der folgende Satz auf derselben Seite nach unserer Anmerkung auf S. 169 wieder falsch ist.

werks in einfache Polygone. Dass die Anzahl dieser Polygone $k-1$ ist, können wir folgendermassen erkennen. Wir können offenbar jedes Viereck durch eine, jedes Fünfeck durch zwei, . . ., jedes i-Eck durch $i-3$ Diagonalen in Dreiecke zerlegen, wodurch wir ein aus lauter Dreiecken bestehendes Fachwerk mit $n_4 + 2n_5 + \cdots + (i-3)n_i$ überzähligen Stäben erhalten werden. Dieses Fachwerk kann man sich daher aus einem Dreiecke dadurch entstanden denken, dass man neue Dreiecke entweder mit zwei neuen Seiten und einer neuen Ecke oder mit einer neuen Seite ansetzt. So lange nur Ansetzungen erster Art vorkommen, tritt offenbar niemals ein Knotenpunkt ins Innere, bei einer Ansetzung der zweiten Art wird aber gerade der der neuen Seite gegenüberliegende Eckpunkt des Dreiecks vom Rande getrennt. Da nun jede solche neue Seite überzählig ist, so ist die Anzahl der inneren Knotenpunkte gleich der Anzahl der überzähligen Stäbe, es gilt also die Gleichung 3.; aus ihr folgt unter Hinzuziehung von 2. auch die Gleichung 1., die zu beweisen war. Wir erhalten daher den Satz:

18. *Wenn sich von den Stäben eines einfachen, stabilen Fachwerks* $\mathfrak{F}_k$ *niemals zwei überkreuzen, so liefert die dadurch bedingte schlichte Eintheilung des vom Fachwerke überdeckten Theiles der Ebene unter Hinzunahme des Randpolygons zugleich eine vollständige Zerlegung des Fachwerks in* $k-1$ *einfache Polygone**).

Dieser Satz gewinnt dadurch eine besondere Bedeutung, dass er sich auch umkehren lässt und zwar in folgender allgemeinerer Form:

19. *Gelingt es, für ein Fachwerk* $\mathfrak{F}_k$ *mit* k *Knotenpunkten und* s *Stäben eine vollständige und zusammenhängende Zerlegung in*

$$p = s - k + 2$$

einfache Polygone zu finden, so kann man auf mehrfache Weise ein dem gegebenen Fachwerke gleich gegliedertes construiren, von dem sich niemals zwei Stäbe überschneiden; die schlichte Zerlegung des von diesem Fachwerke überdeckten Theiles der Ebene entspricht dann unter Hinzunahme des Randpolygons der Zerlegung des gegebenen Fachwerkes.

Wir erinnern da zuerst an unsre auf eine eben solche Zerlegung bezüglichen Betrachtungen auf S. 174 und 175. Auf Grund derselben können wir nämlich zeigen, dass jedes Polygon $P_1 P_2 \ldots P_i$ der Zerlegung mit mehr als drei Ecken mindestens eine Diagonale besitzen muss, die nicht zugleich ein Stab des Fachwerks ist. Sei nämlich $P_a P_b$ eine Diagonale, die zugleich Stab ist und $P_b P_c$ die auf $P_a P_b$ folgende Seite eines $P_a P_b$ enthaltenden Polygons der Zerlegung, so

*) Vergl. Petersen a. a. O. S. 161. Was die Umkehrung des Satzes, also Satz 19 betrifft, so finden sich auch darauf hinzielende Bemerkungen bei Petersen; wir können derselben aber keinerlei Beweiskraft zuerkennen.

schneiden wir von diesem zunächst durch Einführung des idealen Knotenpunktes P_c' auf $P_b P_c$ das Dreieck $P_a P_b P_c'$ ab, wodurch die Zahl der Knotenpunkte und Polygone um je eins und die Zahl der Stäbe um zwei vermehrt wird, sodass die Bedingungen des Satzes erhalten bleiben. Falls dann $P_b P_c$ zuerst keine Seite des ersten Polygons ist und in dem zu P_a gehörigen Cyklus bei der Reihenfolge von $P_{a-1} P_a$ nach $P_a P_{a+1}$ etwa $P_a P_c'$ auf $P_a P_b$ folgt und nicht umgekehrt, so ersetzen wir die beiden Polygone $P_1 P_2 \ldots P_t$ und $P_a P_b P_c'$ durch $P_a P_b P_{b+1} \ldots P_{a-1}$ und $P_a P_{a+1} \ldots P_{b-1} P_b P_c'$, sodass für unser Fachwerk jedenfalls wieder eine vollständige Zerlegung in $p + 1 = s + 2 - (k+1) + 2$ einfache Polygone vorliegt; bei umgekehrter Reihenfolge wären $P_a P_b P_{b-1} \ldots P_{a+1}$ und $P_a P_{a-1} \ldots P_{b+1} P_b P_c'$ die beiden Polygone. Diese Zerlegung kann aber nicht zusammenhängend sein, weil wir jetzt in P_a zwei Cyklen erhalten, und zwar müssen gerade die beiden Polygone verschiedenen Complexen angehören. Nun können aber verschiedene Complexe ausser P_a und P_b keinen Knotenpunkt gemein haben, weil in keinem andern Knotenpunkte der Cyklus durch obige Veränderung getheilt wird, es wird folglich durch unsere Zerlegung das Fachwerk in zwei Fachwerke zerlegt, welche nur die Knotenpunkte P_a und P_b gemein haben. Gehören den beiden Fachwerken die Zahlen k_1, s_1, p_1 und k_2, s_2, p_2 zu, so muss ja sein $k_1 + k_2 = k + 1 + 2$, $s_1 + s_2 = s + 2$, $p_1 + p_2 = p + 1$, es ist folglich nach Satz 12 auch $p_1 = s_1 - k_1 + 2$ und $p_2 = s_2 - k_2 + 2$. Ausserdem aber sehen wir, dass keine der Diagonalen, welche einen der Punkte $P_a P_b P_{b+1} \ldots P_{a-1}$ mit einem der Punkte $P_a P_{a+1} \ldots P_{b-1} P_b$ verbindet, ein Stab des gegebenen Fachwerks sein kann. Eine entsprechende Theilung des Fachwerks erhalten wir in dem Falle, dass zweitens P_c etwa nach P_{b-1} fällt, wenn wir den Stab $P_b P_c'$ fortlassen und die beiden oben genannten Polygone durch $P_a P_{a+1} \ldots P_{b-1} P_c'$ und $P_a P_b P_{b+1} \ldots P_{a-1}$ ersetzen; die beiden Theile haben dann nur den Knotenpunkt P_a gemeinsam. Unsre Behauptung ist folglich bewiesen, und wir werden nun den idealen Hilfsknotenpunkt P_c', der unsern Beweis nur übersichtlicher machen sollte, wieder fortlassen können. Durch Einziehung einer Diagonale, welche nicht zugleich Stab des Fachwerks ist, in ein Polygon der Zerlegung werden die Anzahlen der Stäbe und Polygone um je eins vermehrt, sodass die Bedingungen unseres Satzes erhalten bleiben.

Wir werden also, indem wir immer neue Diagonalen dieser Art einziehen, unser Fachwerk in ein solches verwandeln können, welches, etwa von einem Polygone abgesehen, das wir als Randpolygon auszeichnen, aus lauter Dreiecken besteht. Wir brauchen desshalb unseren Satz nur für ein Fachwerk mit k Knotenpunkten und s Stäben zu beweisen, für das eine vollständige Zerlegung in $s - k + 1$ Dreiecke

und ein Randpolygon vorliegt, das beliebig viel Ecken haben kann. Wir wissen ja, dass dann ein Dreieck mit dem Randpolygone nur dann zwei Seiten gemein haben kann, wenn diese in einem zweistäbigen Knotenpunkte zusammenstossen. Ferner können wir in derselben Weise wie oben beweisen, dass, wenn die Seite $P_a P_b$ des Dreiecks $P_a P_b P_c$ Diagonale des Randpolygons $P_1 P_2 \ldots P_a P_{a+1} \ldots P_b P_{b+1} \ldots P_t$ ist, die sich beiderseits an $P_a P_b$ ansetzenden Theile des Fachwerks ausser P_a und P_b keinen Knotenpunkt gemeinsam haben, und dass diese Theile die Eigenschaften des gegebenen Fachwerks behalten.

Hiernach können wir unsern Satz folgendermassen beweisen. Wir wählen als Randpolygon irgend ein convexes Polygon mit der entsprechenden Anzahl von Ecken; ein solches wird ja durch jede Diagonale wieder in zwei convexe Polygone zerlegt. Nun ziehen wir zuerst alle Diagonalen, welche den Stäben des gegebenen Fachwerks entsprechend die Dreiecke mit zweistäbigen Randknotenpunkten abtrennen, und wiederholen das für die neu entstehenden Randpolygone so oft, als das möglich ist. Dann theilen wir weiter das Fachwerk durch Dreiecksseiten, welche Diagonalen anderer Art sind, in je zwei Fachwerke derselben Art; das ist erlaubt, weil nach dem Obigen niemals ein Stab von einem Punkte des einen Theiles in einen Punkt des andern Theiles laufen darf. Sind auch solche Abtheilungen nicht mehr möglich, so fassen wir die Dreiecke ins Auge, die um einen Randknotenpunkt des neuen Fachwerks gelagert sind. Dann brauchen wir die andern Eckpunkte dieser Dreiecke nur auf einem nach aussen convexen Curvenzuge von P_{a-1} nach P_{a+1} ihrer Reihenfolge im Cyklus entsprechend anzunehmen, um wieder ein convexes Polygon zu erhalten. Es ist klar, dass wir durch Wiederholung dieser drei Arten von Abtrennungen schliesslich immer auf ein Dreieck kommen müssen, wir werden also zu einem Fachwerk kommen, dass aus lauter schlicht neben einander gelagerten Dreiecken besteht. Lassen wir dann die Dreiecksseiten fort, welche den in die ursprünglichen Polygone eingezogenen Diagonalen entsprechen, so haben wir unsern Satz 19 bewiesen. Hierbei konnten wir natürlich jedes der ursprünglichen Polygone als Randpolygon wählen.

Im Besitze unseres Satzes werden wir auf folgende Regel geführt, *um zu entscheiden, ob ein gegebenes Spannungsproblem durch einen Kräfteplan lösbar sei oder nicht.* Wir werden zuerst versuchen, ein einfaches Polygon zu finden, dessen Ecken alle Knotenpunkte des Fachwerks umfassen, in denen äussere Kräfte angreifen, das wir also als das Randpolygon betrachten werden. Dann werden wir ein dem gegebenen Fachwerke gleich gegliedertes schematisch hinzuzuzeichnen versuchen, dessen convexer Rand jenem Randpolygone entspricht und dessen Stäbe sich niemals überschneiden. Dann und nur dann, wenn

liese Aufgabe lösbar ist, werden die Spannungen durch einen Kräfte-
plan gefunden werden können. Man sieht, dass es sich leicht ent-
scheiden lassen wird, ob Ueberschneidungspunkte gewisser Stäbe zu
vermeiden sind oder nicht.

In letzterem Falle kann man aber jeden Punkt J_a, in dem sich zwei Stäbe des Fachwerke überschneiden, als einen sogenannten *idealen Knotenpunkt**) mit vier Stäben ansehen und zwar als einen idealen insofern, als die vier Stäbe nicht um J_a drehbar an einander befestigt sind. Thatsächlich ist das aber für das Spannungsproblem nicht von Belang, so lange die vier Stäbe ihre zweimal zwei gleichen Richtungen beibehalten, und in J_a keine äussere Kraft angreift; denn dann kann in J_a Gleichgewicht nur zu Stande kommen, wenn in den beiden Theilen jedes der beiden durchschnittenen Stäbe gleiche Spannungen herrschen, was sich auch darin ausspricht, dass dem Punkte J_a im Kräfteplane ein Parallelogramm entsprechen muss. Zugleich sieht man, lass sich die Anzahl der Knotenpunkte je um 1 und die der Stäbe je um 2 vermehrt, sodass das neue Fachwerk nicht nur stabil, sondern auch einfach bleibt. Dieses neue Fachwerk wird nun allerdings einen Kräfteplan liefern, in dem einigen Stäben des ursprünglichen Fachwerks mehrere gleiche Stäbe des Kräfteplanes entsprechen, aber diese geringe Vermehrung der Linien wird vollständig dadurch aufgewogen, lass wir ein allgemeines Princip haben, um das Spannungsproblem für jedes einfache und stabile Fachwerk in übersichtlicher Weise mit Hülfe eines Kräfteplanes zu lösen.

Dies ist allerdings insofern noch nicht vollständig dargethan als es keineswegs immer möglich ist, ein einfaches Polygon**) zu finden, las alle Angriffspunkte der äusseren Kräfte enthält; das erhellt aus lem einfachen Beispiele Fig. 7, wenn in allen sechs Knotenpunkten dieses Fachwerks äussere Kräfte angreifen sollen. Da bietet sich aber der einfache Ausweg dar, dass wir von dem erweiterten Fachwerke ausgehen und das Seilpolygon, das irgend einer Reihenfolge der äusseren Kräfte entspricht, als das Randpolygon betrachten. Wir werden also in ein diesem Seilpolygone entsprechendes convexes Polygon die Knotenpunkte eines dem gegebenen Fachwerke gleich gegliederten Fachwerks so einzuzeichnen suchen, dass die Stäbe und die Angriffslinien der äusseren Kräfte sich möglichst selten überschneiden. Wenn wir dann die diesen Schnittpunkten im gegebenen Fachwerke entsprechenden Schnittpunkte

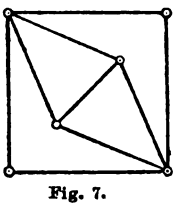


Fig. 7.

*) S. l. c. Appendice par Saviotti p. 63.

**) Es handelt sich hier um eine Verallgemeinerung der sogenannten Hamilton'schen Rundreise-Aufgabe; man vergl. Schubert, Zwölf Geduldspiele, S. 148, Berlin 1895.

als ideale Knotenpunkte einführen, so müssen wir nur darauf achten, dass, falls ein idealer Knotenpunkt J_a in die Verlängerung des Stabes $P_b P_c$ fällt, dieser Stab als durch die beiden Stäbe $J_a P_b$ und $J_a P_c$ ersetzt zu denken ist. Die schlichte Zerlegung des schematischen Fachwerks giebt dann eine vollständige Zerlegung des um einige ideale Knotenpunkte und Stäbe erweiterten ursprünglichen Fachwerks in so viel einfache Polygone, als zur Construction eines Kräfteplanes nothwendig und hinreichend sind.

Was die in die Angriffslinien der äusseren Kräfte fallenden idealen Knotenpunkte und Stäbe betrifft, so können wir dieselben wie alle idealen Knotenpunkte auch unmittelbar am gegebenen Fachwerke einführen. Wir führen nämlich zuerst alle Ueberschneidungspunkte von Stäben als ideale Knotenpunkte ein. Fällt dann ein Angriffspunkt P_a einer äusseren Kraft k_a ins Innere des vom Fachwerke überdeckten Theiles der Ebene, so betrachten wir die Schnittpunkte der einen Hälfte g_a der Angriffslinie von k_a mit den Stäben des Fachwerks als ideale Knotenpunkte, die im Inneren verlaufenden Theile von g_a zwischen P_a und diesen Knotenpunkten als ideale Stäbe und denken uns die Kraft k_a als in dem am Rande gelegenen idealen Knotenpunkte angreifend. Jeder der obigen Schnittpunkte vermehrt in der That die Anzahl der Knotenpunkte um je eins und die Anzahl der Stäbe um je zwei, und auch das Spannungsproblem wird durch unsre Festsetzungen nicht geändert. In dem Randpunkte kann nämlich das Gleichgewicht nur dadurch zu Stande kommen, dass erstens die äussere Kraft der Spannung das Gleichgewicht hält, die in dem auf g_a liegenden Stabe wirkt, und zweitens die Spannungen in dem durchschnittenen Stabe sich das Gleichgewicht halten. Analoges gilt der Reihe nach für die benachbarten idealen Knotenpunkte, sodass die in P_a zusammenlaufenden Spannungen in den wirklichen Stäben einer Spannung in dem idealen Stabe das Gleichgewicht halten, welche der gegebenen äusseren Kraft gleich ist.

Wenn auch die letzte Methode zur Herstellung einer geeigneten vollständigen Zerlegung für die Praxis wohl meist die bessere sein wird, weil sie am gegebenen Fachwerk selbst operirt, so dürfen wir doch das bei der ersten Methode zur Geltung kommende Princip, die Zerlegung mit Hülfe eines gleich gegliederten schematischen Fachwerks zu finden, schon deshalb nicht ausser Acht lassen, weil wir sonst Schwierigkeiten finden würden, falls *sich in einem idealen Knotenpunkte mehr als zwei Stäbe überschneiden, oder ein Stab $P_a P_b$ über einen Knotenpunkt P_c läuft, oder die eine Seite der Angriffslinie einer im Inneren angreifenden Kraft noch durch wirkliche oder ideale Knotenpunkte läuft.* Denn in allen diesen Fällen enthielte das gegebene Fachwerk bei unmittelbar an das gegebene Fachwerk anknüpfender

Einführung der idealen Knotenpunkte oder Stäbe überzählige Stäbe und das Spannungsproblem würde unbestimmt, insofern in solchen Punkten auch auf andere Weise Gleichgewicht zu Stande kommen könnte, als es dem ursprünglichen Spannungsprobleme entspricht. Bestimmen wir hingegen die Zerlegung mit Hülfe eines gleich gegliederten schematischen Fachwerks, das von dem gegebenen beliebig wenig abweicht, so verschwinden alle Schwierigkeiten. Hierbei haben wir z. B. einen Punkt J, in dem sich die drei Stäbe P_1P_4, P_2P_5 und P_3P_6 schneiden (s. Fig. 8) als die Grenze eines Dreiecks $(Q) = J_1J_2J_3$

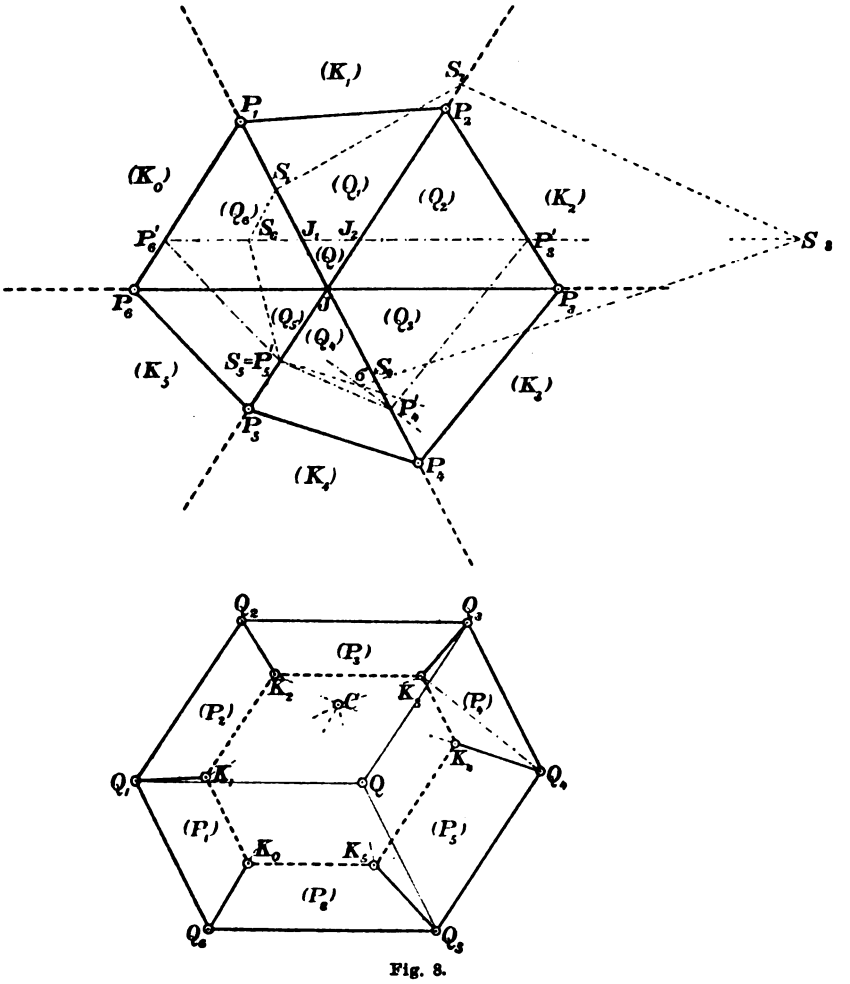


Fig. 8.

nach dem Schema des eingezeichneten Fachwerks zu betrachten, das sich von dem gegebenen nur in der Richtung des Stabes P_3P_4 unterscheidet. Wir können es zugleich benutzen, um mit Hülfe eines

Seilpolygons den Punkt Q_4 und daraus nach dem simplen Processe der Zerlegung alle weiteren Punkte des Kräfteplanes zu finden. Man sieht nun, wie durch Einführung des dem Punktdreiecke entsprechenden Punktes Q in den Kräfteplan in Evidenz gesetzt wird, dass die gegenüberliegenden parallelen Seiten des Sechsecks $Q_1 Q_2 \ldots Q_6$ auch einander gleich sind, was z. B. für das Kräftepolygon, dessen gegenüberliegende Seiten wir ebenfalls parallel zu den Diagonalen des Fachwerks angenommen haben, nicht gilt. Nach Analogie dieses Beispiels können alle übrigen hier in Betracht kommenden Fälle behandelt werden.

Wir können daher das Resultat aussprechen:

20. *Für jedes einfache, stabile Fachwerk lässt sich jedes Spannungsproblem mit Hülfe eines Kräfteplanes lösen, wenn das Fachwerk zuvor durch Einführung gewisser idealer Stäbe und Knotenpunkte erweitert ist.*

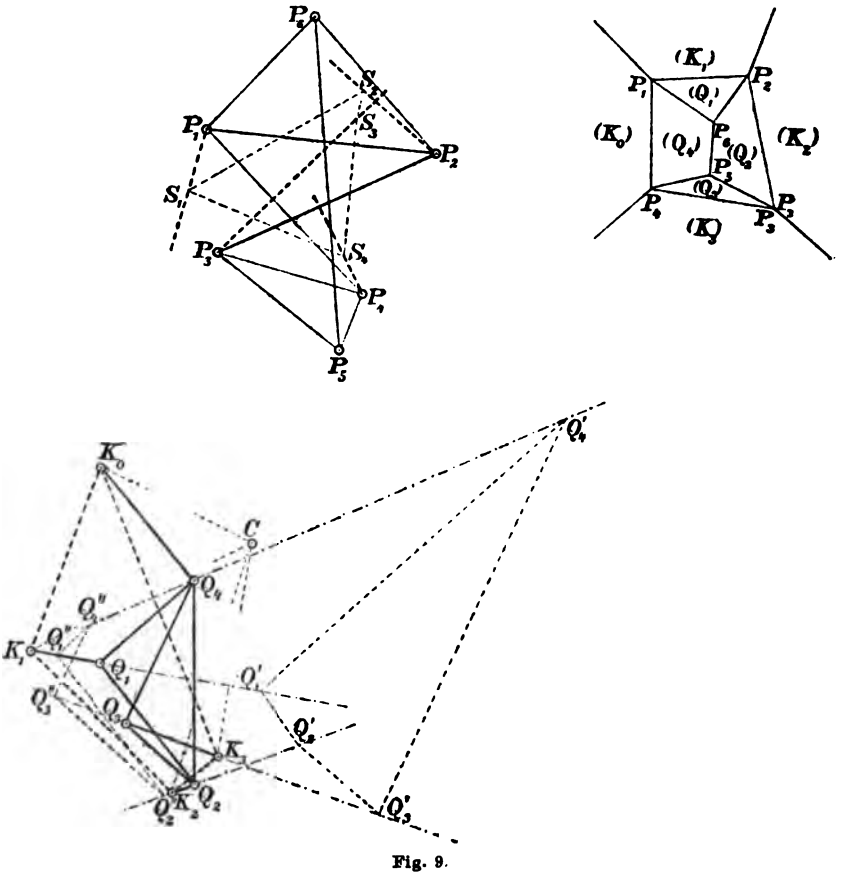


Fig. 9.

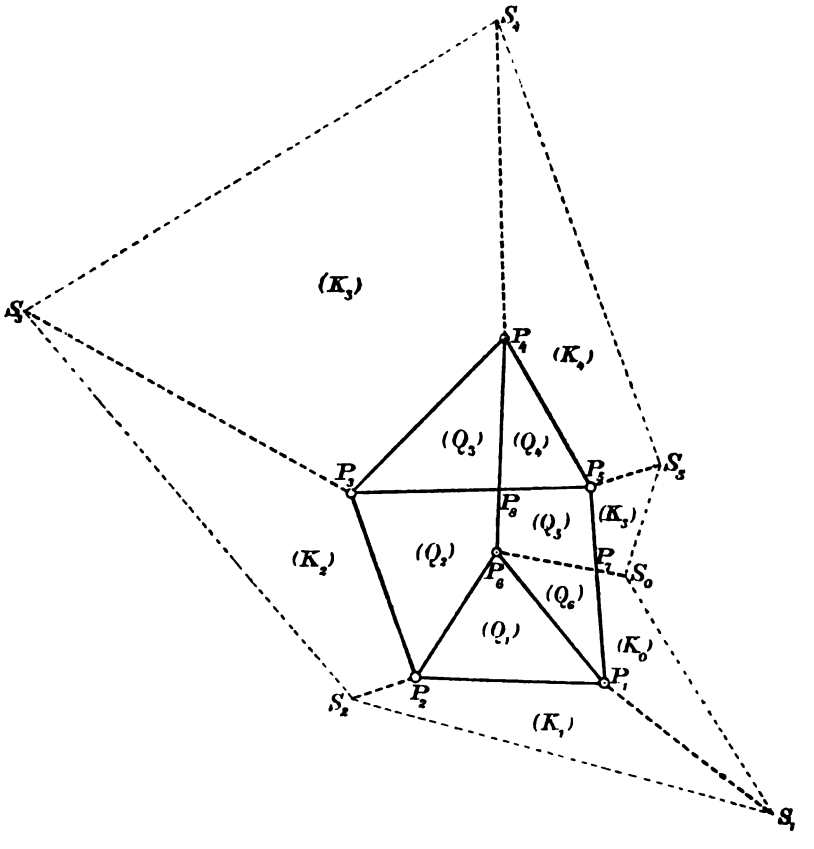
Ein lehrreiches und zugleich einfaches *Beispiel* liefert uns das aus zwei Dreiecken und den drei je zwei Ecken derselben verbindenden Stäben

bestehende Fachwerk. Wirken hier nur in zweimal zwei entsprechenden Ecken äussere Kräfte, so kann ein Kräfteplan ohne Einführung idealer Knotenpunkte oder Stäbe construirt werden, wie das besonders aus der schematischen Figur einleuchtend ist (s. Fig. 9). Das ist jedoch nach Satz 16 nicht möglich, wenn in allen 6 Ecken äussere Kräfte angreifen sollen. Dann wird man je nach Bequemlichkeit entweder die zwei Schnittpunkte eines Verbindungsstabes mit zwei entsprechenden Seiten der beiden Dreiecke als ideale Knotenpunkte einführen, oder nur einen solchen Schnittpunkt und den Schnittpunkt einer Kraft mit einem Stabe (s. Fig. 10) oder zwei Schnittpunkte der letzten Art. Die Construction des Kräfteplanes geschah in beiden Fällen nach dem auf S. 179—180 geschilderten Verfahren, obwohl man hier natürlich nach dem Culmann'schen Verfahren schneller zum Ziele gekommen wäre.

Um den praktischen Vortheil, den ein von der schlichten Zerlegung des Fachwerkes aus construirter Kräfteplan bietet, ganz zu verstehen, müssen wir auch auf die in unseren Figuren angewendete *Bezeichnung* mit ein paar Worten eingehen. Man wird nämlich zuerst in jedes Polygon des Fachwerks den Buchstaben (Q_b) setzen, welcher dem entsprechenden Punkte Q_b des Kräfteplanes zukommt, ebenso an die Aussenseite jedes Randstabes $P_a P_{a+1}$ den Buchstaben (K_a) als dem gemeinsamen Eckpunkte K_a der beiden Seiten des Kräftepolygons entsprechend, welche die in P_a und P_{a+1} angreifenden Kräfte darstellen*). Dann ist im Kräfteplane unmittelbar die Strecke abzulesen, welche die in einem Stabe herrschende Spannung darstellt. Was den Sinn dieser Spannung betrifft, so gehört zunächst jedem Randknotenpunkte P_a ein Drehungssinn zu, welcher dem Sinne entgegengesetzt ist, in welchem das Randpolygon dem Kräftepolygone entsprechend zu durchlaufen ist. Hiernach erhält man den Sinn einer von P_a ausgehenden Spannkraft, wenn man ihre Endpunkte in der Reihenfolge verbindet, welche die entsprechenden Polygone des Fachwerks jenem Drehungssinne entsprechend haben. Derselbe Drehungssinn gehört dann auch den inneren Knotenpunkten mit derselben Bedeutung zu, wie aus der Betrachtung der beiden an jeden inneren Stab anstossenden Polygone in Rücksicht auf die beiden Endpunkte des Stabes hervorgeht. Hiernach ist ausserordentlich leicht zu entscheiden, ob in einem Stabe Druck oder Zug herrscht.

---

*) Man vergl. hierzu eine Bemerkung von Maxwell, Scientific papers ed. Niven, Vol. II, p. 492, wo M. diese Art der Bezeichnung Bow zuschreibt. Der Verf. ist hierauf durch die Güte des Herrn A. Föppl hingewiesen worden.


S_4
S_3
(K_3)
P_4
(K_4)
(Q_3)
(Q_4)
P_3
P_5
S_5
P_6
(Q_5)
(K_5)
(K_2)
(Q_2)
P_0
S_0
P_2
(Q_6)
(Q_1)
(K_0)
P_1
S_2
P_2
(K_1)
S_1

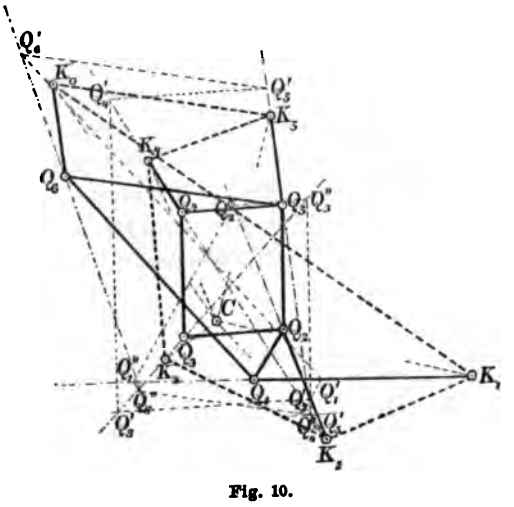

Q_4'
K_4
Q_5'
K_5
K_3
Q_6
Q_3
Q_5''
C
Q_2
Q_2''
K_2
Q_1''
K_1
Q_4''
Q_4
Q_5
Q_1'
Q_3''
Q_6''
K_0

Fig. 10.

§ 6.

Verknüpfung der reciproken Figuren, des Fachwerks und des zugehörigen Kräfteplanes, durch ein Nullsystem.

Die reciproke Beziehung, welche zwischen den Figuren des Fachwerks und denen eines zugehörigen Kräfteplanes besteht, lässt sich nach Cremona*) als Ausfluss derjenigen reciproken Beziehung des Raumes ansehen, die durch ein sogenanntes Nullsystem definirt wird. Bekanntlich kann man ein beliebiges System von Kräften im Raume, falls dieselben keine Einzelresultante oder ein resultirendes Kräftepaar besitzen, auf mannigfaltige Weise auf in zu einander windschiefen Angriffslinien wirkende Kräfte reduciren. Die eine dieser Angriffslinien kann beliebig angenommen werden, dann sind dadurch die conjugirte der Lage und beide der Grösse und dem Sinne nach vollständig bestimmt. Beschreibt die eine Angriffslinie ein Strahlenbündel um einen festen Nullpunkt, so beschreibt die conjugirte Angriffslinie ein ebenes Geradenfeld in der den Nullpunkt enthaltenden Nullebene und umgekehrt. Die durch den Nullpunkt gehenden und in der Nullebene liegenden Geraden heissen Nulllinien, weil das gegebene Kräftesystem in Beziehung auf sie als Axen das Drehungsmoment Null hat; diese Nulllinien sind sich selbst conjugirt, und es kann desshalb in sie niemals die Angriffslinie eines das Kräftesystem ersetzenden Paares verlegt werden. Die beiden in conjugirten Angriffslinien wirkenden Kräfte haben in denselben Angriffspunkt verlegt stets dieselbe Resultante, welche der Axe des Nullsystems parallel ist und durch den Nullpunkt der unendlich fernen Ebene geht; hieraus geht hervor, dass conjugirte Geraden in der Richtung dieser Axe stets durch parallele Ebenen projicirt werden. Haben wir daher zwei in Beziehung auf ein Nullsystem reciproke Polyeder, sodass also den durch einen Eckpunkt laufenden Kanten des einen die ein ebenes Polygon begrenzenden Kanten des andern conjugirt sind, so werden die Eckpunkte und Kanten dieser beiden Polyeder in der Richtung der Axe des Nullsystems auf irgend eine Ebene in die Knotenpunkte und Stäbe zweier Fachwerke projicirt, welche in derselben Beziehung zu einander stehen wie die in § 4 betrachteten Figuren des erweiterten Fachwerks und des erweiterten Kräfteplans. Da entsteht also die Frage, ob man umgekehrt diese beiden Figuren stets als solche Projectionen zweier in Beziehung auf ein Nullsystem reciproker Polyeder wird auffassen können. Es ist leicht, diese Frage zu bejahen.

---

*) Vergl. die in der Einleitung S. 143 citirte Schrift, wo man sich auch über das Nullsystem informiren kann. Man vergl. auch die auf S. 144 ang. Schrift des Verfassers.

Nehmen wir etwa an, dass die Axe des im Uebrigen beliebigen Nullsystems senkrecht zur Zeichenebene der als gegeben gedachten Figuren des erweiterten Fachwerks und des erweiterten Kräfteplanes stehe, so sind jedenfalls die Richtungen von je zwei conjugirten Geraden $\bar{g}$ und $\bar{k}$ bekannt, deren Projectionen je zwei reciproke Geraden g und k obiger Figuren sind, durch die unendlich fernen Nullpunkte nämlich der in k resp. g auf der Zeichenebene senkrechten Ebenen. Wird daher etwa über einem Punkte P_a des Fachwerks der Raumpunkt $\overline{P}_a$ in einer Senkrechten zur Zeichenebene, aber sonst ganz beliebig angenommen, so wären damit jedenfalls beide Polyeder bestimmt, falls die Construction nicht zu Widersprüchen führt. Sind aber P_{a_1}, P_{a_2}, . . ., P_{a_i} die Eckpunkte eines Polygons (Q_a), dem im Kräfteplane der Punkt Q_a entspricht, so ist leicht zu sehen, dass die aus $\overline{P}_{a_1}$ der Reihe nach abgeleiteten Punkte $\overline{P}_{a_2}$, . . ., $\overline{P}_{a_i}$ in einer Ebene liegen, und dass die Gerade durch $\overline{P}_{a_i}$ und den Nullpunkt der zu $P_{a_i}P_{a_1}$ parallelen Verticalebene durch Q_a wieder durch $\overline{P}_{a_1}$ läuft. Denn schneidet die conjugirte Gerade zu $\overline{P}_{a_1}\overline{P}_{a_2}$ die Verticale durch Q_a in $\overline{Q}_a$, so ist die Nullebene von $\overline{Q}_a$ diese Ebene, weil sie die Nullpunkte aller Verticalebenen durch Q_a enthalten muss. Construirt man also die zu den Knotenpunkten des Fachwerks gehörigen Raumpunkte von dem Punkte $\overline{P}_a$ aus so, dass man jedesmal innerhalb eines Polygones der Zerlegung bleibt, so ist klar, dass unsre Construction zu keinem Widerspruche führen kann; wegen der Richtungen der Kanten dieses Polyeders ist dann die Projection des reciproken Polyeders der gegebene erweiterte Kräfteplan. Wir erhalten also das Resultat:

21. *Die aus einem einfachen, stabilen Fachwerke, den Angriffslinien der äusseren Kräfte und einem zugehörigen Seilpolygone bestehende Figur einerseits und ein entsprechender Kräfteplan andrerseits lassen sich stets als Parallelprojectionen zweier in Beziehung auf ein Nullsystem reciproker Polyeder auffassen, wenn die Projectionsrichtung die Axe des Nullsystems ist.*

Wir haben hier eine Construction der beiden Polyeder entwickelt, welche auf der Kenntniss des Kräfteplanes beruht. Es wird aber nicht ohne Interesse sein, zu sehen, wie sich die zur Herstellung des Kräfteplanes dienenden Constructionen für eine directe Construction des ersten Polyeders verwerthen lassen. Wir können etwa zuerst den Raumpunkt $\overline{C}$ über dem Pole C des Seilpolygons annehmen, dessen Nullebene $(\overline{C})$ schneidet dann auf den Verticalen durch die Ecken des Seilpolygons die Ecken $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, . . ., $\overline{S}_n$ des Raumpolygons aus, dessen Projection das Seilpolygon ist; die den Seiten dieses Polygons conjugirten Geraden schneiden weiter auf den Verticalen durch die

ren des Kräftepolygons die Ecken $\overline{K}_0, \overline{K}_1, \ldots, \overline{K}_{n-1}$ des Raumygons aus, dessen Projection das Kräftepolygon ist, und die den ten dieses Polygons conjugirten Geraden endlich auf den Vertin durch die Randknotenpunkte des Fachwerks die Raumpunkte $\overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$, deren Projectionen diese Randknotenpunkte sind. dann P_a ein zweistäbiger Knotenpunkt des Randes, so kennt man ort die Ebene $\overline{P}_{a-1}\overline{P}_a\overline{P}_{a+1}$ des Polygons $(\overline{Q}_b)$, dessen Projection P_a enthaltende Polygon (Q_b) ist. Da also dieser Fall keine wierigkeiten macht, so nehmen wir an, (Q_b) enthalte nur den ndstab P_aP_{a+1}, und construiren das mit dem gegebenen Fachwerke gleich gegliederte Fachwerk $\mathfrak{F}_k'$, das sich von jenem nur in der htung von $P_a'P_{a+1}'$ unterscheidet. Nun wissen wir, dass die den ten des Kräftepolygons $K_0K_1 \ldots K_{a-1}Q_bK_{a+1} \ldots K_{n-1}K_0$ ichen und gleich gerichteten Kräfte sowohl in den Angriffspunkten $P_2 \ldots P_n$ als auch in den Angriffspunkten $P_1'P_2' \ldots P_n'$ anracht im Gleichgewichte sind. Da sich weiter das dem Pole C zu sem Kräftepolygone für das erste Fachwerk zugehörige Seilpolygon in den Ecken S_a und S_{a+1} von dem obigen zu unterscheiden braucht l stets $\overline{P}_c\overline{P}_{c+1}$ durch den unendlich fernen Nullpunkt der zu P_cP_{c+1} allelen Verticalebene durch K_c läuft, so erhalten wir für dies zweite iftepolygon, wenn wir von demselben Punkte $\overline{C}$ ausgehen, jedens dasselbe dem Randpolygon entsprechende Raumpolygon. Aus n letzten Gründe ergiebt sich auch für das dem Randpolygone von entsprechende Raumpolygon, das von $\overline{P}_a'\overline{P}_{a+1}'$ abgesehen stets $\overline{P}_{c+1}' \parallel \overline{P}_c\overline{P}_{c+1}$. Da endlich die einander parallelen Nullebenen von und $\overline{Q}_b'$ durch $\overline{P}_a\overline{P}_{a+1}$ resp. $\overline{P}_a'\overline{P}_{a+1}'$ gehen müssen, so ist die ene von $(\overline{Q}_b)$ durch $\overline{P}_a\overline{P}_{a+1}$ und die Richtung von $\overline{P}_a'\overline{P}_{a+1}'$ benmt. Hiernach erhalten wir folgende Regel zur Construction der ch $\overline{P}_a\overline{P}_{a+1}$ gehenden Ebene von $(\overline{Q}_b)$: Man ziehe durch einen r P_{a+1}' beliebig angenommenen Punkt $\overline{P}_{a+1}'$ die Parallele zu $_{+1}\overline{P}_{a+2}$, bis sie die Verticale durch P_{a+2}' in $\overline{P}_{a+2}'$ schneidet, durch $_{+2}$ die Parallele zu $\overline{P}_{a+2}\overline{P}_{a+3}$, bis sie die Verticale durch P_{a+3}' in $_{+3}$ schneidet, u. s. f. bis man den Punkt $\overline{P}_a'$ über P_a' erhält; alsn ist die Ebene von $(\overline{Q}_b)$ parallel zu $\overline{P}_a'\overline{P}_{a+1}'$. Auf diesem Wege d man also, sobald einmal das dem Randpolygone entsprechende mpolygon, das natürlich sowohl vom Kräftepolygone als vom Nullteme abhängt, gefunden ist, das Polyeder, dessen Projection das ebene Fachwerk ist, durch blosses Ziehen von Parallelen in zwei feln construiren können; die Projection des reciproken Polyeders bt dann den Kräfteplan. Ist dieser nicht seiner Lage nach gegeben, können wir etwa die Punkte $\overline{P}_1, \overline{S}_1, \overline{S}_2, \overline{S}_3$ auf ihren Verticalen

willkürlich annehmen, damit ist die Ebene $(\overline{C})$, folglich alle übrigen Punkte $\overline{S}_a$ bekannt, dann liegt $\overline{P}_2$ in der Ebene $\overline{P}_1\overline{S}_1\overline{S}_2$, $\overline{P}_3$ in der Ebene $\overline{P}_2\overline{S}_2\overline{S}_3$ u. s. f. Damit nun aber auch $\overline{P}_1$ in der Ebene $\overline{P}_n\overline{S}_n\overline{S}_1$ liege, muss eben S_n, nachdem $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ auf ihren Angriffslinien willkürlich (vergl. S. 168) angenommen sind, die Seilpolygonbedingung befriedigen, die hier folgendermassen zum Ausdruck kommt. Da sich die Ebenen $\overline{P}_1\overline{P}_n\overline{S}_1$ und $\overline{P}_{n-1}\overline{P}_n\overline{S}_{n-2}$ in der Verticalebene über der Angriffslinie durch P_n schneiden müssen, so ist diese Schnittgerade als Verbindungslinie der Schnittpunkte dieser Verticalebene mit $\overline{P}_1\overline{S}_1$ und $\overline{P}_{n-1}\overline{S}_{n-1}$ gegeben, sie bestimmt $\overline{S}_n$ in der Ebene $(\overline{C})$ und damit auch S_n. Den ∞^4 verschiedenen Polyedern entsprechen natürlich nur ∞^3 sich durch Grösse und Lage unterscheidende Kräftepläne, da den Polyedern, die durch Parallelverschiebung aus einander entstehen, derselbe Kräfteplan entspricht. Halten wir $(\overline{C})$ fest und bewegen $\overline{P}_1$ auf seiner Verticalen, so behalten ja die Seilstrahlen ihre Lage bei, sodass der Kräfteplan bei fester Lage ähnliche Transformationen erleidet; geeignete Veränderungen von $(\overline{C})$ liefern dann auch die Parallelverschiebungen des Kräfteplanes.

Da unser Polyeder $k + n$ Ecken, $k + n - 1$ Flächen und $2(k + n) - 3$ Kanten besitzt, so ist es offenbar ein gewöhnliches Euler'sches Polyeder. Es werden aber auch Polyeder höherer Art*) reciproke Figuren ergeben, die für gewisse Fachwerke die Lösung des Spannungsproblems in Evidenz setzen, diese Fachwerke können aber nicht stabil und zugleich einfach sein, wir haben desshalb keine Veranlassung auf diese Frage hier einzugehen.

Aachen, im März 1896.

*) Man vergl. z. B. Möbius, ges. Werke, II, S. 551, Leipzig 1886.

Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene.

Von

A. Wiman in Lund.

Das Forschungsgebiet, welches wir hier betreten wollen, ist in neuerer Zeit durch mehrere wichtige Abhandlungen von Hrn. S. Kantor bereichert worden. Dabei gedenken wir zuerst seiner von der Academie zu Neapel gekrönten Preisschrift*), in welcher er alle existirenden Typen von eindeutigen *periodischen* Transformationen in der Ebene bestimmt hat. Wurde hier die geometrische Construction der Typen erst durch die Lösung eines rein arithmetischen Problems vorbereitet, welches sich in die Untersuchungen der Herren Hermite und Frobenius über quadratische Formen einreiht, so skizzirte Hr. Kantor in einer späteren Arbeit**) eine neue von jenen arithmetischen Entwicklungen unabhängige geometrische Theorie. Durch diese letztere Abhandlung wurde ich veranlasst, die allgemeinere Aufgabe der *endlichen Gruppen* von birationalen Transformationen in der Ebene in Angriff zu nehmen. Inzwischen erschien vor Kurzem eine Arbeit von Hrn. Kantor über diesen Gegenstand***), als deren Schlussergebniss eine *Aufzählung der sämmtlichen Typen vollständiger endlicher Gruppen birationaler Transformationen* gegeben wird. Diese Aufzählung stimmt aber nicht mit den von mir erhaltenen Resultaten überein. In der That hat Hr. Kantor sowohl verschiedene Typen übersehen als auch andere mit fehlerhafter Ordnungszahl gegeben. In den folgenden Entwicklungen beabsichtige ich eine richtige Aufzählung der endlichen birationalen Transformationsgruppen in der Ebene zu liefern.

*) „*Premiers fondaments pour une théorie des transformations périodiques univoques*", Näples 1891. Ein Auszug ist im Journal für Mathematik, Bd. 114, S. 50 erschienen unter dem Titel: „*Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene*".

**) „*Neue Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene*", Acta Mathematica, Bd. 19, S. 115.

***) „*Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene*" (Berlin, Mayer & Müller, 1895).

§ 1.

Die Aequivalenztheoreme.

In diesem Paragraphen stellen wir einige Theoreme zusammen, welche sämmtlich aus Hrn. Kantor's Arbeiten entlehnt sind. Als Ausgangspunkt wählen wir den folgenden Satz*):

1. *Jede endliche Gruppe von Transformationen besitzt eine invariante Curve, deren Geschlecht jede willkürliche Grenze überschreiten kann, aber sicher* > 2 *ist.*

Nun werden bekanntlich bei einer birationalen Transformation die adjungirten Curven in die adjungirten Curven der entsprechenden Curve übergeführt. Daraus folgt, dass bei einer endlichen Gruppe auch das System der adjungirten Curven einer invarianten Curve in sich übergeht. In derselben Weise muss auch das System der Curven reproducirt werden, welche sich zu einem bei der Gruppe invarianten Curvensystem adjungirt verhalten. Wir können folglich den Satz aussprechen**):

Wenn eine endliche Gruppe birationaler Transformationen eine Curve reproducirt, reproducirt sie auch das System der adjungirten Curven, sowie jedes der successiven Systeme.

2. Man kann also in der Reihe der successiven adjungirten Systeme fortgehen, bis man zu Curven vom Geschlechte $p = 1$ oder $p = 0$ gelangt. Dabei ist jedoch noch die Möglichkeit zu beachten, dass alle Curven des Endsystems zerfallen. Hr. Kantor hat aber bewiesen***), dass dies nur auf zwei Arten geschehen kann: entweder ist allen Curven des Systems eine feste Fundamentalcurve gemein, wobei man aber die übrigen Bestandtheile wie früher behandeln kann, oder es zerfällt jede Curve des Systems in $p_1 - 1$ rationale Curven, welche sämmtlich demselben Büschel angehören müssen, wobei p_1 das zum vorangehenden System gehörige Geschlecht bezeichnet. Dieser Büschel lässt sich birational in einen Geradenbüschel überführen.

Dergleichen Gruppen, bei denen ein Geradenbüschel invariant bleibt, nennt Hr. Kantor *orthanallagmatische Gruppen* oder *Gruppen von Jonquières*. Zu solchen Gruppen gelangt man, falls in der Reihe der successiven adjungirten Systeme ein System hyperelliptischer Curven auftritt, welches birational in C_n mit $(n-2)$-fachem Punkte übergeführt werden kann.

Wir nehmen nun an, die Curven des Endsystems seien vom Geschlechte $p = 1$. Die vorkommenden linearen Systeme elliptischer

*) Man sehe S. 40 der letzterwähnten Arbeit.

**) S. 41 der citirten Arbeit.

***) Acta Mathematica, Bd. 19, S. 119.

Curven sind nun nach einem Theorem von Bertini-Martinetti*) entweder einem $\infty^2, \infty^3, \cdots, \infty^9$ Systeme von C_3 oder einem Systeme von C_4 mit zwei festen Doppelpunkten oder endlich, falls die Dimension $= 1$, einem Büschel von Curven C_{3s} mit 9 s-fachen Punkten birational äquivalent. Weil die einzigen bestimmenden Elemente bei vollständigen Systemen von adjungirten Curven feste Basispunkte sind, müssen die obigen Systeme von $\infty^2, \infty^3, \cdots, \infty^9$ C_3 beziehungsweise $7, 6, \ldots, 0$ feste Punkte besitzen; die C_4-Systeme dagegen keinen festen Punkt ausser den beiden δ, weil sie sonst C_3-Systemen äquivalent wären.

Wenn die Gruppe ein System von ∞^9, ∞^8 oder ∞^7 C_3 mit bez. $0, 1, 2$ Basispunkten in sich transformirt, kann sie nur eine Collineationsgruppe sein. Unter den C_3 treten nämlich in diesen Fällen stets ausgezeichnete Systeme auf, welche aus lauter Geraden gebildet sind: im ersten Falle das System der dreifach gezählten Geraden, im zweiten und dritten das System der doppelten Geraden mit je einer Geraden durch den Basispunkt bez. mit der Verbindungsgeraden der Basispunkte.

Wenn die Gruppe das System der C_4 mit 2δ reproducirt, kann dieselbe nur aus Collineationen und quadratischen Transformationen bestehen. Unter den C_4 befindet sich nämlich das ausgezeichnete System der doppelten Kegelschnitte durch die beiden δ. Da ein solcher Kegelschnitt in eine beliebige Gerade und die Verbindungsgerade der beiden δ zerfallen kann, so ersieht man hieraus, dass bei der Gruppe gerade Linien nur in Kegelschnitte übergeführt werden können. Andere zerfallende Kegelschnitte erhält man aus je einer Geraden durch jeden δ; man erschliesst hieraus, dass die Strahlbüschel durch die beiden δ gegenüber der Gruppe zusammen ein invariantes System bilden.

Es bleibt noch übrig zu entscheiden, in welchen Fällen ein Büschel C_{3s} mit 9 s-fachen Punkten das vollständige System der adjungirten Curven eines Curvensystems mit $p = 2$ darstellen kann. Das ist jedenfalls für $s = 1$ möglich, und zwar in der Weise dass 8 Basispunkte des C_3-Büschels Doppelpunkte von C_6 sind, der neunte aber vernachlässigt wird; geht man so weiter hinauf, so gelangt man zu C_9 mit 8 dreifachen Punkten, mithin vom Geschlechte $p = 4$. Allein auch für $s = 2$ existirt das gesuchte System mit $p = 2$; wir werden nämlich in § 6 zeigen, dass in diesem Falle 8 Basispunkte dreifache Punkte und der neunte einen Berührungsknoten (mit bestimmter Tangente) eines Büschels von C_9 liefern. Hier kann man aber nicht zu einer invarianten Curve, deren Geschlecht $p > 2$, gelangen. Letzterer

*) Rendiconti Ist. Lomb. 1886.

Büschel erweist sich nämlich als adjungirt zu einer einzigen C_{12} mit $p = 2$, welche 8 vierfache und einen dreifachen Punkt, in welchem 2 Zweige einander osculiren, besitzt. Für $s > 2$ lässt sich das fragliche System mit $p = 2$ nicht construiren.

Es erübrigt noch den Fall zu behandeln, dass die Curven des Endsystems rational sind. Ist das betreffende System ein Büschel oder ein Netz, so kann man dasselbe birational in einen Geradenbüschel oder das Netz aller Geraden überführen, und die Gruppe ist folglich eine orthanallagmatische oder eine Collineationsgruppe. Ist die Dimension des Systems > 2, so kann man dasselbe birational entweder in das System aller Kegelschnitte (ohne Basispunkte) oder in ein System von Curven C_n mit einem $(n-1)$-fachen Punkte überführen*); in letzterem Falle braucht man ersichtlich höchstens einen weiteren einfachen Basispunkt zuzulassen. Das System aller Kegelschnitte bleibt nur bei Collineationsgruppen invariant; dasselbe enthält ja das System der doppelten Geraden ausgezeichnet. Ebenfalls geht das System aller C_n mit einem $(n-1)$-fachen Punkte δ_{n-1} nur bei einer Collineationsgruppe, welche den Punkt δ_{n-1} invariant lässt, in sich über; unter den C_n hat man nämlich das ausgezeichnete System, welches aus je einer beliebigen Geraden und je einer $(n-1)$-fach gezählten Geraden durch δ_{n-1} besteht. Besitzt aber das System ausser δ_{n-1} noch einen einfachen Basispunkt, so erhält man ein ausgezeichnetes System von Curven C_n, welches aus je einer Geraden durch den einfachen Basispunkt und je einer $(n-1)$-fach gezählten Geraden durch δ_{n-1} besteht. Die Strahlbüschel durch diese beiden Punkte bleiben also bei der Gruppe invariant; doch können dieselben, falls $n = 2$, mit einander vertauscht werden. Die Gruppe besteht nur aus Collineationen und quadratischen Transformationen.

3. Fassen wir die vorangehenden Resultate zusammen, so erhalten wir das folgende Endtheorem:

Jede endliche Gruppe von birationalen Transformationen ist äquivalent entweder

1) *einer Gruppe von Collineationen oder*

2) *einer orthanallagmatischen Gruppe oder*

3) *einer Gruppe quadratischer Transformationen, bei welcher zwei Strahlbüschel zusammen ein invariantes System bilden, oder*

4), 5), 6), 7), 8) *einer Gruppe, bei welcher ein System von Curven* 3. *Ordnung mit beziehungsweise* 3, 4, 5, 6, 7 *festen Punkten in sich übergeht, oder*

---

*) Vergl. G. Jung, „*Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche*", Annali di Matematica XVI.

9) *einer Gruppe, bei welcher ein System von Curven C_6 mit 8 festen Doppelpunkten und mithin auch der adjungirte Büschel 3. Ordnung invariant bleiben.*

Die hier aufgezählten Classen 4, 5, . . ., 9 bezeichnet man kurz als *Gruppen mit bez.* 3, 4, . . ., 8 *Punkten.*

Handelt es sich nur um die einzelnen periodischen Transformationen, so lassen sich die Classen 3, 4, 5 auf Collineationen und die Classe 6 auf orthanallagmatische Transformationen reduciren. Durch die Gleichungen der bezüglichen Transformationen werden nämlich feste Punkte bestimmt. Im Falle 6 erhält man einen invarianten Büschel von rationalen C_3 durch die 4 Basispunkte mit δ in einem solchen festen Punkte, und diesen Büschel kann man in einen Geradenbüschel überführen. In gleicher Weise ermittelt man in den anderen erwähnten Fällen invariante Netze, welche birational auf das Netz aller Geraden bezogen werden können. Als wesentlich verschiedene Fälle der periodischen birationalen Transformationen haben wir also nur *die Collineationen, die orthanallagmatischen Transformationen und die Transformationen mit* 6, 7, 8 Punkten.

In den folgenden Entwicklungen wollen wir nun die soeben ermittelten 9 Hauptclassen näher untersuchen.

§ 2.

Die endlichen Gruppen von Collineationen und orthanallagmatischen Transformationen.

1. Ueber die endlichen *Collineationsgruppen* können wir uns hier kurz fassen; dieselben sind ja in längeren Abhandlungen von den Herren C. Jordan und Valentiner untersucht. Nur das möchten wir hier wiederholen, dass die gewöhnliche Auffassung*), dass Hr. Jordan die betreffende Aufgabe vollständig erledigt habe, nicht richtig ist, da ja Hr. Valentiner eine neue Gruppe von der Ordnung 360 entdeckt hat. Letztere Gruppe ist in der That eine sehr wichtige, weil dieselbe, wie wir neuerdings bewiesen haben**), mit der Gruppe der geraden Vertauschungen von 6 Dingen holoedrisch isomorph ist.

Wollen wir nun der Vollständigkeit halber eine Aufzählung der endlichen Collineationsgruppen geben, so möge von vornherein die folgende Verabredung getroffen werden, dass *solche Gruppen, welche, wo immer sie auftreten, als Untergruppen innerhalb höherer Gruppen*

*) Auch Hr. Kantor kennt nur die von Hrn. Jordan behandelten Gruppen. Man sehe seine „*Theorie der endlichen Gruppen*", S. 44.

**) Man sehe meinen in den Mathematischen Annalen Bd. 47 veröffentlichten Aufsatz mit dem Titel „*Ueber eine einfache Gruppe von 360 ebenen Collineationen*".

enthalten sind, nicht als Haupttypen betrachtet werden sollen. Wir erhalten dann:

1) *Eine Classe von trivialen Gruppen, bei denen entweder drei Punkte unter einander vertauscht werden, oder ein Punkt und eine nicht incidente Gerade invariant bleiben.*

Sodann haben wir drei isolirte Gruppen:

2) *Die Hesse'sche Gruppe von der Ordnung* 216, *welche das System der* 9 *Wendepunkte einer ebenen* C_3 *in sich transformirt.*

3) *Die Gruppe von der Ordnung* 168, *welche die*

$$C_4, \quad x_3^3 x_1 + x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 = 0,$$

in sich überführt;

4) *Die Gruppe von der Ordnung* 360, *durch welche die*

$$C_6, \quad 10 x_1^3 x_2^3 + 9 x_3 (x_1^5 + x_2^5) - 45 x_3^2 x_1^2 x_2^2 - 135 x_3^4 x_1 x_2 + 27 x_3^6 = 0,$$

in sich transformirt wird.

Hierzu kommen noch drei Gruppen, welche nicht der Classe 1 angehören. Dieselben sind:

1) Die Collineationsgruppe der harmonischen C_3. Diese Gruppe von der Ordnung 36 ist Untergruppe sowohl der Hesse'schen Gruppe als der G_{360};

2) Die mehr umfassende Gruppe von der Ordnung 72, bei welcher die harmonische C_3 auch mit ihrer Hesse'schen Curve vertauscht werden kann. Dieselbe ist Untergruppe der Hesse'schen Gruppe;

3) Die ternäre Ikosaedergruppe, welche einen Kegelschnitt in sich überführt. Diese G_{60} ist Untergruppe der G_{360}.

2. Wir schreiten jetzt zur Behandlung der *orthanallagmatischen Gruppen.* Zuerst ist es einleuchtend, dass die Strahlen des fundamentalen invarianten Geradenbüschels sich nach irgend einer linearen Gruppe vertauschen müssen. Die Gesammtgruppe entsteht durch Combination dieser Gruppe mit einer anderen linearen Gruppe, bei welcher jede Gerade des Büschels invariant bleibt.

Bei einer zur letzteren Gruppe gehörigen Transformation müssen zwei Punkte auf jeder Geraden des Büschels fest bleiben. Man hat hier zwei Möglichkeiten: entweder erfüllen diese Punkte *zwei* rationale Curven oder *eine* hyperelliptische Curve.

Wir nehmen zuerst an, die fraglichen Doppelpunktsörter zerlegen sich bei jeder bezüglichen Transformation in je zwei rationale Curven. Hr. Kantor hat dann hervorgehoben, dass man drei beliebige Curven C_M mit $(M-1)$-fachem Punkte im Fundamentalpunkte: D_1, D_1', D_2 herausnehmen kann, und sodann auf jeder Geraden des Büschels eine bestimmte binäre Gruppe ergänzen kann, bei welcher D_1, D_1' die Doppelpunkte einer Transformation und D_2 einen Doppelpunkt einer

bestimmten anderen Transformation ausschneiden, wonach die weiteren Doppelpunktsörter sich leicht bestimmen lassen*).

Diesen Ansatz wollen wir hier weiter verfolgen. Zunächst ist es einleuchtend, dass man keineswegs drei Curven mit gleicher Ordnung zu nehmen braucht. Es seien n_1, n_1', n_2 die Ordnungen der bezüglichen Curven D_1, D_1', D_2. Wir nehmen an, dass ausser dem Fundamentalpunkte ϱ Schnittpunkte allen drei Curven gemein sind. Man ergänzt nun jede Curve durch diejenigen Geraden des fundamentalen Büschels, welche durch die Schnittpunkte der beiden anderen gehen. In dieser Weise gehören die drei Curven zu einem Büschel von der Ordnung $n_1 + n_1' + n_2 - 1 - \varrho$, welchen wir durch successive quadratischen Transformationen in einen Geradenbüschel überführen können. Die weiteren Doppelpunktsörter gehören ersichtlich zu demselben Büschel. *Wir erhalten demnach zwei invariante Geradenbüschel, und die fragliche orthanallagmatische Gruppe entsteht durch die Combination der beiden Gruppen, nach welchen die Geraden dieser Büschel permutirt werden.*

3. Man kann somit einen zweiten invarianten Geradenbüschel herstellen, falls jede Gerade durch den fundamentalen Punkt O bei einer Diedergruppe, Tetraedergruppe, Oktaedergruppe oder Ikosaedergruppe in sich übergeht. Wir müssen hier fragen, ob dieser Satz noch gültig bleibt, falls jede Gerade des erwähnten Büschels nur bei der Identität oder bei einer cyklischen Gruppe mit *zwei* rationalen Doppelpunktscurven in sich übergeführt wird. Um das zu entscheiden, brauchen wir nur den Inbegriff derjenigen Punkte zu betrachten, denen bei einer oder mehreren Transformationen nicht nur einzelne Punkte, sondern ganze Geraden durch O entsprechen. Es sei A ein solcher Punkt und a seine Verbindungsgerade mit O. Wir nehmen an, dass die Gerade a durch die Transformationsgruppe in die Geraden $a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_{n-1}$ übergeführt werden kann. Dabei mögen dem Punkte A die Gesammtheit der Punkte der r Geraden $a_1, \ldots, a_r$, aber nur einzelne Punkte $A_{r+1}, \ldots, A_{n-1}$ auf den Geraden $a_{r+1}, \ldots, a_{n-1}$ entsprechen, wobei freilich zunächst vorausgesetzt wird, dass *eine beliebige Gerade des Büschels nur bei der Identität invariant bleibt.* In dieser Weise entsprechen den Punkten der Geraden $a_1, \ldots, a_r$ die Ausgangsrichtungen von den Punkten $A, A_{r+1}, \ldots, A_{n-1}$; man erschliesst aber auch, dass andererseits den Punkten der Geraden $a, a_{r+1}, \ldots, a_{n-1}$ die Ausgangsrichtungen gewisser Punkte $A_1', \ldots, A_r'$ auf den bezüglichen Geraden $a_1, \ldots, a_r$ entsprechen. Wir haben also auf n bei der Gruppe sich geschlossen permutirenden Geraden zwei Systeme von *einfachen Fundamentalpunkten* erhalten: $A, A_{r+1}, \ldots, A_{n-1}$

*) Man sehe Kantor, „Theorie der endlichen Gruppen", S. 46.

und $A_1', \ldots, A_r'$. Solcherweise sind wir zu dem Resultate gekommen, dass einfache Fundamentalpunkte immer gleichzeitig auf allen Geraden eines Systems auftreten, welches sich bei der Gruppe geschlossen permutirt, dass aber dieselben stets in zwei zu einander conjugirte Systeme zerlegt werden, welche in dem betrachteten Beispiel durch die A und die A' geliefert werden. Die Gesammtheit der einfachen Fundamentalpunkte können wir also in eine Zahl von je zwei solchen conjugirten Systemen zusammenstellen. Es eröffnet sich aber hier eine Methode, um die Zahl der einfachen Fundamentalpunkte zu vermindern. Legt man nämlich die drei Hauptpunkte einer quadratischen Transformation:

$$x_1' x_1 = x_2' x_2 = x_3' x_3,$$

in die Punkte O, A_1', A_2', so gehen ersichtlich die Punkte A_1', A_2' nach der Transformation in Fundamentalpunkte von derselben Art wie der Punkt A über. Allgemeiner gilt es, dass, falls man die drei Hauptpunkte der Transformation in O und in irgend zwei einfachen Fundamentalpunkten wählt, letztere Punkte in Fundamentalpunkte der jedesmal conjugirten Art übergehen. Hat man also auf diese Weise in dem gewählten Beispiel alle Punkte A' in Punkte A übergeführt, so entsprechen einem Punkte A nur die anderen Punkte A, aber keine ganze Gerade; die Punkte A haben somit ihre Eigenschaft als Fundamentalpunkte eingebüsst. Nun scheint es einleuchtend, dass man in dieser Weise durch successive quadratische Transformationen jede bei der Gruppe zusammengehörige Reihe von Fundamentalpunkten mit einer Ausnahme in solche derselben Art überführen kann. Man würde also am Ende nur zwei Hauptfälle zu untersuchen haben:

1) Alle einfachen Fundamentalpunkte sind verschwunden. Die Gruppe muss eine Collineationsgruppe sein, welche den Punkt O invariant lässt.

2) Eine einzige Reihe von einfachen Fundamentalpunkten ist übrig geblieben, und ein einziger Punkt A dieser Reihe ist zu den übrigen conjugirt. Bei einer Transformation der Gruppe können hier nur drei Hauptpunkte auftreten: O, A und der Punkt, welcher in die Gerade OA übergeführt wird. Hieraus folgt, dass die Transformationen der Gruppe aus lauter quadratischen Transformationen bestehen, und dass der Geradenbüschel durch A invariant bleibt.

Um einen etwaigen Einwand zu beseitigen, sollen hier noch die folgenden Erörterungen eingeschaltet werden. Jede Reihe von einfachen Fundamentalpunkten besteht aus zwei zu einander conjugirten Systemen. In der angewandten Methode nahmen wir aus jeder Reihe das eine System heraus, und die so erhaltenen Punkte benutzten wir als Hauptpunkte bei den successiven quadratischen Transformationen. War die Zahl dieser Punkte gerade $= 2n$, so hatte man n Transformationen

nöthig, um den obigen Hauptfall 1 zu erreichen; war dagegen ihre Zahl ungerade $= 2n + 1$, so konnte man durch n Transformationen zum Falle 2 gelangen. Der Inbegriff jener quadratischen Transformationen besitzt aber im Falle 1 die Bedeutung, dass man das Curvennetz C_{n+1}, welches durch die $2n$ Fundamentalpunkte und einen n-fachen Punkt δ_n in O bestimmt wird, in das Netz der Geraden überführt; im Falle 2 wird dagegen der Curvenbüschel C_{n+1} durch die $2n + 1$ Fundamentalpunkte mit δ_n in O in einen Geradenbüschel transformirt. Man kann aber noch andere gegenüber der Gruppe invarianten Netze oder Büschel erhalten, indem man ausser den erwähnten Fundamentalpunkten als Basispunkte noch irgend welche bei der Gruppe sich geschlossen permutirende Reihen hinzunimmt. Die Invarianz der fraglichen Netze bez. Büschel erschliesst man leicht daraus, dass dieselben bei jeder Transformation der Gruppe in Netze bez. Büschel mit *denselben aber keinen anderen* Basispunkten und (im Falle eines Netzes) einem freien Schnittpunkte transformirt werden müssen, was, wie eine leichte Abzählung lehrt, bei keinem anderen Netze oder Büschel zutrifft. *Man kann also auf unendlich viele Weisen die Gruppe in eine Collineationsgruppe oder in eine Gruppe mit einem zweiten invarianten Geradenbüschel überführen.*

Es giebt natürlich auch Fälle, wo die Basispunkte eines Netzes oder Büschels in so specieller Lage sich befinden, dass durch dieselben kein eigentliches Netz bez. Büschel bestimmt wird, sondern *nur eine einzige Curve*, welche vermittelst beliebiger Geraden durch O ergänzt wird; dies trifft z. B. zu, wenn dieselben auf einer Geraden liegen, und die Zahl der einfachen Basispunkte grösser als die Ordnung der Curven ist. Jene einzige Curve ist natürlich gegenüber der Gruppe invariant. Hat man drei solche invariante Curven erhalten, so bestimmen diese, wie in der 2. Nummer dieses Paragraphen beschrieben wird, *einen Büschel, von welchem jede Curve bei allen Transformationen der Gruppe invariant bleibt.* Diesen Büschel kann man selbstverständlich in einen Geradenbüschel überführen.

4. Wir wollen jetzt besonders den Fall behandeln, dass *jede Gerade des fundamentalen Büschels durch eine cyklische Gruppe in sich übergeht*, wobei die Doppelpunkte *zwei rationale Curven* erfüllen. Diese beiden Doppelpunktscurven sind bei der Gruppe invariant, und man kann dieselben durch successive quadratische Transformationen, bei denen stets O einen Hauptpunkt abgiebt, in zwei Gerade, L_1 und L_2, überführen, deren Schnittpunkt wir mit P bezeichnen wollen. Im Allgemeinen ist hier der durch L_1 und L_2 bestimmte Büschel gegenüber der Gruppe *nicht* invariant. In der That brauchen wir auch in diesem Falle nur die einfachen Fundamentalpunkte zu betrachten, um invariante Büschel oder Netze herstellen zu können. Als solche sind

zuerst einerseits P und andererseits die der Geraden OP entsprechenden Punkte zu nennen; letztere Punkte liegen zu je μ auf jeder dem Punkte P entsprechenden Geraden, wenn μ die Ordnung der Gruppe bezeichnet, bei welcher jeder Punkt der Geraden L_1 und L_2 fest bleibt. Alle anderen Fundamentalpunkte müssen auf L_1 oder L_2 liegen. Punkte auf einer von diesen Geraden werden ja immer in Punkte derselben Geraden transformirt; soll dann eine durch O gehende Gerade in einen Fundamentalpunkt übergeführt werden, so muss ersichtlich dieser Punkt entweder auf L_1 oder L_2 belegen sein. Sagen wir auf L_1, dann folgern wir sofort, dass den anderen Punkten auf der Verbindungsgeraden des Fundamentalpunktes mit O ein einzelner Punkt, der Schnittpunkt der ersterwähnten Geraden mit L_2, entspricht. Man gelangt so zu dem Resultate, dass die Fundamentalpunkte auf einer Reihe bei der Gruppe sich geschlossen permutirender Geraden in zwei zu einander conjugirten Systemen auftreten, welche auf L_1 bez. L_2 liegen, Wir können aber in vorhin beschriebener Weise diese Reihen von Fundamentalpunkten mit einer Ausnahme durch quadratische Transformationen zerstören. Man braucht also nur eine einzige Reihe zu betrachten, deren Punkte auf L_1 und L_2 beliebig vertheilt sein mögen.

Es erwächst nun die Aufgabe, invariante Büschel oder Netze C_{n+1} mit δ_n in O auch in diesem Falle zu bestimmen. Als Basispunkte müssen hier vor allem P und entweder die Fundamentalpunkte auf L_1 oder diejenigen auf L_2 gewählt werden. Die weiteren Basispunkte müssen bei der Gruppe zusammengehörige Punktsysteme auf L_1 und L_2 bilden. Punktgruppen ausserhalb dieser Geraden, welche sich geschlossen permutiren, können nicht als Basispunkte benutzt werden, weil von denselben jedesmal μ auf derselben Geraden durch O auftreten, was der Bedingung eines Systems C_{n+1} mit δ_n in O widerstreitet. Man erhält nun einen Büschel der gesuchten Art, falls ausser P n Basispunkte auf jeder der erwähnten Geraden genommen werden können, ein Netz dagegen, falls n Basispunkte auf der einen und nur $n-1$ auf der anderen gewählt werden. Es fragt sich nun, ob man auch bei jeder Vertheilung der einfachen Fundamentalpunkte entweder die gleiche oder nur um eine Einheit verschiedene Zahl von Basispunkten auf L_1 und L_2 nehmen kann. Auf diese Frage können wir sofort eine bejahende Antwort geben. In der That brauchen wir hier nur einen von Hrn. Klein aufgestellten Satz zu benutzen, nach welchem man aus den bei einer beliebigen binären Gruppe invarianten Formen immer einen rationalen Ausdruck vom *zweiten* Grade aufbauen kann*). Man kann ja den Curven des gesuchten Systems die Bedingung einer Berührung mit L_1 bez. L_2 von beliebig hoher Ordnung

*) Man sehe „*Vorlesungen über das Ikosaeder*“, S. 64.

in den Verschwindungspunkten des Zählers bez. Nenners des betreffenden Ausdrucks auferlegen. Also schliessen wir, dass auch in diesem Falle *die Gruppe auf unendlich viele Weisen in eine Collineationsgruppe oder in eine Gruppe mit einem zweiten invarianten Geradenbüschel übergeführt werden kann.* Als allgemeines Resultat der vorangehenden Nummern 2—4 haben wir somit das folgende erhalten:

Giebt es innerhalb einer orthanallagmatischen Gruppe keine Transformation, bei der jede Gerade des fundamentalen Büschels in der Weise in sich übergeht, dass der Ort der fest bleibenden Punkte nicht zerfällt, so lässt sich dieselbe birational entweder in eine Collineationsgruppe oder in eine Gruppe mit einem zweiten invarianten Strahlenbüschel transformiren.

5. Wir wollen jetzt noch diejenigen orthanallagmatischen Gruppen betrachten, bei denen *nicht zerfallende Doppelpunktscurven* auftreten. Den Strahlen des fundamentalen Büschels denken wir uns einen Parameter x eindeutig zugeordnet. Immer können wir die Gleichung *einer* Doppelpunktscurve in die Gestalt

$$y^2 = F(x) \tag{1}$$

bringen, wo $F(x)$ eine ganze Function ohne doppelte Factoren bezeichnet. Soll nun jeder Punkt dieser Curve bei einer Transformation von der Periode n fest bleiben, so muss diese Transformation durch die Gleichung

$$\frac{y' - \sqrt{F(x)}}{y' + \sqrt{F(x)}} = \varepsilon \cdot \frac{y - \sqrt{F(x)}}{y + \sqrt{F(x)}} \tag{2}$$

definirt werden können, wo $\varepsilon^n = 1$. Nur für $\varepsilon = -1$ wird aber hier y' *rational* durch x und y ausgedrückt, und zwar in der Form

$$y' = \frac{F(x)}{y}. \tag{3}$$

Dem widerspricht nicht, dass es auch, wie schon Hr. Kantor hervorgehoben hat, *aperiodische* eindeutige Transformationen giebt, bei denen alle Punkte einer hyperelliptischen Curve fest bleiben. Es ist ja für beliebiges $R(x)$ die Curve (1) Doppelpunktscurve bei jeder Transformation

$$y' = \frac{y R(x) + F(x)}{y + R(x)}. \tag{4}$$

Wir sind soeben zum Resultate gekommen, dass *nicht zerfallende Doppelpunktscurven nur bei involutorischen orthanallagmatischen Transformationen auftreten.* Aus der 2. Nummer dieses Paragraphen leuchtet aber hervor, dass, falls die Doppelpunktsörter bei mehr als einer Transformation zerfallen, das bei allen die Geraden des Hauptbüschels nicht permutirenden Transformationen der Fall sein muss. Man ersieht hieraus, dass die hier zu behandelnden Transformationen auf den

Geraden des fraglichen Büschels keine andere Gruppen als *Diedergruppen* G_{2n} hervorbringen können, wobei, falls $n > 2$, die zur ausgezeichneten cyklischen Untergruppe gehörigen Doppelpunkte zwei rationale Curven erfüllen.

Permutiren sich die Punkte jener Geraden nach einer *Vierergruppe*, so können also alle drei Doppelpunktscurven hyperelliptische Curven sein. Jede von diesen Curven muss bekanntermassen gegenüber allen Operationen der Vierergruppe invariant sein. Wir suchen also die bei der Operation (3) unverändert bleibenden hyperelliptischen Curven, deren Specialschaar g_2' durch den fundamentalen Strahlenbüschel ausgeschnitten wird. Wir erhalten unmittelbar

$$F_1(x)\,y^2 + 2F_2(x)\,y + F_1(x)\,F(x) = 0, \tag{5}$$

wobei die ganzen Functionen F_1 und F_2 beliebig gewählt werden können. Jeder Punkt einer Curve (5) bleibt bei einer Operation

$$F_1(x)\,y' + F_2(x) = \frac{\{F_2(x)\}^2 - F(x)\{F_1(x)\}^2}{F_1(x)\,y + F_2(x)} \tag{6}$$

invariant. Die dritte Operation der Vierergruppe erhält man durch Combination von (3) und (6), und zwar in der Normalgestalt

$$F_2(x)\,y' + F(x)\,F_1(x) = \frac{F(x)\,[F(x)\{F_1(x)\}^2 - \{F_2(x)\}^2]}{F_2(x)\,y + F(x)\{F_1(x)\}^2}. \tag{7}$$

Die zugehörige Doppelpunktscurve besitzt die Gleichung

$$F_2(x)\,y^2 + 2F(x)\,F_1(x)\,y + F_2(x)\,F(x) = 0\ ^*). \tag{8}$$

Die drei Doppelpunktscurven (1), (5) und (8) stehen mit einander in einem leicht angebbaren Zusammenhange. *Jeder Verzweigungspunkt der einen muss nämlich auch Verzweigungspunkt einer anderen sein, und durch denselben muss die dritte Curve gehen.* Kein Punkt kann aber *als Verzweigungspunkt* allen drei Curven gemein sein. Man kann umgekehrt auch drei beliebige hyperelliptische Curven als Doppelpunktsörter wählen, wenn nur die obige Bedingung befriedigt wird **).

Möge jetzt die Gruppe auf den Geraden des fundamentalen Büschels eine *Diedergruppe* G_{2n} $(n > 2)$ erzeugen. Die beiden Doppelpunktscurven bei der zugehörigen cyklischen G_n können wir in die Gerade $y = 0$ und in den Basispunkt des Büschels überführen, so dass dieselbe G_n durch die Operation

$$y' = \varepsilon y \tag{9}$$

erzeugt wird, wo ε eine primitive n^{te} Einheitswurzel bezeichnet. Die anderen Operationen innerhalb der Diedergruppe müssen diese beiden Oerter vertauschen. Dieselben sind folglich von der Gestalt

---

*) Man muss annehmen, dass im Allgemeinen F_2 und F gemeinschaftliche Factoren enthalten.

**) Man vergleiche Kantor „Theorie der endlichen Gruppen", S. 46.

(10) $$y' = \frac{\varepsilon^i R(x)}{y}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

womit auch die weiteren Doppelpunktscurven

(11) $$y^2 = \varepsilon^i R(x)$$

gegeben sind.

Bisher haben wir in dieser Nummer nur diejenigen Untergruppen der bezüglichen orthanallagmatischen Gruppen betrachtet, bei denen jede Gerade des fundamentalen Büschels fest bleibt. Man ersieht aber leicht, wie die binären Gruppen, nach welchen die Geraden des Büschels permutirt werden, aus den Gruppen, welche beziehungsweise die Functionen F und R zulassen, bestimmt werden können.

§ 3.

Die folgenden vier Classen.

1. Die Gruppen, bei denen die Kegelschnitte durch zwei feste Punkte A und B ein invariantes System bilden, oder, wie Hr. Kantor sie nennt, *die Gruppen M_2 und M_2'* lassen sich leicht bestimmen. Diese Kegelschnitte liefern ja die Bilder der ebenen Schnittcurven einer Fläche zweiten Grades bei der bekannten eindeutigen Abbildung der Fläche auf eine Ebene, welche vermittelst stereographischer Projection bewirkt werden kann. *Die fraglichen Transformationsgruppen der Ebene müssen also den Collineationsgruppen einer Fläche 2. Grades F_2 entsprechen.* Letztere Gruppen sind aber theils die Gruppen M_2, bei denen jedes System von erzeugenden Geraden invariant bleibt, theils die Gruppen M_2', bei denen die Systeme vertauscht werden; doch muss ersichtlich die Hälfte der Operationen einer Gruppe M_2' eine ausgezeichnete Untergruppe M_2 bilden. Die Gruppen M_2 erzeugt man durch die Combination zweier binären Gruppen, nach welchen die Geraden der Erzeugenden-Systeme sich permutiren, wobei die einzelnen Operationen der beiden Gruppen auf irgend eine isomorphe Art combinirt werden müssen. Soll die M_2 Untergruppe einer M_2' bilden, so müssen jene binären Gruppen holoedrisch isomorph sein.

Da die Erzeugenden-Systeme der F_2 bei der Abbildung in die Strahlenbüschel durch A und B übergehen, so bilden die Gruppen M_2 die im vorigen Paragraphen betrachteten Gruppen mit zwei invarianten Strahlenbüscheln. Nur die Gruppen M_2' liefern also neue Typen.

2. Wir wollen jetzt diejenigen Gruppen untersuchen, bei denen ein System von C_3 mit bez. 3, 4, 5 festen Basispunkten invariant bleibt, oder, nach Hrn. Kantor's Terminologie, *die Gruppen M_3, M_4 und M_5*. Im ersten Falle erhält man zwei Netze, das Netz der Geraden und das Netz der Kegelschnitte durch die drei Basispunkte,

welche die Eigenschaft besitzen, dass man aus jedem Netze eine beliebige Curve herausnehmen kann, welche zusammen eine C_3 des Systems bilden. *Die Hälfte der Operationen einer Gruppe M_3, welche keine Collineationsgruppe ist, besteht aus quadratischen Transformationen, welche jene beiden Netze vertauschen, die andere und ausgezeichnete Hälfte aus Collineationen, welche dieselben invariant lassen.*

3. *Die Gruppe M_4.* Man hat hier 5 Netze: das Netz der Geraden und 4 Netze von Kegelschnitten durch je drei Basispunkte; desgleichen 5 Büschel: 4 Büschel von Geraden durch je einen Basispunkt und den Büschel der Kegelschnitte durch alle 4 Basispunkte. Diese Netze und Büschel sind in der Weise mit einander verbunden, dass eine beliebige Curve eines Netzes und eine beliebige Curve eines zugeordneten Büschels eine C_3 des invarianten Systems zusammensetzen. *Die Gruppe M_4 erhält man nun durch den Inbegriff aller* 120 *Vertauschungen dieser* 5 *Netze bez. Büschel.* Diese G_{120} besteht nur aus Collineationen und quadratischen Transformationen, da ja das Netz der Geraden nur in sich selbst und in vier Netze von Kegelschnitten übergeführt werden kann *).

Die 5 erwähnten Büschel schneiden die Specialschaaren g_4' einer bestimmten bei der G_{120} invarianten C_6 vom Geschlechte $p = 6$ aus. Wählt man die Doppelpunkte in den Coordinatenecken und im Punkte $x_1 = x_2 = x_3$, so lautet die Gleichung dieser Curve:

$$2\Sigma(x_1^4 x_2 x_3 + x_2^3 x_3^3) - 2\Sigma x_1^4 x_2^2 + \Sigma x_1^3 x_2^2 x_3 - 6 x_1^2 x_2^2 x_3^2 = 0.$$

4. *Die Gruppen M_5.* Unter den C_3 des invarianten Systems treten hier 16 *Netze* auf, welche etwa noch durch einen festen Kegelschnitt oder Gerade ergänzt werden. Dieselben sind: das Netz der Geraden, 10 Netze von Kegelschnitten durch je 3 Basispunkte und 5 Netze von C_3 mit δ in je einem Basispunkte. Nun hat Hr. Kantor gefunden, dass es bei einer allgemeinen Lage der Basispunkte stets *eine* Transformation giebt, welche das Netz der Geraden in ein beliebiges der anderen 15 Netze transformirt, und dass diese 15 Transformationen involutorisch sind. So gehen z. B. das Netz der Geraden und ein Netz von Kegelschnitten bei einer quadratischen Transformation in einander über, bei welcher jede Ecke eines von drei Basispunkten gebildeten Dreiecks mit der gegenüberliegenden Seite vertauscht wird, und ausserdem die 2 übrigen Basispunkte permutirt werden.

---

*) Die obigen Resultate bezüglich der Gruppen M_2, M_2', M_3 und M_4 sind schon von Hrn. Kantor gegeben. Indess ist der Gegenstand dieses Paragraphen auch von Hrn. Autonne behandelt. Hr. Kantor hat das Verhältniss seiner Theorie zu den von diesem Forscher publicirten Noten in seiner „Theorie der endlichen Gruppen", S. 52 besprochen.

Soll die Gruppe M_5 andere Transformationen als die G_{16} enthalten, so muss es ersichtlich innerhalb derselben andere Operationen als die Identität geben, bei denen das Geradennetz invariant bleibt. Damit die Gruppe M_5 auf keine der früheren Classen reducibel sei, dürfen von den Basispunkten nicht zwei zusammenfallen oder drei in gerader Linie liegen. Berücksichtigt man diese Beschränkung, so findet man mit Hrn. Kantor, dass die einzigen Collineationsgruppen, welche die 5 Basispunkte als geschlossenes System permutiren können, die folgenden sind:

1) *Die Identität.*

2) *Eine* G_2.

3) *Eine cyklische* G_4. Hier kann man die 5 Basispunkte als die 4 Ecken eines Rechtecks und einen unendlich entfernten Kreispunkt betrachten.

4) *Diedrische* G_6. Als Basispunkte kann man hier die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks und die beiden unendlich entfernten Kreispunkte wählen.

5) *Diedrische* G_{10}. Die Basispunkte kann man aus den Ecken eines regulären Fünfecks erhalten.

Die Gesammtgruppen M_5 *erhält man durch Combination der in jedem Falle auftretenden ausgezeichneten* G_{16} *mit diesen Collineationsgruppen. Die Ordnungen der Gruppen in den erwähnten* 5 *Fällen sind somit:* 16, 32, 64, 96, 160*).

Wir wollen indessen das Problem der Gruppen M_5 noch von einer anderen Seite angreifen. Wir wählen aus den C_3 des invarianten Systems irgend 5 linear-unabhängige Curven:

$$X_i = 0. \qquad (i = 1, \ldots, 5)$$

Sodann betrachten wir die Relationen 2. Grades:

$$\Sigma a_{ik} X_i X_k = 0,$$

welche Curven 6. Ordnung mit δ in den 5 Basispunkten definiren. Nun lehrt eine leichte Abzählung, dass eine solche C_6 durch 12 neue Bedingungen bestimmt wird. Die obige Gleichung ist aber erst durch Festlegung der Verhältnisse der 15 Constanten a_{ik} bestimmt. Hiernach erschliessen wir, dass zwei Relationen:

$$(1) \qquad F_1 = \Sigma a_{ik} X_i X_k = 0, \quad F_2 = \Sigma \beta_{ik} X_i X_k = 0,$$

identisch für die ganze Ebene gelten müssen. Man kann also die Ebene als das Bild der Schnittfläche zweier dreidimensionalen Gebilde zweiter Ordnung im vierdimensionalen Raume betrachten. Es ist auch bekannt, dass, beim Gebrauche von pentasphärischen Coordinaten, die

*) Hr. Kantor hat (S. 52 und 105 seiner citirten Arbeit) für die Ordnungen der betreffenden Gruppen die unrichtigen Zahlen: 15, 30, 60, 90, 150, gegeben.

Gleichungen (1) *eine Cyklide* bestimmen. Man erkennt auch leicht, dass jene Fläche im vierdimensionalen Raume von einem beliebigen Punkte in eine Fläche F_4 im dreidimensionalen Raume mit einem doppelten Kegelschnitte projicirt werden kann. Es wäre hier möglich die bekannten Eigenschaften der Cykliden auf die Flächen (1) zu übertragen. Indess begnügen wir uns mit der Bemerkung, dass auch eine Fläche (1) *sechszehn Gerade enthält.* Diese Geraden werden bei der Abbildung der Fläche auf die Ebene in die 5 Basispunkte, die 10 Verbindungsgeraden dieser Punkte und den dieselben enthaltenden Kegelschnitt übergeführt. Den im Anfang dieser Nummer erwähnten 16 Netzen entsprechen im vierdimensionalen Raume 16 Netze von dreidimensionalen Räumen, welche je eine der 16 Geraden enthalten. Die Abbildung auf die Ebene kann als Projection von einer der 16 Geraden aufgefasst werden, und zwar von derjenigen, welche in einen Kegelschnitt transformirt wird; dabei entsprechen den Basispunkten 5 Gerade, welche jene Gerade schneiden.

Nach der Bestimmung derjenigen λ-Werthe, für welche die Discriminante $\Delta_5(\lambda)$ von $F_1 + \lambda F_2$ verschwindet, können wir bekanntlich die Gleichungen (1) im Allgemeinen auf die folgende Normalgestalt bringen:

$$\Sigma a_i X_i^2 = 0, \quad \Sigma b_i X_i^2 = 0. \tag{2}$$

Es wäre hier eine grosse Menge Fälle zu discutiren, wo die Gleichung $\Delta_5 = 0$ zusammenfallende Wurzeln besitzt. Ohne aber in weitere Einzelheiten eingehen zu wollen, begnügen wir uns mit der Bemerkung, dass beim Auftreten von doppelten Wurzeln entweder zwei Basispunkte zusammenfallen, oder deren drei in gerader Linie liegen, welche Fälle übrigens äquivalent sind. Wir brauchen also die fraglichen Specialfälle weiterhin nicht zu berücksichtigen.

Den Transformationsgruppen M_5 in der Ebene müssen nun die Collineationsgruppen entsprechen, welche die Fläche (2) in sich selbst überführen. Durch Combination der Zeichenwechsel der X_i erhält man sofort eine G_{16}, welche aus lauter involutorischen Transformationen besteht. Damit noch weitere Transformationen vorkommen, müssen die X_i in irgend einer Weise mit einander vertauscht werden können. Man erlangt so jene 5 Gruppen wieder, welche oben durch geometrische Betrachtungen in der Ebene gefunden wurden.

1) G_{16} im allgemeinen Falle.

2) G_{32}. Die Gleichungen (2) lassen sich schreiben:

$$X_1^2 + X_3^2 + a(X_2^2 + X_4^2) + X_5^2 = 0;$$
$$X_1^2 - X_3^2 + b(X_2^2 - X_4^2) = 0.$$

Hier können gleichzeitig X_1 mit X_3 und X_2 mit X_4 vertauscht werden.

3) G_{64}.

$$X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 - X_4^2 + X_5^2 = 0;$$
$$X_1^2 + iX_2^2 - X_3^2 - iX_4^2 = 0.$$

Hier ist die cyklische Vertauschung $(X_1 X_2 X_3 X_4)$ möglich.

4) G_{96}.

$$X_1^2 + jX_2^2 + j^2 X_3^2 + X_4^2 = 0; \quad \left(j = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right).$$
$$X_1^2 + j^2 X_2^2 + jX_3^2 + X_5^2 = 0.$$

Die Reihe $(X_1 X_2 X_3)$ kann hier sowohl cyklisch verschoben werden als auch in die inverse Reihe $(X_3 X_2 X_1)$ übergehen; in letzterem Falle müssen aber X_4 und X_5 vertauscht werden.

5) G_{160}.

$$X_1^2 + \varepsilon X_2^2 + \varepsilon^2 X_3^2 + \varepsilon^3 X_4^2 + \varepsilon^4 X_5^2 = 0: \quad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}\right).$$
$$\varepsilon^4 X_1^2 + \varepsilon^3 X_2^2 + \varepsilon^2 X_3^2 + \varepsilon X_4^2 + X_5^2 = 0.$$

Hier kann offenbar die Reihe $(X_1 X_2 X_3 X_4 X_5)$ sowohl cyklisch in sich selbst verschoben als auch in die inverse Reihe $(X_5 X_4 X_3 X_2 X_1)$ übergeführt werden.

Es leuchtet ein, dass die Gruppe der Vertauschungen der 5 Grössen X_i und diejenige der 5 Basispunkte in den entsprechenden Fällen isomorph sind. Dies erklärt sich durch die Thatsache, dass auf Grund der Symmetrie die bei der Projection der Fläche (2) auf die Ebene benutzte Gerade in jedem Raume $X_i = 0$ je eine der 5 Geraden schneidet, welche in die Basispunkte projicirt werden.

Bei jeder Gruppe M_5 existirt wenigstens eine invariante algebraische Curve vom Geschlechte $p = 5$; bei der G_{16} giebt es aber deren ∞^2 und bei der G_{32} ∞^1. In der That, fügen wir den Relationen (2) eine dritte

$$\Sigma c_i X_i^2 = 0 \tag{3}$$

hinzu, so liefert ersichtlich die Schnittcurve ein gegenüber der G_{16} invariantes Gebilde, und man kann durch Benutzung der Relationen (2) zwei Constante aus (3) hinwegschaffen, so dass nur zwei Verhältnisse der c_i unbestimmt bleiben. Nach einem Satze von Herrn Weber*) wird nun durch drei Relationen 2. Grades im vierdimensionalen Raume ein Gebilde vom Geschlechte $p = 5$ definirt, es sei denn, dass die bezügliche Schnittcurve Doppelpunkte besitze, was aber hier keineswegs im Allgemeinen zutrifft.

In den Fällen von G_{32}, G_{64}, G_{96} und G_{160} können wir zweckmässig der Relation (3) die folgende bezügliche Gestalt geben:

*) Math. Ann. Bd. 13, S. 35.

$$X_1^2 + X_3^2 + cX_5^2 = 0;$$
$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 0;$$
$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0,$$
$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = 0.$$

Die Formen links sind nämlich bei den bezüglichen Gruppen invariant.

Bei den durch die Relationen (2) *und* (3) *definirten Gebilden existiren* 10 *Systeme von unendlich vielen Abel'schen Wurzelformen*, welche den leicht zu ermittelnden 10 Relationen zwischen nur 3 Veränderlichen entsprechen. Hiermit berichtigen wir einen Satz von Hrn. Kraus*), nach welchem bei nicht-hyperelliptischen Gebilden vom Geschlechte $p = 5$ höchstens drei solche Systeme vorkommen können.

§ 4.

Die Gruppen M_6.

Die noch zu behandelnden drei Classen, bei denen ein System von C_3 mit bez. 6, 7 oder 8 festen Punkten invariant bleibt, oder die Gruppen M_6, M_7 und M_8, wie wir dieselben nach Hrn. Kantor bezeichnen wollen, liefern nach diesem Verfasser den schwierigeren Theil des Problems der Aufzählung der Typen. Auch ist, wie wir weiterhin zeigen wollen, eine endgültige Erledigung der betreffenden Aufgabe keineswegs von Hrn. Kantor gegeben. Hierbei seien jedoch mit voller Anerkennung Hrn. Kantor's Verdienste um die *einzelnen* periodischen Transformationen erwähnt.

1. Bekanntlich bildet man eine Fläche 3. Ordnung F_3 in der Weise eindeutig auf eine Ebene ab, dass den ∞^3 Querschnitten der Fläche die $\infty^3 C_3$ durch 6 feste Fundamentalpunkte entsprechen. Bei einer Transformation M_6 werden also die Querschnitte der zugehörigen F_3 geschlossen permutirt, was ersichtlich durch eine Collineation bewirkt werden kann. Hierauf beruht die Methode des Hrn. Kantor: er sucht nämlich zuerst die Collineationsgruppen der Flächen F_3 zu bestimmen und erhält sodann durch Abbildung die zugehörige Gruppe M_6.

Wir erinnern hier an die folgenden Eigenschaften der soeben erwähnten Abbildung. Den sechs Fundamentalpunkten $a_1, a_2, \ldots, a_6$ entsprechen auf der F_3 sechs Gerade, von denen keine zwei sich schneiden; den sechs Kegelschnitten $a_1', a_2', \ldots, a_6'$ durch je 5 Fundamentalpunkte entspricht eine ähnliche Gruppe von 6 Geraden auf der Fläche, wobei jede a_i von allen a_j', ausgenommen a_i' geschnitten wird;

*) Math. Ann. Bd. 16. Man vergleiche hierzu meine Schrift, „Ueber die algebraischen Curven von den Geschlechtern $p = 4, 5$ und 6, welche eindeutige Transformationen in sich besitzen", Anh. d. Abh. der Königl. Schw. Akad. der Wissenschaften, Bd, 21, Abth. I, Nr. 3.

beide Gruppen bilden somit die Hälften einer Schäffli'schen *Doppelsechs*. Die 15 übrigen Geraden der Fläche sind die Bilder der 15 Verbindungsgeraden je zweier Fundamentalpunkte; dieselben bezeichnen wir in entsprechender Weise durch $(a_i a_k)$ oder $(a_i' a_k')$,

Dem System der Geraden entspricht auf der F_3 ein System gewundener C_3, deren jede keiner Geraden a_i begegnet, aber jeder Geraden a_i' zweimal und jeder $(a_i a_k)$ einmal. Zu jeder der 36 Schäffli'schen Doppelsechse gehören zwei solche Netze, je nachdem die zugehörigen Curven die eine oder andere Hälfte von je 6 Geraden nicht schneiden, und wir können leicht die Bilder dieser Netze in der Ebene angeben. So geht das System der C_3, welche keine Gerade a_i' schneiden, in ein Netz von C_5 mit δ in den 6 Fundamentalpunkten über. Von den anderen 35 Doppelsechsen ergeben sich 20 auf analoge Weise mit der folgenden:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad (a_4 a_5), \ (a_4 a_6), \ (a_5 a_6);$$
$$(a_2 a_3), \ (a_1 a_3), \ (a_1 a_2), \quad a_6', \quad a_5', \quad a_4' \ .$$

Die Bilder der zugehörigen C_3-Systeme liefern das Netz der Kegelschnitte durch a_4, a_5, und a_6 und das Netz der C_4, welche δ in a_1, a_2 und a_3 besitzen und einfach durch a_4, a_5 und a_6 laufen. Die übrigen 15 Doppelsechse sind von folgendem Typus:

$$a_1, \ a_1', \ (a_2 a_3), \ (a_2 a_4), \ (a_2 a_5), \ (a_2 a_6);$$
$$a_2, \ a_2', \ (a_1 a_3), \ (a_1 a_4), \ (a_1 a_5), \ (a_1 a_6).$$

Die zugehörigen C_3-Systeme auf der F_3 gehen bei der Abbildung in zwei Netze von C_3 über, welche in a_2 bez. a_1 Doppelpunkte besitzen und durch a_3, a_4, a_5 und a_6 einfach hindurchgehen.

Jede Collineation der F_3 in sich bewirkt nun eine Vertauschung der Systeme von je 6 einander nicht schneidenden Geraden; dem entsprechend werden auch die 72 zugehörigen C_3-Systeme permutirt. Die Ordnung der entsprechenden Transformation M_6 hängt nun im Allgemeinen davon ab, welches System man bei der Abbildung in die 6 Fundamentalpunkte übergeführt hat, und man kann oft durch geeignete Wahl desselben diese Transformation bedeutend vereinfachen; jedenfalls ersieht man leicht nach dem Obigen, dass die Ordnung höchstens 5 sein kann, wobei dann die beiden Hälften der zu Grunde gelegten Doppelsechsgeraden vertauscht werden. Da aber Hr. Kantor auf die typische Darstellung der verschiedenen Transformationen ausgedehnte Aufmerksamkeit gerichtet hat, wollen wir diesen Gedankengang nicht weiter verfolgen. Wir erinnern nur noch an die bekannte Gruppe G_{51840} der Gleichung 27. Grades, von der die 27 Geraden einer F_3 abhängen; jede Gruppe M_6 muss ja mit einer Untergruppe dieser Gruppe holoedrisch isomorph sein.

Hr. Kantor hat auch bewiesen*), dass die Transformationsgruppen der Ebene, welche man aus den Collineationsgruppen einer F_3 mit Doppelpunkten herleitet, stets auf eine der 6 schon behandelten Classen reducibel sind.

2. Die wesentlich verschiedenen Typen der Collineationen, welche eine F_3 ohne Doppelpunkte in sich überführen können, hat Hr. Kantor auch aufgestellt**). Dabei wählt er bei der fraglichen Collineation invariante Ebenen als Coordinatenebenen und schreibt die Collineation

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = \lambda_1 x_1 : \lambda_2 x_2 : \lambda_3 x_3 : \lambda_1 x_4$$

ganz einfach $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Doch ist die Collineation von der Periode 5 oder der folgende Fall 8 von Hrn. Kantor unbeachtet gelassen. Wir geben hier die Functionen, welche, gleich Null gesetzt, die bei den bezüglichen Collineationen anallagmatischen F_3 darstellen, jedoch ohne die Coefficienten aufzuschreiben:

1.	$f_3(x_1, x_2, x_3) + x_4^2 f_1(x_1, x_2, x_3)$,	$1, 1, 1, -1$.
2.	$f_3(x_1, x_2) + x_1 f_2(x_3, x_4) + x_2 \varphi_2(x_3, x_4)$,	$1, 1, -1, -1$.
3.	$f_3(x_1, x_2, x_3) + x_4^3$,	$1, 1, 1, j$. $(j^3 = 1)$
4.	$f_3(x_1, x_2) + \varphi_3(x_3, x_4)$,	$1, 1, j, j$.
5.	$f_3(x_1, x_2) + x_3 x_4 f_1(x_1, x_2) + x_3^3 + x_4^3$,	$1, 1, j, j^2$.
6.	$f_3(x_1, x_2) + x_3^2 f_1(x_1, x_2) + x_4^2 x_3$,	$1, 1, -1, i$.
7.	$x_1^3 + x_2^2 x_1 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3^2 + x_2 x_4^2$,	$1, -1, i, -i$.
8.	$x_1^2 x_3 + x_3^2 x_4 + x_4^2 x_2 + x_2^2 x_1$,	$1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3$. $(\varepsilon^5 = 1)$
9.	$f_3(x_1, x_2) + x_3^2 f_1(x_1, x_2) + x_4^3$,	$1, 1, -1, j$.
10.	$x_1^3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3 x_4 + x_3^3 + x_4^3$,	$1, -1, j, j^2$.
11.	$x_1^3 + x_1 x_2^2 + f_3(x_3, x_4)$,	$1, -1, j, j$.
12.	$x_1^3 + x_1 x_2^2 + x_3^3 + x_3 x_4^2$,	$1, -1, j, -j$.
13.	$x_1^3 + x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_4^2$,	$1, -1, i, \frac{1-i}{\sqrt{2}}$.
14.	$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_4^3$,	$\varepsilon_1, \varepsilon_1^7, \varepsilon_1^4, 1$. $(\varepsilon_1^9 = 1)$
15.	$x_1^3 + x_1 x_2^2 + x_3^2 x_2 + x_4^3$,	$1, -1, i, j$.

Hr. Kantor hat die Eigenschaften der aus diesen Collineationen bei der Abbildung hervorgehenden Transformationen der Ebene näher besprochen. Bei einigen Collineationen existiren feste Gerade, bei anderen Systeme windschiefer Geraden, welche sich geschlossen permutiren. Eine solche feste Gerade bez. Gruppe von windschiefen Geraden kann man dann in das in die Fundamentalpunkte abzubildende Sextupel nehmen. Die Transformation ist, wie Hr. Kantor sich ausdrückt,

*) „Theorie der endlichen Gruppen", S. 68.

**) Acta Mathematica Bd. 19, S. 148 oder die oben citirte Arbeit, S. 94.

äquivalent einem Typus mit weniger als 6 Punkten in der Charakteristik*) und lässt sich dem zufolge auf eine der früheren Classen reduciren. Nur die Fälle 3, 9, 10, 14, 15 liefern also neue Typen. Hr. Kantor identificirt dieselben der Reihe nach mit den Typen Δ_3, B_6, Γ_6, B_9, B_{12}**), welche er in seiner Preisschrift auf andere Weise abgeleitet und ausführlich untersucht hat. Die charakterisirende Eigenschaft der Transformation Δ_3, welche Untergruppe von B_6, B_9 und B_{12} ist, ergiebt sich hier sehr leicht; bei der Collineation 3 bleiben ja auf der F_3 alle Punkte einer Curve vom Geschlechte $p = 1$ fest, welche durch die Ebene $x_4 = 0$ ausgeschnitten wird.

3. Wir wollen jetzt die vollständigen Gruppen M_6 bestimmen. Hier erledigen sich nach Hrn. Kantor***) die Fälle 3, 4, 9, 11, 12, 14, 15 der vorigen Nummer besonders leicht, weil in denselben die Gleichung der F_3 in der Form:

$$x_4^3 + f_3(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{1}$$

geschrieben werden kann. Als die Hesse'sche Fläche der Fläche (1) erhält man

$$x_4 , h_3(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

wobei h_3 die Hesse'sche Form von f_3 bedeutet. Die Ebene $x_4 = 0$ kann also mit keiner anderen Ebene bei der Collineationsgruppe der F_3 vertauscht werden, es sei denn, dass $h_3 = 0$ zerfällt, d. h. $f_3 = 0$ eine äquianharmonische Curve bedeutet. In letzterem Falle, welcher immer bei den Formen 4, 11, 12, 14 eintritt, lässt sich die Gleichung (1) auf die Gestalt:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0 \tag{2}$$

bringen. Die Collineationsgruppe dieser Fläche ist von der Ordnung **648.** Dieselbe erhält man durch Combination der Gruppe der 24 Vertauschungen der x_i mit einer G_{27}, welche durch Substitutionen von der Form $x_i' = jx_i$, j^2x_i erzeugt wird. Ist $f_3 = 0$ nicht äquianharmonisch, so erhält man die Gruppe durch Combination der perspectivischen G_3, bei welcher jeder Punkt der Ebene $x_4 = 0$ fest bleibt, mit der Collineationsgruppe der Curve $f_3 = 0$. Dieselbe ist also im Allgemeinen von der Ordnung **54**, jedoch von der Ordnung **108**, falls $f_3 = 0$ eine harmonische C_3 definirt, wie z. B. im Falle 15. Drückt man die Collineationsgruppe einer allgemeinen bez. harmonischen ebenen C_3 durch eine homogene Substitutionsgruppe mit der Deter-

*) Als Charakteristik einer Transformation bezeichnet Hr. Kantor den Inbegriff der Verkettungen der bei ihr auftretenden Fundamentalpunkte.

**) Die Reihe der Griechischen Buchstaben B, Γ, Δ bezeichnet bei Hrn. Kantor die Ordnung der erzeugenden Transformation. Somit lässt sich B_6 aus einer quadratischen, Γ_6 aus einer cubischen und Δ_3 aus einer biquadratischen Transformation herleiten.

***) „Theorie der endlichen Gruppen", S. 65.

minante 1 aus, so erhält man eine G_{54} bez. G_{108}, welche ersichtlich auf die obige G_{54} bez. G_{108} holoedrisch isomorph bezogen werden kann.

Im allgemeinen Falle können wir bekanntlich die Gleichung einer F_3 auf eine einzige Weise in der Form

$$a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3 + a_4 x_4^3 + a_5 x_5^3 = 0 \tag{3}$$

darstellen, wobei die identische Relation, welche die 5 Ebenen $x_i = 0$ mit einander verbindet, in der Gestalt

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \tag{4}$$

geschrieben werden kann. Kann man die F_3 in dieser Weise auf ein eigentliches *Pentaeder* beziehen, so lässt sich ihre Collineationsgruppe sehr leicht bestimmen. Es bildet ja in der That das Pentaeder ein gegenüber der F_3 invariantes Gebilde, und die zu ermittelnde Collineationsgruppe muss durch irgend eine Gruppe von Vertauschungen der 5 Pentaederebenen erzeugt werden. Damit die Gleichungen (3) und (4) bei einer solchen Gruppe invariant bleiben, müssen entweder einige a_i einander gleich sein, oder auch muss die Gleichung (3) die Form:

$$x_1^3 + \varepsilon x_2^3 + \varepsilon^2 x_3^3 + \varepsilon^3 x_4^3 + \varepsilon^4 x_5^3 = 0, \qquad (\varepsilon^5 = 1)$$

besitzen. Letzteren Fall brauchen wir aber nicht zu berücksichtigen, weil die Fläche dort Doppelpunkte enthält; die Discriminante der durch die Gleichungen (3) und (4) definirten Fläche ist nämlich

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_4}} + \frac{1}{\sqrt{a_5}}$$

und verschwindet folglich in dem fraglichen Falle.

Es seien nun $2a_i$ einander gleich, etwa $a_4 = a_5$. Die Collineation, welche die F_3 hier zulässt:

$$x_1' = x_1,\ x_2' = x_2,\ x_3' = x_3,\ x_4' = x_5,\ x_5' = x_4,$$

ist eine perspectivische; die Perspectivitätsebene ist $x_4 - x_5 = 0$, und das Centrum $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Man ersieht sogleich, dass dieser Fall mit der Form 1 der 2. Nummer übereinstimmt. Durch das Perspectivitätscentrum gehen drei gerade Linien der F_3, welche bei der Collineation invariant bleiben. Der Ebenenbüschel durch eine von diesen Geraden schneidet ein System von Kegelschnitten aus, welches man bei der Abbildung in einen Geradenbüschel überführen kann; die Transformation ist also vom orthanallagmatischen Typus. Jede der übrigen 24 Geraden der F_3 stösst in der Perspectivitätsebene mit der ihr entsprechenden zusammen.

Wir nehmen nun an, es seien $a_2 = a_3$ und $a_4 = a_5$. Die Collineationsgruppe ist in diesem Falle eine *Vierergruppe*. Dieselbe besteht aus zwei perspectivischen G_2 und einer G_2 „mit Axen“:

$$x_1' = x_1,\ x_2' = x_3,\ x_3' = x_2,\ x_4' = x_5,\ x_5' = x_4.$$

Die Verbindungsgerade der beiden Perspectivitätscentra liegt auf der

F_3 und bleibt ersichtlich bei der ganzen G_4 invariant. Folglich liefert auch dieser Fall eine orthanallagmatische Gruppe in der Ebene. Man erweist leicht die Identität dieses Falles mit dem Falle 2 der 2. Nummer.

Es seien $a_3 = a_4 = a_5$. Die Collineationsgruppe ist eine *diedrische* G_6, welche aus den Permutationen von x_3, x_4 und x_6 resultirt. Die Untergruppen sind drei perspectivische G_2 und eine G_3 vom Typus 5 der 2. Nummer. Hr. Kantor behauptet, dass diese G_6 immer als Untergruppe einer höheren Gruppe enthalten sei*), was ersichtlich nicht richtig sein kann, da ja im Allgemeinen die Fläche bei keiner anderen Permutation der Pentaederebenen in sich übergehen kann. Keine Gerade bleibt bei dieser G_6 invariant, da die Verbindungsgerade der Perspectivitätscentra nicht auf der F_3 liegt, auch kein System von windschiefen Geraden, da die bei jeder Untergruppe G_2 einander entsprechenden Geraden zusammentreffen. Die M_6 lässt sich also auf keinen früheren Typus zurückführen.

Es mögen jetzt die Bedingungen $a_1 = a_2$, $a_3 = a_4 = a_5$ gelten, Die Gruppe ist eine *diedrische* G_{12}. Die ausgezeichnete cyklische Untergruppe erzeugt man durch die Collineation:

$$x_1' = x_2,\ x_2' = x_1,\ x_3' = x_4,\ x_4' = x_5,\ x_5' = x_3.$$

Dieselbe ist von dem Typus Γ_6 oder der Form 10 der 2. Nummer.

Wir behandeln jetzt den Fall, dass $a_2 = a_3 = a_4 = a_5$. Die Gruppe ist hier eine *Oktaedergruppe*, welche durch die Vertauschungen von x_2, x_3, x_4 und x_5 entsteht. Die drei cyklischen Untergruppen G_4 sind vom Typus 7 der 2. Nummer. Hr. Kantor betrachtet die diedrischen Untergruppen G_8 als besondere Typen M_6**) aber mit Unrecht; dieselben treten ja einerseits immer als Untergruppen der Oktaedergruppe auf, anderseits existirt bei ihnen eine feste Gerade auf der F_3, was für die ausgezeichnete cyklische Untergruppe G_4 unmittelbar hervorleuchtet, so dass man diese G_8 auf den orthanallagmatischen Typus zurückführen kann.

Endlich seien $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$. Die so definirte F_3 ist unter dem Namen der *Diagonalfläche* bekannt. Hier führen alle 120 Vertauschungen der Pentaederebenen die Fläche in sich über. Die cyklischen Untergruppen G_5 sind vom Typus 8 der vorigen Nummer.

Unter den in der 2. Nummer aufgezählten cyklischen Gruppen treten somit nur 1, 2, 5, 7, 8, 10 in denjenigen Fällen auf, wo das fundamentale Pentaeder der Fläche eigentlich ist. Wir haben auch gefunden, dass die cyklischen Gruppen 2, 5, 7, 10 und 8 immer als

*) Man sehe seine „Theorie der endlichen Gruppen", S. 55, Theorem VII und S. 70, Theorem LIV.

**) Man sehe die citirte Arbeit S. 68, Theorem XLIX und S. 70, Theorem LV.

Untergruppen innerhalb höherer Gruppen auftreten, nämlich bez. einer Vierergruppe, diedrischen G_8, Oktaedergruppe, diedrischen G_{12}, G_{120}.

Nehmen wir die in der 2. Nummer mit 6 und 13 bezeichneten cyklischen G_4 und G_8 hinzu, so haben wir nun sämmtliche Collineationsgruppen, welche eine F_3 ohne Doppelpunkte in sich überführen können, bestimmt. Die Vollständigkeit dieser Aufzählung wollen wir in der nächsten Nummer bestätigen.

4. Die einzigen Fälle, in denen man noch die Möglichkeit anderer Collineationsgruppen annehmen könnte, sind diejenigen mit einem uneigentlichen fundamentalen Pentaeder. Jedenfalls kommen aber die verschiedenen cyklischen Gruppen nicht anders als innerhalb derjenigen Gruppen vor, welche in der vorigen Nummer angegeben sind. Daraus folgt, dass bei keiner Gruppe eine perspectivische G_2 fehlt, und dass mehrere solche G_2 auftreten müssen, falls andere cyklische Gruppen als G_8 oder ihre Untergruppen G_4 und G_2 vorkommen.

Wir nehmen zuerst an, die soeben erwähnten G_4 und G_8 treten nicht auf. Man kann von einem bestimmten Perspectivitätscentrum O einer G_2 ausgehen. Sollen andere Perspectivitätscentra vorkommen, so müssen dieselben entweder zu je zweien in gerader Linie durch O liegen oder auch in der Perspectivitätsebene belegen sein. Nun stossen in jedem Centrum drei Gerade zusammen, welche bei der G_2 unvertauscht bleiben; die Paare der sich vertauschenden Geraden treffen aber einander in der Perspectivitätsebene. Die einzigen Punkte dieser Ebene, in denen drei Gerade zusammenstossen können, sind somit die Schnittpunkte mit den 3 durch O gehenden Geraden. Von diesen drei Punkten können keiner, einer oder auch alle drei neue Perspectivitätscentren sein; nicht aber zwei, weil der dritte Punkt schon durch diese 2 perspectivische G_2 mit den beiden anderen vertauscht wird und somit dieselbe geometrische Bedeutung besitzen muss. Wir wollen diese drei Fälle in Reihe behandeln.

a) *Kein neues Perspectivitätscentrum in der zum Centrum O gehörigen Perspectivitätsebene.* Giebt es hier auch kein anderes Centrum, so haben wir die einzelne *perspectivische* G_2. Liegen aber zwei Centren in gerader Linie von O aus, so erhalten wir die *diedrische* G_6. Sollen mehrere solche Paare vorkommen, so müssen auch von jedem dieser Centra die übrigen zu je zwei in gerader Linie liegen. Man ermittelt leicht die Bedingung, dass 9 Perspectivitätscentra die Wendepunktsconfiguration einer ebenen C_3 bilden sollen. Hier erhält man die G_{54}.

b) *In der Perspectivitätsebene liegt ein einziges Perspectivitätscentrum.* Wenn keine anderen Centra vorkommen, haben wir die *Vierergruppe*. Liegt aber ein einziges Paar in gerader Linie durch O, so erlangen wir die *diedrische* G_{12}; das Centrum in der erwähnten Ebene bleibt hier überhaupt unvertauscht. Wenn mehrere solche Paare vorkommen,

so muss, da drei in gerader Linie liegende Centra nothwendig bei der Gruppe mit einander vertauscht werden, auch jedes dieser Centra durch eine auf der Fläche liegende Gerade mit einem anderen verbunden sein, die übrigen Perspectivitätscentra aber müssen von demselben aus zu je zwei in gerader Linie liegen. Diesen Bedingungen genügen wir nur in der Weise, dass insgesammt 6 Centra vorkommen, welche die Ecken eines vollständigen Vierseits bilden, wobei die drei Diagonalen der F_3 angehören. Wir gelangen also hier zur *Oktaedergruppe.*

c) *Drei Perspectivitätscentra in der Perspectivitätsebene von O.* Giebt es keine anderen Centra, so erhalten wir hier abermals die *diedrische* G_{12}. Sollen wir aber zu neuen Gruppen gelangen, so müssen ersichtlich in der Perspectivitätsebene *jedes* Centrums drei Centra belegen sein; wir können ja irgend welches Centrum als O wählen. Hier giebt es nun zwei Möglichkeiten: entweder enthalten die Perspectivitätsebenen der drei in derselben Perspectivitätsebene liegenden Centren *dieselben* drei Centra oder nicht. Man erschliesst ohne Mühe, dass in ersterem Falle die Geraden durch je drei Centra die 6 Kanten eines Tetraeders bilden; in letzterem Falle aber die 10 Kanten eines Pentaeders. Dieser Fall giebt die G_{120}, jener die G_{648}.

Wir betrachten nun die *cyklische* G_4, deren Untergruppe G_2 perspectivisch ist. Die vom Centrum O dieser G_2 ausgehenden Geraden der F_3 können aus der zugehörigen Perspectivitätsebene keine neue Perspectivitätscentren ausschneiden. Durch die fraglichen Schnittpunkte können nämlich keine anderen Geraden der Fläche gehen, weil solche bei der G_4 zu je vier vertauscht werden. Sollen also andere Centra existiren, in welche O bei der Gruppe übergeführt werden kann, so müssen dieselben zu je 2 in Geraden durch O liegen. Wir finden, wie vorhin, die Möglichkeit, dass 9 solche Centra die Configuration der Wendepunkte einer ebenen C_3 bilden. Die zugehörige Gruppe ist die G_{108}.

In gleicher Weise beweisen wir, dass die *cyklische* G_8 in keiner höheren Collineationsgruppe der F_3 enthalten sein kann.

5. Aus den vorigen Entwicklungen erhalten wir das Resultat, dass die typischen Gruppen M_6 die folgenden 7 sind:

1) *Diedrische* G_6;

2) *Diedrische* G_{12};

3) *Oktaedergruppe* G_{24};

4) *Die* G_{120}, *welche durch die Vertauschungen der* 5 *Pentaederebenen entsteht*;

5) G_{54};

6) G_{108};

7) G_{648}.

Wie schon in der 3. Nummer angedeutet wurde, weicht Hrn. Kantor's

Aufzählung*) von der obigen in zwei Hinsichten ab, indem er nämlich für den Fall 1 die Ordnung 12 statt 6 giebt und eine reductible Gruppe von der Ordnung 8 hinzunimmt, welche ohnehin immer als Untergruppe der Oktaedergruppe auftritt.

Bei den ersten 4 Typen kann die Abbildung in der Weise bewirkt werden, dass eine ausgezeichnete Hälfte der ebenen Transformationsgruppe aus Collineationen besteht. Das fundamentale Sextupel bildet dann, wie schon von Hrn. Kantor bemerkt, in den Fällen 1 und 2 zwei dreifach bez. vierfach perspective Dreiecke, in den Fällen 3 und 4 ein sechsfach bez. zehnfach Brianchon'sches Sechseck. Hr. Kantor hat auch die charakteristischen Eigenschaften des fundamentalen Sextupels bei den drei übrigen Typen angegeben. So kann man z. B. im Falle der G_{648} als Fundamentalpunkte die Ecken zweier Wendepunktsdreiecke einer C_3 also zweier sechsfach perspectiven Dreiecke erhalten.

Die diedrische G_6 tritt als Untergruppe bei den übrigen 6 Gruppen auf. Desgleichen sind diedrische G_{12} und Oktaedergruppen Untergruppen der G_{108} und G_{648}. Bei den weiteren innerhalb der verschiedenen Gruppen auftretenden Untergruppen wollen wir uns nicht aufhalten.

§ 5.

Die Gruppen M_7.

1. Bei der im vorigen Paragraphen besprochenen eindeutigen Abbildung einer Fläche F_3 auf eine Ebene wurde das System der Querschnitte in das System der durch die 6 Fundamentalpunkte hindurchgehenden C_3 übergeführt. Hier betrachten wir das Netz der C_3, welche durch noch einen 7. Basispunkt bestimmt sind. Diesem Netze entspricht auf der F_3 das System der Querschnitte durch den Bildpunkt. Den Gruppen von birationalen Transformationen, welche ein System von C_3 durch 7 Punkte invariant lassen, entsprechen also Gruppen von birationalen Transformationen auf den Flächen F_3, bei denen das Netz der Querschnitte durch einen bestimmten Punkt der bezüglichen F_3 invariant bleibt.

Die Berührungscurve des Tangentenkegels der F_3 von diesem Punkte P liefert ersichtlich eine bei der Gruppe invariante Curve. Dieser Curve entspricht in der Ebene die Jakobi'sche Curve des Netzes der C_3. Projicirt man die F_3 vom Punkte P auf eine Ebene E, so ist diese Ebene zweideutig auf die F_3, also auch auf die Ebene E' des Netzes der C_3 bezogen. Dabei ist die Projection jener Berührungscurve eine Uebergangscurve, deren Punkten zusammenfallende Punkte entsprechen.

*) „Theorie der endlichen Gruppen", S. 79.

Die Berührungscurve ist die Schnittcurve der F_3 mit der ersten Polare von P; dieselbe ist somit von der 6. Ordnung und besitzt einen Doppelpunkt in P. Ihre projicirte Curve auf die Ebene E ist folglich eine C_4. Die 28 Doppeltangenten dieser C_4 sind die Spuren der 27 Geraden der F_3 und der Berührungsebene in P. Die Jakobi'sche Curve des C_3-Netzes in der Ebene E' ist eine C_6 mit Doppelpunkten in den 7 Fundamentalpunkten; dieses Resultat erhält man entweder direct oder auch durch die Abbildung der Uebergangscurve.

Den 28 Doppeltangenten entsprechend, kann eine ebene C_4 auf 28 verschiedene Weisen aus dem Tangentenkegel von einem Punkte einer F_3 erzeugt werden. In der That, sei

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0$$

die Gleichung einer Doppeltangente, dann kann die Gleichung der C_4 in der Form

$$4f_1f_3 - f_2^2 = 0$$

geschrieben werden, und man erhält sogleich als Gleichung der fraglichen F_3:

$$x_4^2 f_1 + x_4 f_2 + f_3 = 0^*).$$

Letztere Gleichung kann nur in der Weise geändert werden, dass $ax_4 + bx_3 + cx_2 + dx_1$ statt x_4 gesetzt wird, also ist dieselbe in projectiver Hinsicht eine bestimmte. Man hat bekanntlich auch ∞^6 projectivisch verschiedene C_4 und nur ∞^4 F_3, aber von den ∞^2 Punkten einer F_3 erzeugt man in der obigen Weise ∞^2 C_4. Man darf also schon aus diesem Grunde erwarten, dass jeder C_4 nur eine endliche Zahl von F_3 zugeordnet ist.

Den geraden Linien der Doppelebene E oder den durch P gehenden Querschnitten der F_3 entsprechen, wie bemerkt, in der Ebene E' die C_3 durch die 7 Fundamentalpunkte. Dabei entsprechen aber den Geraden, welche die C_4 berühren, C_3 mit δ, und insbesondere den 28 Doppeltangenten zerfallende C_3. Von den Doppeltangenten sind ja 27 sowohl die Bilder der 27 Geraden der F_3 als auch der Kegelschnitte, welche in den durch diese Geraden und P bestimmten Ebenen liegen, und die 28. das Bild des Punktes P und der in dessen Tangentenebene liegenden Curve. Man hat also in der Ebene E' 28 Paare zusammengehöriger Fundamentalcurven, welche man unmittelbar aus der Abbildung der F_3 aufzählen kann. Dieselben sind: die 7 *Fundamentalpunkte* a_i $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ und *die* $7C_3$ a_i', welche je im zugehörigen Punkt a_i einen Doppelpunkt besitzen und durch die 6 übrigen gehen; *die* 21 *Geraden* $(a_i a_k)$, welche je 2 Fundamentalpunkte a_i und a_k verbinden, und die 21 zugehörigen *Kegelschnitte* $(a_i a_k)'$, welche jedesmal durch die 5 übrigen Fundamentalpunkte hindurchlaufen.

*) Vgl. Kantor, Acta Mathematica XIX, S. 182.

Das System der 7 Doppeltangenten, welches in die a_i und a_i' abgebildet worden ist, nennt man ein *Aronhold'sches Septupel*. Es giebt 288 solche Septupel; jede Doppeltangente gehört nämlich zu 72, da man ja die 6 übrigen auf eben so viele Weisen wählen kann, wie es auf der F_3 Gruppen von je 6 sich nicht schneidenden Geraden giebt.

Wir betrachten jetzt diejenige involutorische Transformation Θ_2 der Ebene E', welche aus der Vertauschung der beiden Blätter der Doppelebene E herrührt. Dabei bleibt ersichtlich jeder Punkt der Jakobi'schen C_6 invariant, und jede C_3 des fundamentalen Netzes erleidet eine involutorische Transformation in sich, bei welcher ihre 4 ausserhalb der Fundamentalpunkte belegenen Schnittpunkte mit jener C_6 fest bleiben. Jede zwei Fundamentalcurven, welche die Bilder derselben Doppeltangente sind, werden mit einander vertauscht. Folglich gehen die Punhte a_i und die C_3 a_i' in einander über; dieselben liefern somit die Hauptpunkte und Hauptcurven der fraglichen Cremona-Transformation, welche von der 8. Ordnung sein muss.

Man kann natürlich bei der Abbildung der Doppelebene E auf die einfache Ebene E' ein beliebiges der 288 Aronhold'schen Septupel als den 7 Fundamentalpunkten a_i entsprechend herauswählen; doch ändert sich freilich die gegenseitige Lage dieser Punkte nach dem zu Grunde gelegten Septupel. Dem Uebergange von einem Hauptseptupel zu einem anderen entsprechen in E' zwei birationale Transformationen, welche vermittelst der Transformation Θ_2 aus einander hervorgehen; die Summe der Ordnungen dieser beiden Transformationen ist immer 9*).

2. Bei den Transformationsgruppen M_7, welche ein durch 7 Punkte bestimmtes Netz von C_3 in sich überführen, bleibt ersichtlich die Jakobi'sche C_6 invariant. Wir brauchen also nur diejenigen Gruppen aufzusuchen, welche diese Curve gestatten kann. Dieses Problem erledigen wir durch die Aufsuchung der möglichen Collineationsgruppen der Uebergangscurve C_4 in der Doppelebene. In letzterem Falle handelt es nur von Collineationen, weil hier das System der adjungirten φ-Curven aus den Geraden besteht; die C_4 kann nämlich keine Doppelpunkte besitzen, ohne dass die Gruppe auf eine der früher behandelten Typen zurückgeführt werden könnte.

Die C_4 vom Geschlechte $p = 3$, welche durch cyklische Collineationen in sich übergehen, sind in der folgenden Uebersicht enthalten**):

1. $x_3^4 + x_3^2 f_2(x_1, x_2) + f_4(x_1, x_2)$, 1, 1, −1,

*) Die hier besprochene rational eindeutige Abbildung einer Doppelebene auf eine einfache Ebene mit einer Uebergangscurve, welche durch Cremona-Transformationen auf eine C_4 des Geschlechtes $p = 3$ gebracht werden kann, ist zuerst von Clebsch (Math. Annalen Bd. III), später von de Paolis und anderen behandelt worden.

**) Dieselbe wurde von Hrn. Kantor gegeben, Acta Math. XIX, S. 157.

2.	$x_3^3 f_1(x_1, x_2) + f_4(x_1, x_2)$	$1, 1, j.$
3.	$x_3^2 x_2^2 + x_3 x_2 x_1^2 + x_3^3 x_1 + x_2^3 x_1 + x_1^4,$	$1, j, j^2.$
4.	$x_3^4 + f_4(x_1, x_2),$	$1, 1, i.$
5.	$x_3^4 + x_3^2 x_1 x_2 + x_1^4 + x_1^2 x_2^2 + x_2^4,$	$1, -1, i.$
6.	$x_3^3 x_1 + x_1^4 + x_1^2 x_2^2 + x_2^4,$	$1, -1, j.$
7.	$x_3^3 x_2 + x_2^3 x_1 + x_1^3 x_3,$	$\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^4.$ $(\varepsilon^7 = 1)$
8.	$x_3^4 + x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3,$	$1, -1, \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$
9.	$x_3^3 x_1 + x_1^3 x_2 + x_2^4.$	$1, \varepsilon_1^3, \varepsilon_1.$ $(\varepsilon_1^9 = 1)$
10.	$x_3^4 + x_1^4 + x_1 x_2^3,$	$1, j, i.$

Jede solche Collineation liefert durch Vermittlung von Θ_2 zwei Transformationen in der Ebene E'. Hr. Kantor hat diejenigen Typen seiner Preisschrift bestimmt, mit denen diese Transformationen identisch sind. So erhält man aus den Collineationen 2, 6, 9, 10 die schon bei den Gruppen M_6 auftretenden Typen Δ_3, B_6, B_9, B_{12} wieder. Dieselben Transformationen liefern durch Combination mit Θ_2 die neuen Typen Γ_6'', Δ_6. B_{18}, B_{12}'*). Die Collineationen 3 und 7 geben Γ_6' und B_{14}. Die eine aus 4 herrührende Transformation ist E_4; dieselbe ist durch die Invarianz aller Punkte des Bildes von $x_3 = 0$, also einer elliptischen Curve, charakterisirt. Die übrigen Transformationen lassen sich auf Collineationen oder den orthanallagmatischen Typus reduciren. Die Gruppen von Γ_6', Γ_6'', B_{14} und B_{18} enthalten Θ_2 als Untergruppe.

3. Hr. Kantor hat in seiner späteren Arbeit**) versucht, diese Transformationen zu endlichen Gruppen zu combiniren. Indessen stimmen seine Resultate bezüglich der vollständigen Collineationsgruppen der ebenen C_4 nicht mit denjenigen überein, welche ich schon in einer früher erschienenen Arbeit gegeben habe***). Dabei zogen wir aus einer von Hrn. Hurwitz aufgestellten Gleichung†) direct den Schluss, dass zu den eindeutigen Transformationen eines Gebildes vom Geschlechte $p = 3$ in sich nur die Primzahlperioden 2, 3 und 7 gehören können. Wir wollen hier eine neue Ableitung der fraglichen Gruppen geben.

---

*) Bei den fraglichen 4 Collineationen existirt eine feste Undulationstangente; diese oder jene Typen erhalten wir, je nachdem die über einander liegenden Blätter dieser Undulationstangente vertauscht werden oder nicht.

**) „Th. d. endl. Gruppen". S. 82.

***) „*Ueber die hyperelliptischen Curven und diejenigen vom Geschlechte $p = 3$, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen.*" Anh. d. Abh. d. Königl. Schw. Akad. d. Wissensch., Bd. 21, Abth. I, Nr. 1 (1895).

†) Math. Ann. Bd. XXXII.

Aus der in der vorigen Nummer gegebenen Uebersicht ersieht man, dass eine allgemeine nicht hyperelliptische Curve

(2) $$f_4(x_1, x_2, x_3) = 0$$

vom Geschlechte $p = 3$ durch keine von der *Identität* verschiedene Collineation in sich übergeht.

Die symmetrische Curve

(2) $$x_3^4 + x_3^2 f_2(x_1, x_2) + f_4(x_1, x_2) = 0$$

geht durch eine *harmonische Perspectivität* in sich über, welche mit der Identität eine G_2 bildet. Durch das Perspectivitätscentrum $x_1 = x_2 = 0$ gehen 4 Doppeltangenten: $4f_4 - f_2^2 = 0$. Die bei der Transformation festen Punkte $x_3 = f_4 = 0$ sind *sextactische Punkte*, in denen also ein Kegelschnitt 6 auf einander folgende Schnittpunkte mit der C_4 hat. Solcher sextactischen Punkte giebt es nach Cayley auf einer ebenen C_n $n(12n-27)$, also auf einer C_4 84. Kein Punkt der C_4 kann auf zwei (oder mehr) Perspectivitätsaxen liegen; auf der Tangente würde ja durch Combination der bezüglichen Perspectivitäten eine nicht endliche binäre Gruppe erzeugt werden. Die höchste Zahl der möglichen Perspectivitäten ist also 84 : 4 oder 21. Diese Zahl wird auch erreicht, nämlich bei der G_{168}.

Ist $f_2 = 0$ ein Paar in einer der drei durch die gegenseitige Zuordnung der Elemente von f_4 bestimmten Involutionen, so können wir die Gleichung auf die Gestalt

(3) $$x_3^4 + x_3^2(ax_1^2 + bx_2^2) + x_1^4 + cx_1^2x_2^2 + x_2^4 = 0$$

bringen. Hier treten drei Perspectivitäten auf, und die Gruppe ist eine *Vierergruppe.*

Wenn die Elemente von f_2 ein zusammengehöriges Paar in zwei der drei erwähnten Involutionen bilden, wobei f_2 einen der drei fundamentalen quadratischen Factoren der Jakobi'schen Covariante J_6 von f_4 abgiebt, so ist die Gruppe eine *diedrische* G_8. Die Gleichung (3) nimmt hier die Form

(4) $$x_3^4 + ax_3^2(x_1^2 + x_2^2) + x_1^4 + bx_1^2x_2^2 + x_2^4 = 0,$$

und man erhält hieraus die Form 5 der vorigen Nummer, falls man die in $x_3 = 0$ liegenden Coordinatenecken in die Punkte $x_1^2 + x_2^2 = 0$ verlegt.

Hier bietet sich von selbst der Specialfall, dass $a = b$, also:

(5) $$x_3^4 + x_2^4 + x_1^4 + a(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2) = 0.$$

Die Gruppe ist hier eine G_{24}, welche durch Combination der Zeichenwechsel und der Vertauschungen der x_i erzeugt wird. Dieselbe entsteht auch durch die Permutationen der 4 Geraden $x_1 \pm x_2 \pm x_3 = 0$, welche Doppeltangenten der C_4 sind, und ist sonach mit der *Oktaedergruppe* holoedrisch isomorph.

Hr. Kantor hat die Gruppen der Curven (4) und (5) unrichtig bestimmt*). Er behauptet nämlich, dass jene Curve 7 involutorische Perspectivitäten und diese deren 15 gestatte. Diese Anzahl Perspectivitäten tritt dagegen bei den Curven auf, welche eine Collineationsgruppe G_{16} bez. G_{96} besitzen, aber auch hier gehören dieselben keiner Untergruppe G_8 bez. G_{24} an.

Die einzigen Gruppen, bei denen keine anderen cyklischen Gruppen als G_2 und nicht perspectivische G_4 vorkommen, sind die zu den Curven (2), (3) und (4) gehörigen. Die Ordnung m muss nämlich Theiler von sowohl 24 als 56 sein, weil die 24 *Wendepunkte* und die 56 *Berührungspunkte der Doppeltangenten* sich in Gruppen zu je m vertauschen; dieser Schluss wird nicht dadurch beeinträchtigt, dass etwa bei einer G_2 *Undulationspunkte* fest bleiben können, weil ein solcher mit zwei Punkten jedweder Art äquivalent ist. Die Ordnung muss also entweder 2, 4 oder 8 sein. Nun haben wir soeben gefunden, dass die cyklische G_4 stets als Untergruppe einer diedrischen G_8 vorkommt. Aus lauter G_2 lässt sich aber in der Ebene nur die Vierergruppe zusammensetzen; denn die Aufeinanderfolge zweier harmonischen Perspectivitäten liefert nur dann eine eben solche Transformation, wenn jede Axe durch das zur anderen gehörige Centrum geht.

Einer C_4, welche bei einer nicht perspectivischen G_3 invariant bleibt, kann man die Gleichung

$$x_1^2 x_2^2 + a x_3 (x_1^3 + x_2^3) + b x_3^2 x_1 x_2 + x_3^4 = 0 \tag{6}$$

geben. Bei dieser G_3 bleiben die *Berührungspunkte der Doppeltangente* $x_3 = 0$ *fest*. Die G_3 ist stets Untergruppe einer *diedrischen* G_6 und in keinem Falle, wie Hr. Kantor zu glauben scheint, die vollständige Collineationsgruppe der C_4. Dies wird besonders einleuchtend, falls man x_1 und x_2 durch $x_1 + i x_2$ bez. $x_1 - i x_2$ ersetzt. Die Gleichung erhält dann die Gestalt

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 + 2 a x_3 x_1 (x_1^2 - 3 x_2^2) + b x_3^2 (x_1^2 + x_2^2) + x_3^4 = 0. \tag{6a}$$

Man ersieht leicht, dass die Curve drei perspectivische Transformationen in sich um die drei Axen $x_2 = 0$, $x_2 \pm x_1 \sqrt{3} = 0$ besitzt, welche die Berührungspunkte der Doppeltangente $x_3 = 0$ vertauschen. Entsprechend den 28 Doppeltangenten, kann eine C_4 höchstens 28 solche diedrische G_6 besitzen, welche Zahl auch bei der G_{168} erreicht wird.

Geht die C_4 bei einer höheren Gruppe, in welcher die Diedergruppe G_6 eine Untergruppe bildet, in sich über, so muss die Doppeltangente $x_3 = 0$ mit wenigstens drei anderen vertauschbar sein, welche durch die cyklische G_3 sich permutiren. Wenn die Zahl der mit $x_3 = 0$ äquivalenten Doppeltangenten n ist, so ergiebt sich nach bekannten

*) a. a. O., S. 88, Theorem CI und Theorem CII: 12, 13.

Sätzen $6n$ als Ordnung der Gruppe. Ist $n=4$, so erhält man die schon behandelte Oktaedergruppe. Wenn $n>4$, müssen in der Gruppe Collineationen vorkommen, bei denen Wendepunkte fest bleiben, weil hier der Grad der Gruppe grösser als die Zahl dieser Punkte ist. Alle Gruppen, in denen Collineationen mit festen Wendepunkten auftreten, leiten wir im Folgenden ab.

Bei der *perspectivischen* G_3, welche die Curve

$$x_3^3 f_1(x_1, x_2) + f_4(x_1, x_2) = 0 \tag{7}$$

besitzt, sind die auf der Axe $x_3=0$ liegenden Punkte *Wendepunkte*, deren Tangenten durch das Centrum gehen, und dieses ist ein *Undulationspunkt*.

Man fragt sich, ob die so erhaltene Curve noch weitere Collineationen in sich gestatten kann. Das geschieht, wenn die binäre Form $f_4(x_1, x_2)$ eine von der Identität verschiedene Gruppe von Transformationen in sich besitzt, bei denen $f_1(x_1, x_2) = 0$ einen Fixpunkt abgiebt. Dafür ist erforderlich, dass letzterer Punkt entweder der Jakobi'schen oder, falls nämlich die quadratische Invariante von f_4 verschwindet, der Hesse'schen Covariante von f_4 angehört. In jenem Falle erhält man leicht die Gleichung

$$x_3^3 x_1 + x_1^4 + a x_1^2 x_2^2 + x_2^4 = 0 \tag{8}$$

und als Transformationsgruppe die *cyklische* G_6. Der andere Fall aber gehört zur *cyklischen* G_9, wobei die Gleichung der C_4 die folgende ist:

$$x_3^3 x_1 + x_1^3 x_2 + x_2^4 = 0. \tag{9}$$

Sollen in der Gruppe andere perspectivische G_3 auftreten, so müssen die zugehörigen Centren und Axen durch die gegebene G_3 zu je drei in einander übergehen. Allein es können auch höchstens 4 solche G_3 vorkommen, denn die vier Undulationspunkte und 16 Wendepunkte, welche durch die Centren und Axen gegeben werden, liefern die Gesammtzahl von 24 Inflexionen. Die binäre Gruppe, welche auf der durch die 4 Undulationspunkte gehenden Geraden erzeugt wird, enthält $4G_3$ und ist die Tetraedergruppe. Nehmen wir $x_2=0$ als Gleichung dieser Geraden und $x_1=x_3=0$ als Schnittpunkt der 4 Perspectivitätsaxen, so lässt sich die Gleichung der C_4 leicht auf die Gestalt

$$x_3^3 x_1 + x_1^4 + x_2^4 = 0 \tag{10}$$

bringen. Die Gruppe ist eine G_{48}, welche durch Combination der Tetraedergruppe der Form $x_3^3 x_1 + x_1^4$ und der durch die Substitution $x_2' = ix_2$ entstehenden G_4 erzeugt wird. Dieselbe enthält vier cyklische G_{12}. Hr. Kantor giebt 72 als die Ordnung dieser Gruppe; dabei begeht er den merkwürdigen Fehler, dass er ausser den 48 erwähnten Collineationen noch 24 hinzunimmt, ohne jedoch deutlich anzugeben, wie dieselben entstehen sollen*).

*) a. a. O., S. 86, Theorem XC. Sowohl die G_{48} als die folgenden G_{96} und G_{192}

Die Gruppe der Curve

(11) $$x_3^4 + f_4(x_1, x_2) = 0,$$

welche eine *perspectivische* G_4 besitzt, entsteht als Combination dieser G_4 mit der Vierergruppe, welche die binäre Form f_4 in sich überführt; dieselbe ist somit eine G_{16}. Nur in zwei Fällen besitzt f_4 eine höhere Gruppe: wenn die quadratische Invariante verschwindet, ist dieselbe die Tetraedergruppe, und wir erhalten die Curve (10) mit einer G_{48}; ist dagegen die cubische Invariante $T = 0$, so besteht jene binäre Gruppe aus einer diedrischen G_8, und die Gleichung (11) lässt sich auf die einfache Form

(12) $$x_3^4 + x_2^4 + x_1^4 = 0$$

bringen. Die Gruppe ist eine G_{96}, welche durch Combination einer G_{16}, welche die Coordinatenaxen unvertauscht lässt, mit der Gruppe ihrer 6 Vertauschungen entsteht. Die G_{96} enthält 6 cyklische G_8, bei denen je zwei der 12 Undulationspunkte invariant bleiben.

Wir haben jetzt alle Collineationsgruppen der C_4 erhalten, in denen perspectivische G_3 oder G_4 vorkommen können. Doch sollen in den etwa noch übrigen Gruppen Collineationen mit festen Wendepunkten auftreten, was noch nur bei den G_7 zutrifft. Es bleibt also bloss eine Gruppe übrig, diejenige der Curve

(13) $$x_3^3 x_2 + x_2^3 x_1 + x_1^3 x_3 = 0.$$

Von dieser in der neueren Litteratur in ausgiebiger Weise behandelten Curve ist es aber bekannt, dass dieselbe eine *einfache Gruppe von* 168 *Collineationen* in sich zulässt. Unter anderen Untergruppen enthält die G_{168} zwei Systeme von je sieben gleichberechtigten Oktaedergruppen.

4. Aus jeder der erhaltenen 13 Collineationsgruppen lässt sich nun durch die Abbildung der Doppelebene auf eine einfache Ebene eine Gruppe von doppelter Ordnung herleiten. Hier tritt nun jedesmal eine einzige ausgezeichnete Transformation Θ_2 auf. Anderseits existirt aber auch eine ausgezeichnete Untergruppe, welche mit der Collineationsgruppe der C_4 holoedrisch isomorph ist. Dies ist in denjenigen Fällen besonders leicht zu beweisen, wo bei der Collineationsgruppe ein nicht auf der C_4 belegener Punkt fest bleibt; man braucht ja nur die Bedingung aufzuerlegen, dass die dort über einander liegenden Punkte der Doppelebene nicht permutirt werden sollen. Auch in den übrigen drei Fällen der G_{24}, G_{96} und G_{168} lässt sich jene mit der Collineationsgruppe isomorphe Untergruppe nicht schwer herstellen.

Als Endergebniss folgt hier eine Aufzählung der 13 Gruppen M_7. Dabei verweisen wir in jedem Falle auf die in der vorigen Nummer

---

sammt den zugehörigen C_4 sind aus der Theorie der elliptischen Modulfunctionen bekannt. Man sehe etwa Klein-Fricke, „*Modulfunctionen* I", S. 675, 678, 701.

gegebene Gleichung der fundamentalen C_4. Auch wird jedesmal die Zahl M der unabhängigen Moduln dieser Curve angegeben.

a. $M = 6$.

1) G_2. Gl. (1). Die G_2 wird durch Θ_2 erzeugt.

b. $M = 4$.

2) G_4. Gl. (2).

c. $M = 3$.

3) G_8. Gl. (3). Die G_4 und G_8 bestehen aus lauter involutorischen Transformationen.

d. $M = 2$.

4) G_{16}. Gl. (4).
5) G_{12}. Gl. (6). Diese Gruppe ist vom Diedertypus.
6) G_6. Gl. (7). Die Gruppe ist die cyklische von Γ_6''.

e. $M = 1$.

7) G_{48}. Gl. (5) Die Gruppe ist mit der „erweiterten" Oktaedergruppe isomorph.
8) G_{12}. Gl. (8).
9) G_{32}. Gl. (11).

f. $M = 0$.

10) G_{18}. Gl. (9). Diese Gruppe ist die cyklische von B_{18}.
11) G_{96}. Gl. (10).
12) G_{192}. Gl. (12).
13) G_{336}. Gl. (13).

Da Hr. Kantor die zu den Curven (4), (5) und (10) gehörigen Collineationsgruppen unrichtig bestimmt hatte, müssen durch diese Fehler auch diejenigen Gruppen in seiner Aufzählung*), welche den obigen Fällen 4, 7 und 11 entsprechen, nicht mit den gebührenden Eigenschaften erhalten werden. Hr. Kantor giebt auch als vierzehnten Fall die cyklische Gruppe von Γ_6'. Dieselbe tritt aber immer als Untergruppe der G_{12} unseres 5 Falles auf. Mit gleichem Rechte könnten also andere Untergruppen innerhalb der verschiedenen Gruppen mitgenommen werden, was aber die Uebersicht sehr erschweren würde.

§ 6.

Die Gruppen M_8.

1. Auch diesen Fall, dass bei der Gruppe ein invariantes System von C_6 mit 8 Doppelpunkten existirt, können wir durch die Flächen

*) S. 91 der citirten Arbeit.

3. Ordnung F_3 beleuchten. Dabei mögen 6 von jenen Punkten die Fundamentalpunkte bei der Abbildung der bezüglichen F_3 darstellen; die beiden übrigen sind somit die Bilder zweier Punkte derselben Fläche. Durch jene 8 Fundamentalpunkte in der Ebene wird der 9. Basispunkt eines Büschels von C_3 bestimmt. Dem entspricht auf der F_3 der durch die Verbindungsgerade der erwähnten beiden Punkte ausgeschnittene Punkt.

Das System der ∞^3 C_6 mit den 8 festen Doppelpunkten erhält man als Bild eines Systems von C_6, welches auf der F_3 durch diejenigen F_2 bestimmt wird, welche die F_3 in den beiden festen Punkten, O und O_1, berühren; insbesondere schneidet der Ebenenbüschel durch OO_1 aus der F_3 ein System von C_3 aus, welches dem ebenen C_3-Büschel entspricht. Unter den ∞^3 F_2 existirt eine endliche Anzahl, welche die F_3 noch in 3 Punkten berühren. Das Geschlecht der Schnittcurve ist im Allgemeinen 2, reducirt sich aber um eine Einheit durch jede neue Berührung. Dieselbe muss somit in den gedachten Fällen nothwendig zerfallen, und wir erhalten sofort durch Betrachtungen in der Ebene 120 Lösungen. Die C_6 zerfallen nämlich hier auf 8 Weisen in einen Punkt und eine C_6 mit dreifachem Punkte dortselbst; in gleicher Weise zerfallen 28 C_6 in eine Gerade und eine C_5, 56 in einen Kegelschnitt und eine C_4 und 28 in zwei C_3. Die Bilder dieser 120 Paare von Fundamentalcurven auf der F_3 lassen sich leicht bestimmen.

Man erhält nun leicht eine involutorische Transformation Σ_2, welche jede zwei so zusammengehörige Fundamentalcurven vertauscht. In der That, betrachten wir das System der Kegelschnitte, welche in O und O_1 die F_3 berühren, so schneidet jeder aus der F_3 noch zwei Punkte aus. *Durch die Vertauschung letzterer Punkte entsteht die Transformation Σ_2.* Dieselbe definirt in der Ebene eine Cremona-Transformation von der 17. Ordnung, bei welcher 8 Fundamentalpunkte a_i mit 8 Fundamentalcurven a_i' sechster Ordnung vertauscht werden, wobei die Curve a_i' einen dreifachen Punkt in a_i und Doppelpunkte in den 7 anderen Fundamentalpunkten besitzt.

Bei Σ_2 giebt es *einen isolirten festen Punkt*, den durch die Gerade OO_1 auf der F_3 bestimmten Punkt oder den 9. Basispunkt des ebenen C_3-Büschels. Die übrigen festen Punkte erfüllen *eine Curve*, in deren Punkten Kegelschnitte des erwähnten Systems die F_3 berühren. Jeder Querschnitt durch OO_1 schneidet drei Punkte dieser Curve aus, nämlich diejenigen, welche denselben Tangentialpunkt wie der isolirte feste Punkt besitzen. Die entsprechende Curve in der Ebene erhält man als Jacobi'sche Curve irgend einer C_6 des ∞^3-Systems und zweier C_3 des Büschels. Dieselbe ist eine C_9 mit dreifachen Punkten in den 8 Fundamentalpunkten und besitzt folglich das Geschlecht $p = 4$.

Man kann die F_3 in der Weise eindeutig auf eine Doppelebene

abbilden, dass die beiden durch denselben Kegelschnitt des Systems ausgeschnittenen Punkte über einander liegen. Hiermit erhalten wir auch diejenige eindeutige Abbildung einer Doppelebene auf eine einfache Ebene, bei welcher eine nicht-hyperelliptische Uebergangscurve vom Geschlechte $p = 4$ auftritt. Dieselbe wurde zuerst von Hrn. Noether angegeben, die specielle Art der zugehörigen Gebilde mit $p = 4$ ist aber auch von Hrn. Schottky behandelt*). Doch ist es uns unbekannt, ob die hier gegebene Herleitung der Transformation durch Vermittlung einer Fläche 3. Ordnung früher gegeben sei.

2. Durch den folgenden Satz erhellt sich die Beschaffenheit der ebenen C_3-Büschel:

Definirt die Gleichung

$$f_3 + \lambda\varphi_3 = 0 \tag{a}$$

den Büschel und erhält man für die Invarianten 4. *und* 6. *Grades bez.:*

$$S = f_4(\lambda), \quad T = f_6(\lambda), \tag{b}$$

dann kann man dem Büschel das System

$$u^2 = 4z^3 - f_4 z - f_6 \tag{c}$$

eindeutig zuordnen, wobei die Gleichung (c), *falls man in derselben auch* λ *als veränderlich betrachtet, eine auf die Ebene des Büschels eindeutig bezogene Fläche bedeutet***). *Diese Fläche kann man auf die Doppelebene* (z, λ) *projiciren, wobei*

$$4z^3 - f_4(\lambda)z - f_6(\lambda) = 0 \tag{d}$$

als Uebergangscurve erhalten wird. Diese Curve besitzt zwei zusammenfallende dreifache Punkte und ist folglich im Allgemeinen vom Geschlechte $p = 4$. Den besprochenen Zusammenhang wollen wir jetzt näher darlegen.

Wir denken uns den Büschel in das System der Querschnitte einer F_3 übergeführt, welches durch den Ebenenbüschel

$$x_1 = \lambda x_2 \tag{e}$$

ausgeschnitten wird. Dabei seien $x_3 = 0$ und $x_4 = 0$ die Berührungsebenen der F_3 in den Punkten $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, welche wir in der vorigen Nummer mit O und O_1 bezeichneten. Die Gleichung der F_3 kann also auf die Gestalt

$$x_3x_4(x_3 + x_4) + x_3x_4f_1(x_1, x_2) + x_3f_2(x_1, x_2) + x_4\varphi_2(x_1, x_2) + f_3(x_1, x_2) = 0 \tag{f}$$

*) Man sehe Noether, *„Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen"*, Sitzungsber. der physik. medic. Soc. zu Erlangen 1878, sowie *„Ueber eine Classe von auf die einfache Ebene abbildbaren Doppelebenen"* und *„Ueber die rationalen Flächen vierter Ordnung"*, Math. Ann. XXXIII, und Schottky, *„Ueber specielle Abel'sche Functionen vierten Ranges"*, Journal für Mathematik CIII.

**) Man vergleiche hierzu Hrn. Kantor's Erörterungen über die Büschel von C_3, Acta Math. XIX, S. 183.

gebracht werden. Jeder Kegelschnitt, welcher die Fläche in O und O_1 berührt, kann durch (e) und eine Gleichung

(g) $$x_3 x_4 = \mu x_1^2$$

definirt werden, wobei λ und μ veränderliche Parameter bedeuten. Nimmt man dieselben als constant an, so erhält man die zwei Schnittpunkte, welche ein bestimmter Kegelschnitt noch mit der F_3 gemein hat, und zwar durch die Gleichung

(h) $$x_3^2(\mu + f_2) + x_3 x_1(\mu f_1 + f_3) + x_1^2 \mu(\mu + \varphi_2) = 0,$$

wobei in den Functionen f_1, f_2, f_3 und φ_2 x_1 und x_2 durch λ bez. 1 ersetzt werden. Wir setzen hier

$$u = 2\frac{x_3}{x_1}(\mu + f_2) + \mu f_1 + f_3$$

und erhalten hieraus

$$u^2 = (\mu f_1 + f_3)^2 - 4\mu(\mu + f_2)(\mu + \varphi_2).$$

Durch die Substitution

$$z = -\mu - \frac{4f_2 + 4\varphi_2 - f_1^2}{12}$$

ergiebt sich nun die bezweckte Endgleichung

(c) $$u^2 = 4z^3 - f_4 z - f_6,$$

wobei

(k)
$$f_4 = 2f_1 f_3 - 4f_2\varphi_2 + \frac{(4f_2 + 4\varphi_2 - f_1^2)^2}{12},$$
$$f_6 = -f_3^2 + \frac{(f_1 f_3 - 2f_2\varphi_2)(4f_2 + 4\varphi_2 - f_1^2)}{6} + \frac{(4f_2 + 4\varphi_2 - f_1^2)^3}{216}.$$

Setzt man hier $u = 0$, so erhält man jene Uebergangscurve

(d) $$4z^3 - f_4(\lambda) z - f_6(\lambda) = 0,$$

welche auch das Bild der Schnittcurve der Fläche (f) mit der Fläche

(l) $$2x_3[x_3 x_4 + f_2(x_1, x_2)] + x_3 x_4 f_1(x_1, x_2) + f_3(x_1, x_2) = 0$$

definirt. Für $z = 0$ ergiebt sich eine andere Curve mit ausgezeichneten Eigenschaften:

(m) $$u^2 + f_6(\lambda) = 0.$$

Dieselbe ist hyperelliptisch vom Geschlechte $p = 2$ und kann auch als Bild der Schnittcurve der Fläche (f) mit der Fläche

(n) $$12x_3 x_4 + 4f_2(x_1, x_2) + 4\varphi_2(x_1, x_2) - \{f_1(x_1, x_2)\}^2 = 0$$

erhalten werden.

3. Jedes Paar durch die Transformation Σ_2 einander zugeordneter Punkte in der einfachen Ebene besitzt ersichtlich die Eigenschaft, dass eine C_6 des invarianten Systems mit δ in den 8 Fundamentalpunkten immer gleichzeitig durch beide Punkte geht. Insbesondere berühren die C_6 einander in den Punkten der mehrfach erwähnten Uebergangs-

curve. Letztere Curve muss also gegenüber dem System der C_6 und somit auch der Gruppe M_8 von invarianter Natur sein. Sollen also in dieser Gruppe weitere Transformationen enthalten sein, so muss die Curve bei denselben eindeutig in sich übergeführt werden. Die Ebene haben wir schon auf die Fläche

(c) $$u^2 = 4z^3 - f_4(x)z - f_6(x)$$

ein-eindeutig abgebildet, wo wir hier x statt λ setzen. Durch Σ_2 gehen zwei Punkte mit denselben z und x aber entgegengesetzten u in einander über. Haben wir also diejenige Gruppe von birationalen Transformationen der (zx)-Ebene erhalten, bei welcher die Curve

(d) $$4z^3 - f_4(x)z - f_6(x) = 0$$

invariant bleibt, so ergiebt sich sehr leicht für die Fläche (c) eine Gruppe von doppelter Ordnung, welche man auf die ursprüngliche einfache Ebene als die gesuchte Gruppe M_8 übertragen kann.

Die (zx)-Ebene kann man als die Projection eines *quadratischen Kegels* K_2 von einem Punkte desselben betrachten. Schreiben wir die Gleichung (d) in homogener Form

(d_1) $$4z^3y^3 - f_4(x, y)zy - f_6(x, y) = 0,$$

und lassen wir die Gerade $y = 0$ dem Projectionscentrum auf dem Kegel und den Punkt $x = y = 0$ der Erzeugenden durch das Centrum entsprechen, so gewinnen wir den erheblichen Vortheil, dass die adjungirten Curven von (d_1) in die ebenen Querschnitte des Kegels übergehen. Die birationalen Transformationen, welche die Bildcurve von (d_1) auf dem K_2 in sich überführen, müssen also eine räumliche *Collineationsgruppe* bilden, bei welcher sowohl ein Punkt, die Kegelspitze, als auch die Ebene, welche der Geraden $z = 0$ entspricht, fest bleiben *).

Bei dieser Abbildung der ursprünglichen einfachen Ebene auf den doppelten Kegel entsprechen somit die Erzeugenden des Kegels den C_3 des Büschels und die Querschnitte den C_6 des fundamentalen Systems. Man kann auf dem Kegel viele Systeme von Curven nachweisen, deren Existenz in der Ebene nicht so leicht zu erschliessen ist. Um nur ein Beispiel zu geben, bemerken wir, dass man auf dem Kegel ein System von C_3 construiren kann, welche mit der Curve (d_1) an einer beliebigen Stelle vier auf einander folgende Punkte gemein hat. Dem entspricht ersichtlich in der Ebene ein Büschel von C_9 mit dreifachen Punkten in den 8 Fundamentalpunkten und einem Berührungsknoten auf der Uebergangscurve. Hier tritt nun die Eigenthümlichkeit ein,

*) Hr. Kantor hat zwar erwähnt, dass bei jeder Gruppe M_8 eine C_6 des fundamentalen Systems fest bleiben muss; doch scheint er die durch diese C_6 bewirkte Vereinfachung nicht bemerkt zu haben, dass in der Gleichung (d_1) das Glied $z^2y^2f_2(x, y)$ beseitigt werden kann.

dass der zu diesem Büschel adjungirte Büschel von C_6 Doppelpunkte nicht nur in den dreifachen Punkten, sondern auch in dem *Berührungsknoten* besitzt.

Stellen wir die Gleichung

(c) $$u^2 = 4z^3 - f_4(x)z - f_6(x)$$

mit der Differentialgleichung

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

zusammen, und ziehen wir die bekannte Theorie dieser $\wp$-Function heran, so können wir auf dem Kegel eine Reihe Oerter bestimmen, welche auf der durch die jedesmalige Erzeugende dargestellten elliptischen Curve um gewisse Perioden-n-teln von der Kegelspitze entlegen sind. Insbesondere bezeichnet $\wp' = 0$ oder die Curve (d) der um halbe Perioden entfernte Ort*).

Betreffend die Berührungscurven von (d_1) wollen wir auf die citirte Abhandlung von Nrn. Noether verweisen. Hier sei nur an die 120 einzelnen Berührungscurven φ erinnert, welche die fundamentalen Octupel bei der Abbildung liefern.

4. Wir sollen also behufs der Bestimmung der Gruppen M_8 diejenigen Collineationsgruppen aufsuchen, welche die Normalcurve auf dem Kegel in sich überführen können. Die bei einer einzelnen räumlichen Collineation festen Erzeugenden des Kegels kann man für $x = 0$ und $y = 0$ wählen. Die 4 festen Punkte bei der Collineation sind die Kegelspitze und 3 Punkte in der vorerwähnten festen Ebene, von denen 2 auf jenen festen Erzeugenden liegen, und der dritte der Pol ihrer Verbindungsgerade in Bezug auf den Querschnitt des Kegels ist. Doch giebt es Fälle, dass auch alle Punkte einer Verbindungslinie zweier von diesen Punkten oder einer Ebene durch drei von ihnen fest bleiben. Da wir als Centrum bei der Projection des Kegels auf eine Ebene einen von diesen festen Punkten gewählt haben, so ist auch die entsprechende Transformation in der Ebene eine Collineation und zwar von der Form

(α) $$x' : y' : z' = \alpha x : \beta y : \gamma z.$$

Wir betrachten jetzt die invariante Curve

(d_1) $$4z^3y^3 - f_4(x, y)zy - f_6(x, y) = 0$$

und nehmen an, dass durch diese Substitution $f_6(x', y')$ in $k \cdot f_6(x, y)$ und $f_4(x', y')$ in $l \cdot f_4(x, y)$ übergehen. Die einzelnen Glieder von (d_1) sollen aber durch dieselbe Zahl k vervielfältigt werden. Daraus erhält man die Bedingungen:

(β) $$\beta^3\gamma^3 = \beta\gamma l = k; \quad \gamma = \frac{k}{\beta l}; \quad k^2 = l^3.$$

*) Man vergleiche eine Abhandlung von G. H. Halphen, „*Recherches sur les courbes planes du troisième degré*", Math. Ann. XV.

Wählt man als Projectionscentrum den festen Punkt auf der Erzeugenden $x = 0$, so erhält man als Gleichung der invarianten Curve

$$(d_1') \qquad 4z^3x^3 - f_4(x, y)zx - f_6(x, y) = 0,$$

und die Collineation wird in die folgende übergeführt:

$$(\alpha') \qquad x' : y' : z' = \alpha x : \beta y : \gamma_1 z; \quad \gamma_1 = \frac{k}{\alpha l} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \gamma.$$

Hat man in (α) $\alpha = \beta$, so geht jede Erzeugende in sich über; man erhält $k = \alpha^6$, $l = \alpha^4$ und $\gamma = \alpha$. Die Collineation ist somit eine identische. Doch treten andere Verhältnisse ein, falls f_4 identisch verschwindet, was jedoch zunächst ausgeschlossen sei.

Ist $\beta = \gamma$, so geht jeder Punkt der Erzeugenden $x = 0$ in sich über. Dasselbe gilt für die Erzeugende $y = 0$, falls $\alpha = \gamma_1$. Gelten beide Relationen gleichzeitig, so erhält man $\alpha^2 = \beta^2$ oder $\alpha = -\beta$. Die räumliche Collineation ist dann eine harmonische Perspectivität, deren Perspectivitätsebene die festen Erzeugenden enthält.

Nimmt man $\alpha = \gamma$, so ist auch $\beta = \gamma_1$. Eine Gerade mit lauter festen Punkten bei der räumlichen Collineation ist hier die Polgerade der Ebene durch die festen Erzeugenden. Ist $\alpha = -\beta$ oder $\gamma = -\gamma_1$, so besitzt eine Gerade in der letzteren Ebene dieselbe Eigenschaft.

Die Collineationsgruppe der Normalcurve erhält man also aus der gemeinschaftlichen Gruppe von $f_4(x, y)$ und $f_6(x, y)$, welche der Bedingung (β) $k^2 = l^3$ genügt; doch, falls f_4 identisch verschwindet, entsteht dieselbe durch Combination der Gruppe von f_6 mit einer G_3, welche die 3 Punkte der Curve auf derselben Erzeugenden cyklisch vertauschen. Die Curve wird von den 12 Erzeugenden, $27f_6^2 - f_4^3 = 0$, berührt. Wenn 2 von diesen Geraden zusammenfallen, besitzt die Curve einen Doppelpunkt oder auch, falls nämlich f_6 und f_4 einen gemeinschaftlichen Factor besitzen, eine stationäre Tangente. Wenn aber Doppelpunkte vorkommen, und somit das Geschlecht reducirt wird, lässt sich die Gruppe M_8 auf eine der früheren Typen zurückführen.

5. Die sämmtlichen *cyklischen Gruppen*, welche die Normalcurve vom Geschlechte $p = 4$ in sich überführen können, hat Hr. Kantor gegeben *). Betreffend die *vollständigen Collineationsgruppen* weichen aber seine Resultate von denjenigen ab, welche ich in einem früheren Aufsatze gegeben habe **), weshalb ich dieselben hier reproducire.

1) *Die Identität.*

2) *Perspectivische* G_2: $x' : y' : z' = -x : y : z$.

$$4z^3y^3 + zy(ax^4 + bx^2y^2 + cy^4) + dx^6 + ex^4y^2 + fx^2y^4 + gy^6 = 0.$$

*) „*Theorie der endlichen Gruppen*", S. 100. Wir bemerken nur, dass die dort gegebenen Gruppen 9 und 10 identisch sind.

**) „*Ueber die algebraischen Curven von den Geschlechtern $p = 4$, 5 und 6, welche eindeutige Transformationen in sich besitzen*", S. 25, Anhang d. Abh. d. Königl. Schw. Acad. d. Wissenschaften, Bd. 21, Abth. I, Nr. 3.

3) G_2 „*mit Axen*“: $x' : y' : z' = x : -y : z$.

$$4z^3y^2 + z(ax^4 + bx^2y^2 + cy^4) + x(dx^4 + ex^2y^2 + fy^4) = 0.$$

Hier wird die Ordnung der Bildcurve reducirt, weil das Projectionscentrum ein Punkt der Curve ist. Die Axen sind die Verbindungsgeraden zweier Punkte der Curve in der invarianten Ebene und deren Polgerade.

4) *Vierergruppe*, welche *zwei perspectivische* G_2 und *eine* G_2 *mit Axen* enthält. Die vorige Gleichung muss hier in der Weise specialisirt sein, dass in derselben x und y vertauscht werden können, ohne dass f_4 und f_6 sich verändern.

$$4z^3y^2 + z[a(x^4 + y^4) + bx^2y^2] + x[c(x^4 + y^4) + dx^2y^2] = 0.$$

5) *Vierergruppe*, welche aus *lauter* G_2 *mit Axen* besteht. Da bei jeder Substitution 2 Punkte von $f_6 = 0$ fest bleiben, muss f_6 die Jacobi'sche Covariante von f_4 sein.

$$4z^3y^2 + z[a(x^4 + y^4) + bx^2y^2] + x(x^4 - y^4) = 0.$$

6) *Diedrische* G_8, welche je eine Vierergruppe der beiden vorhergehenden Arten enthält.

$$4z^3y^2 + azx^2y^2 + x(x^4 + y^4) = 0.$$

Die ausgezeichnete *cyklische* G_4 geht aus der Wiederholung der Operation, $x' : y' : z' = x : iy : -z$, hervor.

7) *Cyklische* $G_4 : x' : y' : z' = ix : y : z$, welche eine perspectivische G_2 als Untergruppe enthält.

$$4z^3y^2 + z(x^4 + ay^4) + y(bx^4 + cy^4) = 0.$$

Jeder Punkt der Erzeugenden $x = 0$ bleibt bei dieser G_4 fest. Zudem rückt in das Projectionscentrum auf $y = 0$ ein Punkt der Curve hinein, was die Erniedrigung der Ordnung der Bildcurve bewirkt.

8) *Diedrische* G_6, welche aus 3 perspectivischen G_2 und einer $G_3 : x' : y' : z' = x : jy : z$, besteht.

$$4z^3y^3 + azy^3x^2 + x^6 + bx^3y^3 + y^6 = 0.$$

Bei der G_6 bleibt jeder Punkt der gemeinschaftlichen Schnittgeraden der 3 Perspectivitätsebenen fest. Die G_2 werden durch die Vertauschung von x und y erhalten.

9) *Diedrische* G_{12}, welche die vorige Gruppe als Untergruppe enthält. Von den 4 hinzutretenden involutorischen Transformationen ist die ausgezeichnete perspectivisch, und die 3 anderen sind G_2 mit Axen. Die erzeugende Substitution der ausgezeichneten *cyklischen* G_6 ist: $x' : y' : z' = -x : jy : z$.

$$4z^3y^3 + azy^3x^2 + x^6 + y^6 = 0.$$

10) *Cyklische* G_3: $x' : y' : z' = jx : y : z$.

$$4z^3y^3 + zy^2(ax^3 + by^3) + x^6 + cx^3y^3 + dy^6 = 0.$$

Die Punkte der Erzeugenden $x = 0$ bleiben hier fest. Wenn aber f_6 die Jacobi'sche Covariante der äquianharmonischen Form f_4 liefert, so besteht die Gruppe aus 4 solchen G_3 und einer Vierergruppe von der Art (5), welche zusammen eine

11) *Tetraedergruppe* bilden.

$$4z^3y^3 + axy^2(x^3 + y^3) + x^6 + 20x^3y^3 - 8y^6 = 0.$$

12) *Cyklische* G_6: $x' : y' : z' = -jx : y : z$, welche die letzterwähnte G_3 und die perspectivische G_2 als Untergruppen enthält.

$$4z^3y^3 + axy^5 + x^6 + by^6 = 0.$$

Auch bei dieser G_6 bleiben alle Punkte der Erzeugenden $x = 0$ fest.

13) *Cyklische* G_{12}: $x' : y' : z' = jx : iy : -iz$, welche die vorerwähnte G_6 als Untergruppe enthält.

$$4z^3y^3 + xy^5 + x^6 = 0.$$

14) $G_5 : x' : y' : z' = \varepsilon x : y : z.$

$$z^3y^2 + axy^4 + x^5 + by^5 = 0.$$

Die Punkte der Erzeugenden $x = 0$ bleiben auch hier fest. Wenn $b = 0$, ist die G_5 Untergruppe einer

15) cyklischen $G_{10} : x' : y' : z' = \varepsilon x : -y : z.$

$$4z^3y^2 + xy^4 + x^5 = 0.$$

Hier hat man als Untergruppe eine G_2 mit Axen.

In den noch übrigen Fällen *verschwindet* f_4 *identisch*. Damit die Normalcurve keine Doppelpunkte besitze, darf f_6 nunmehr keine doppelten Factoren besitzen. Die linearen Gruppen, welche die binäre Form f_6 in sich überführen können, sind von Hrn. Bolza bestimmt*). Dieselben sind: G_2, G_5, *Vierergruppe*, *diedrische* G_6, *diedrische* G_{12} *und Oktaedergruppe*. Wir erhalten nun 7 neue Collineationsgruppen.

16) *Perspectivische* $G_3 : x' : y' : z' = x : y : jz$, für welche die Kegelspitze das Perspectivitätscentrum liefert:

$$4z^3y^3 = f_6(x, y).$$

In den folgenden Fällen erhält man die Collineationsgruppen durch Combination dieser G_3 mit den erwähnten binären Gruppen.

17) *Cyklische* $G_6 : x' : y' : z' = -x : y : jz$, deren Untergruppen G_2 und G_3 perspectivisch sind:

$$4z^3y^3 = x^6 + ax^4y^2 + bx^2y^4 + y^6.$$

18) *Cyklische* $G_{15} : x' : y' : z' = \varepsilon x : y : jz$. Von den Untergruppen G_3 und G_5 ist jene perspectivisch und diese die schon behandelte Gruppe (14).

$$4z^3y^2 = x^5 + y^5.$$

---

*) Math. Ann. XXX.

19) G_{12}, welche drei cyklische G_6 enthält.

$$4z^3y^2 = x(x^4 + ax^2y^2 + y^4).$$

Eine *cyklische* $G_6 : x' : y' : z' = x : -y : jz$, hat als Untergruppen die perspectivische G_3 und eine G_2 mit Axen; die beiden anderen sind von der Art (17).

20) G_{18}, welche unter anderen Untergruppen 3 cyklische G_6 von der Art (17) enthält.

$$4z^3y^3 = x^6 + ax^3y^3 + y^6.$$

21) G_{36}, in welcher 4 G_{12} auftreten, von denen die eine ausgezeichnet ist. Letztere ist von der Art (9), die 3 übrigen von der Art (19).

$$4z^3y^3 = x^6 + y^6.$$

22) G_{72}. Hier treten 3 *cyklische* G_{12} auf, deren Untergruppen G_6 wir schon im Falle (19) begegneten.

$$4z^3y^2 = x(x^4 + y^4).$$

Die eine cyklische G_{12} wird durch die Substitution,

$$x' : y' : z' = x : iy : -jz,$$

erzeugt.

6. Es ist nun ein Leichtes aus den Gruppen der Curven

$$4z^3 - f_4(x)\,z - f_6(x) = 0$$

die entsprechenden Gruppen von doppelter Ordnung der Flächen

(c) $$u^2 = 4z^3 - f_4(x)z - f_6(x)$$

herzuleiten, welche man sodann durch Abbildung auf die Ebene übertragen kann. Doch wollen wir zuerst nach Hrn. Kantor die von diesem Verfasser in seiner Preisschrift behandelten isolirten typischen Transformationen angeben, welche durch die cyklischen Gruppen geliefert werden. Eine cyklische Gruppe bezeichnen wir hier mit der Nummer derjenigen Collineationsgruppe, wo wir die Erzeugung derselben gegeben haben.

Von diesen Typen traten einige schon bei den Gruppen M_6 und M_7 auf, nämlich: Δ_3, E_4, B_6, Γ_6, B_{12} und B_{12}'. Δ_3 erhält man aus der $G_3(10)$, E_4 aus (7), B_6 aus (12), B_{12} und B_{12}' aus (13) und Γ_6 aus (9)*). Durch Combination mit Σ_2 entstehen aus Δ_3 und B_6 die bezüglichen Typen E_6'' und H_6'. Die Gruppe (17) liefert den Typus H_6. Γ_6 und H_6, mit Σ_2 zusammengesetzt, geben abermals mit Γ_6 und H_6 äquivalente Transformationen. Die cyklischen Gruppen von ungerader Periode liefern durch Combination mit Σ_2 cyklische Gruppen von doppelter Ordnung, aber, wenn Σ_2 keine Untergruppe ist, Gruppen von derselben Ordnung. So erhält man aus den Gruppen (14), (16) und (18) sowohl die Typen Z_5, N_3 und B_{15} als auch die Typen Γ_{10}, E_6

*) Hr. Kantor hat (l. c.) H_6 statt Γ_6, was aber gewiss unrichtig ist.

und B_{30}. Die einzige noch übrige Collineation von ungerader Periode, diejenige der Gruppe (8), liefert den Typus E_6'; die Untergruppe von der Ordnung 3 ist aber hier mit einer Collineation äquivalent. Die noch nicht besprochenen cyklischen Gruppen von gerader Ordnung besitzen sämmtlich die G_2 mit Axen als Untergruppe; bei dieser gilt die Eigenthümlichkeit, dass die beiden entsprechenden Transformationen von der Periode 4 (nicht 2) sind, was man leicht durch Betrachtung der Fläche (c) oder der invarianten Curve $u^2 + f_6(x) = 0$ bestätigen kann. Die fraglichen Collineationen, welche den Gruppen (3), (6), (15), (19) und (22) angehören, sind bez. von den Perioden 2, 4, 10, 6 und 12 und liefern Typen von doppelter Periode, nämlich: J_4, Δ_8, B_{20}, Γ_{12} und B_{24}, welche sämmtlich Σ_2 als Untergruppe enthalten. Bei N_3 bleibt jeder Punkt der Curve $u^2 + f_6(x) = 0$ vom Geschlechte $p = 2$ fest; bei jeder der Transformationen Δ_3, E_4, H_6' und Z_5 existirt eine elliptische Doppelpunktscurve, welche der bei der bezüglichen Collineation in jedem Punkte festen Erzeugenden des Kegels entspricht.

Wir geben jetzt als Endresultat eine Aufzählung der Transformationsgruppen M_8 und wollen dabei diejenigen Punkte hervorheben, wo unsere Ergebnisse mit denjenigen des Hrn. Kantor*) nicht übereinstimmen. Die Gruppen seien nach der Zahl M der unabhängigen Moduln angeordnet: doch geben wir jeder Gruppe die Nummer, welche schon der Collineationsgruppe der zugehörigen Normalcurve zugetheilt ist.

a. $M = 8$.

1) *Die involutorische Transformation* Σ_2.

b. $M = 5$.

2) G_4 *vom Typus der Vierergruppe.*

c. $M = 4$.

3) *Die cyklische Gruppe von* J_4.

d. $M = 3$.

4) G_8 *vom Diedertypus. Die cyklische Untergruppe ist diejenige von* J_4.

10) *Die cyklische Gruppe von* E_6''. Hr. Kantor hat hier (Fall VIII) „die cyklische Gruppe von E_6'' in der allgemeinsten Form nebst 6 Involutionen“ also die Ordnung 12. Dafür wäre erforderlich, dass die Curve (10) eine diedrische G_6 in sich besässe, was aber schon aus dem Grunde nicht möglich ist, weil eine binäre Form f_4 mit keinen

*) Hr. Kantor giebt keine eigentliche Aufzählung der Collineationsgruppen der Normalcurve; betreffend diejenige der Gruppen mit 8 Punkten sehe man S. 102 der citirten Arbeit.

doppelten Factoren nur die Vierergruppe, diedrische G_8 oder Tetraedergruppe zulassen kann *).

16) *Die cyklische Gruppe von* E_6.

e. $M = 2$.

5) G_8, *welche* 3 *Gruppen vom Typus* J_4 *enthält.* Dieser Fall fehlt bei Hrn. Kantor.

7) G_8, *welche die Gruppe von* E_4 *enthält.*

8) G_{12} *vom Diedertypus. Die cyklische Untergruppe* G_6 *ist diejenige von* E_6'.

17) G_{12}, *welche die Gruppen von* E_6 *und* H_6 *enthält,* Hr. Kantor hat hier (Fall XVI) die Ordnung 36.

f. $M = 1$.

6) G_{16}, *welche die Gruppe von* Δ_8 *enthält.* Hr. Kantor hat hier (Fall XIII) die Ordnung 24.

9) G_{24}, *welche sowohl die* G_{12} (8) *als die* G_8 (4) *als Untergruppen enthält.* Dieser Fall fehlt bei Hrn. Kantor.

11) G_{24}, *welche mit der homogenen binären Tetraedergruppe isomorph ist.* Auch dieser Fall fehlt bei Hrn. Kantor.

12) G_{12}, *welche die Gruppen von* B_6 *und* H_6' *enthält.*

14) *Die cyklische Gruppe von* Γ_{10}.

19) G_{24}, *welche sowohl die Gruppe von* Γ_{12} *als auch die Gruppen* (4) *und* (17) *als Untergruppen enthält.* Dieser Fall wird von Hrn. Kantor zwei Male aufgezählt: einmal (Fall XII) als „die cyklische Gruppe von Γ_{12} in der allgemeinsten Form" mit der Ordnung 12, und dann (Fall XX) als die Gruppe IV (unsere Gruppe (4)) mit E_6'' mit der Ordnung 24.

20) G_{36}, *welche* 3 *Untergruppen* (17) *enthält.* Hr. Kantor hat hier (Fall XVII) die Ordnung 48.

g. $M = 0$.

13) G_{24}, *welche sowohl die Gruppe* (12) *als die Gruppen von* B_{12} *und* B_{12}' *enthält.*

15) *Die cyklische Gruppe von* B_{20}.

18) *Die cyklische Gruppe von* B_{30}.

21) G_{72}, *unter deren Untergruppen die Gruppen* (9), (19) *und* (20) *auftreten.* Hr. Kantor hat hier (Fall XV) die Ordnung 54.

22) G_{144}, *unter deren Untergruppen sowohl* 3 *cyklische Gruppen vom Typus* B_{24} *als auch die Gruppen* (11), (19) *und* (20) *auftreten.*

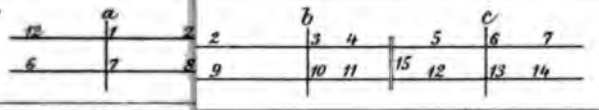
*) Es soll hier bemerkt werden, dass Hr. Kantor bisweilen die Typen von E_6' und E_6'' (durch Druckfehler?) verwechselt. Doch giebt er für die zu jeder in ihrer allgemeinsten Form gehörige Gruppe die Ordnung 12.

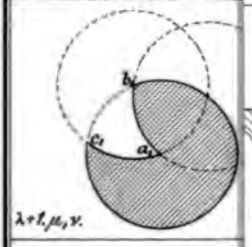
Hr. Kantor hat also die 3 Gruppen (5), (9) und (11) ganz
sehen und die 5 Gruppen (6), (10), (17), (20) und (21) mit unric
Ordnungen gegeben. Zudem betrachtet er die cyklische Unter
Γ_{12} von (19) als eine vollständige Gruppe, obgleich dieselbe, wi
andere Gruppen, stets als Untergruppe höherer endlichen G
vorkommt.

Wir schliessen hiermit die gegenwärtige Darstellung. Uns
war nicht die analytische Darstellung der Gruppen in der Eb
liefern. Wir wünschten in der That nur die Bestimmung de
in einfacher Weise zu geben und dabei die Fehler zu bese
welche Hr. Kantor auf Grund seiner mehr complicirten Me
begangen hat. Hierbei war es natürlich nicht unser Zweck den g
Verdiensten, welche sich Hr. Kantor um den vorliegenden
stand erworben hat, Abbruch zu thun.

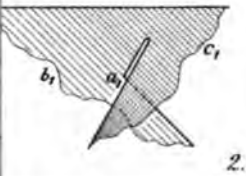
Lund, April 1896.

I.

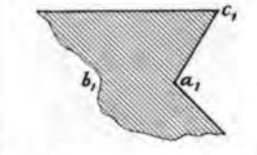




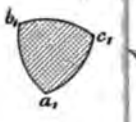
$\lambda+1, \mu, \nu.$



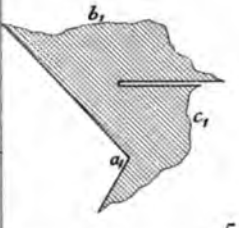
2.



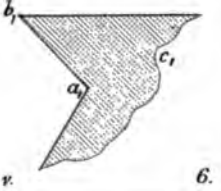
$\lambda, \mu, 1-\nu.$ 3.



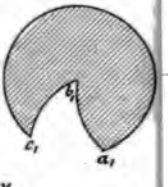
$\lambda, \mu, 1-\nu.$



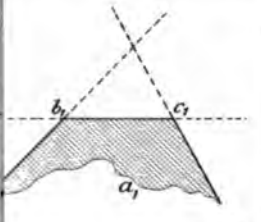
5.



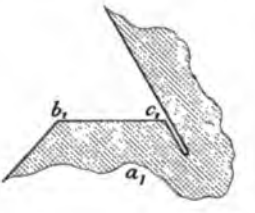
$\lambda, 1-\mu, \nu.$ 6.



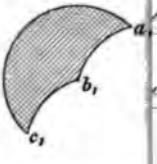
$\lambda, \mu+1, \nu.$



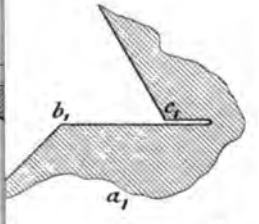
$\nu.$ 8.



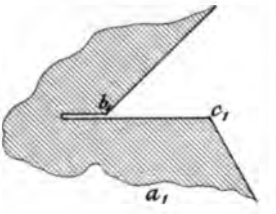
9.



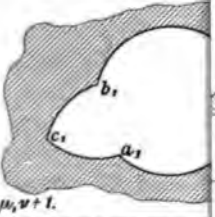
$1-\lambda, \mu, \nu.$



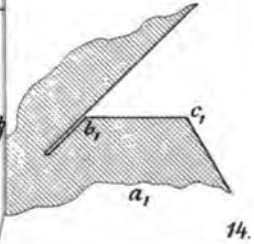
11.



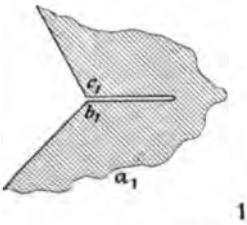
12.



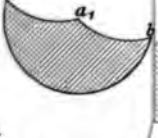
$\lambda, \mu, \nu+1.$



14.



15.



$\lambda, 1-\mu, \nu.$

Lith. v. Eschebach & Schaefer, Leipzig

quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques.

Par

MM. G. Castelnuovo à Rome et F. Enriques à Bologne.

La *Géométrie sur une surface algébrique générale*, dont l'origine onte à une remarque de Clebsch*) et à un Mémoire fondamental 1. Nöther**), s'est enrichie, dans ces derniers temps, de nouveaux ltats, grâce aux recherches des géomètres français et italiens. Ces erches ont un même point de départ dans le Mémoire cité de Nöther, mais elles suivent deux directions différentes que nous is exposer brièvement.

En France on a considéré surtout les fonctions transcendantes sont attachées à l'équation d'une surface algébrique. M. Nöther t déjà introduit dans l'étude des surfaces certaines intégrales doubles ifférentielles algébriques) qui restent partout finies, et qui jouent ême rôle que les intégrales abéliennes de première espèce relatives courbes algébriques. Quelques ans plus tard M. Picard***) a né une nouvelle impulsion à cette théorie, en considérant, à côté intégrales doubles, certaines intégrales simples de différentielles les qui sont aussi dignes de remarque. Il a étudié en particulier intégrales simples qui restent partout finies. Les surfaces les plus ues ne possèdent pas vraiment de telles intégrales; mais M. Picard idiqué des classes de surfaces, dont les propriétés remarquables dédent précisément de la présence de fonctions transcendantes de pèce nommée. M. Poincaré avec une courte Note†), et M. Humbert

*) Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc. 1868.

**) *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens*... I, II, Math. Annalen Bd. 2, 8, 9, 1874.

***) Voir les deux Mémoires *Sur les intégrales de différentielles totales algéues*..., Journal de Mathém. 4e se, t. I, 1885; le *Mémoire sur la théorie des tions algébriques*, J. d. M. 4e se, t. V; ainsi que plusieurs Notes dans les pptes Rendus de l'Ac. d. Sc., Déc. 1884.

†) Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc., Déc. 1884.

surtout avec plusieurs Mémoires importants*), ont suivi la même direction, soit en approfondissant la théorie générale, soit en étudiant des classes particulières de surfaces**). Mais le champ de recherches que M. Picard a ouvert est loin d'être épuisé; car la question même de décider, en partant des caractères géométriques d'une surface, si la surface possède de telles intégrales simples, n'est pas encore résolue, d'une manière générale.

Les géomètres italiens, au contraire, se sont consacrés à l'étude des systèmes linéaires de courbes algébriques qui appartiennent à une surface algébrique, ou, en d'autres termes, à l'étude des fonctions rationnelles de trois quantités $x\,y\,z$ liées par une rélation algébrique $f(x, y, z) = 0$. C'était un ordre de recherches qui se présentait tout naturellement à leur attention; car en Italie, pendant les dernières années, on avait cultivé les deux théories auxiliaires qui servent de base aux développements nouveaux; à savoir *la géométrie sur une courbe algébrique*, et *la théorie des systèmes linéaires de courbes planes*.

La géométrie sur une courbe, qui a pris naissance dans les travaux immortels de Riemann (1857), a été développée plus tard sous la forme géomètrique dans le Mémoire classique de MM. Brill et Nöther***). Il restait pourtant encore à délivrer cette théorie des considérations projectives qu'on y faisait intervenir trop souvent; c'est ce qu'on a fait en Italie (Segre, Castelnuovo ...) en raisonnant sur les courbes, sans faire attention ni à leurs ordres, ni aux espaces auxquels elles appartiennent, et en limitant l'usage des courbes adjointes, dont la considération peut être utile parfois, mais n'est point nécessaire pour le développement de cette théorie.

La théorie des systèmes linéaires de courbes planes, au point de vue des transformations birationnelles du plan, a commencé par les recherches bien connues de M. Cremona (1863—1865) et de M. Nöther (1870), et a été développée par les géomètres italiens Caporali, Bertini, Jung, Guccia, Martinetti, Castelnuovo ... On a pu aborder par cette voie l'étude des propriétés du plan qui restent invariables par rapport aux transformations birationnelles; c'est donc la théorie d'une *classe* particulière de surfaces (à savoir des surfaces *rationnelles*), qui a pris naissance par ces recherches.

Mais on s'aperçut bientôt que la plupart des méthodes qu'on y

---

*) *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques*, Journal de Mathématiques, 4e se, t. IX; *Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques*, Journ. d. Math. 4e se, t. X; ainsi que plusieurs Notes dans les Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc., 1893—95.

**) Consulter aussi sur ce sujet le Mémoire de M. Nöther, *Ueber die totalen algebraischen Differentialausdrücke*, Math. Annalen, 29, 1886.

***) *Ueber die algebraischen Functionen* ..., Math. Annalen, Bd. VII, 1873.

avait employées, pouvaient avoir une application plus étendue, car elles servaient aussi à l'étude de questions analogues sur les surfaces algébriques générales. On parvint ainsi à distinguer deux sortes de propriétés des systèmes linéaires de courbes situées sur une surface. Il y a en effet des propriétés qui ne dépendent pas de la surface, mais bien de la nature du système qu'on y envisage; tandis qu'il y a d'autres propriétés qui appartiennent à tous les systèmes linéaires de courbes situés sur la même surface, et dépendent seulement de la nature de celle-ci. Ce sont ces dernières propriétés qui offrent le plus grand intérêt, car elles fournissent des caractères d'une surface, qui se transportent à toutes les surfaces en correspondance birationnelle avec celle-là, des caractères *invariants* (par rapport aux transformations nommées). C'est à l'aide de telles remarques que l'on retrouva sous une nouvelle lumière les invariants introduits par M. Nöther, et qu'on parvint à en ajouter d'autres encore.

Ainsi se forma un ensemble de recherches qui sont étroitement liées entre elles, bien qu'elles se trouvent à présent éparses dans plusieurs travaux publiés tout dernièrement en Italie*).

Réunir ces résultats, les présenter dans l'ordre logique (qui n'est pas toujours l'ordre chronologique), les rapprocher à des propriétés connues des courbes et du plan, pour en faire ressortir tantôt les analogies, tantôt les différences; voilà le but que nous nous sommes proposé en écrivant cette Monographie. Il ne faut donc y chercher des résultats nouveaux, mais bien une exposition nouvelle de résultats déjà publiés. Ce travail pourtant ne paraîtra pas superflu à nos lecteurs, à ce que nous pensons. C'est que les Mémoires originaux que nous résumons ici, ne sont pas d'une lecture facile. Cela dépend de plusieurs causes. Tout d'abord il y a les difficultés qui proviennent de la théorie elle-même; la plupart des propriétés des surfaces sont bien loin de présenter les caractères de simplicité, qu'on trouve en de propositions analogues relatives aux courbes. Mais le rapprochement avec celles-ci est très utile pour mettre en lumière l'esprit des résultats

*) Voici en ordre chronologique les travaux principaux dont nous exposons ici les résultats, pour ce qui concerne la théorie générale des surfaces algébriques; (pour la théorie des surfaces rationnelles nous donnerons ailleurs les citations relatives):

Enriques, *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*, Mem. dell' Acc. d. Scienze di Torino s° 2ª, t. 44, 1893.

Enriques, *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche*, Mem. della Società Italiana d. Scienze s° III, t. X, 1896.

Castelnuovo, *Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, ibid., 1896.

Castelnuovo, *Sulle superficie di genere zero*, ibid., 1896.

Enriques, *Sui piani doppi di genere uno*, ibid., 1896.

nouveaux. Nous recourons sans cesse à ce moyen, et même pour le rendre plus aisé, nous avons exposé d'avance les propositions fondamentales de la géométrie sur une courbe, dans l'ordre qui nous semblait préférable.

Ainsi nous obtenons l'avantage d'exposer à nos lecteurs toutes les notions nécessaires pour aborder l'étude des surfaces. La lecture de cette Monographie n'exigera donc, nous le pensons, que la connaissance de ces notions générales de géomètrie, qui sont familières même à ceux qui se sont consacrés à tout autre ordre de recherches.

Mais pour atteindre ce but, nous nous sommes bornés à présenter seulement les énoncés des théorèmes, et les considérations qui servent le mieux à les mettre en lumière; quant aux démonstrations, nous avons pensé qu'il valait mieux les supprimer tout à fait, en renvoyant aux ouvrages originaux le lecteur désireux de les connaître. C'est qu'on ne réussit pas, pour le moment, à exposer ces démonstrations de manière à éviter toute difficulté. La conception qui inspire ces raisonnements peut bien être simple, dans la plupart des cas; mais le développement exige qu'on envisage tant de cas particuliers, qu'on rebute tant d'objections, que le lecteur fatigué par ce morcellement de la démonstration, perd de vue l'ensemble des résultats. C'est un défaut qu'on peut reprocher d'ordinaire aux théories en formation; et bien souvent le progrès consiste dans l'introduction de certaines conceptions plus amples, de certaines locutions plus convenables, qui permettent d'embrasser par un seul regard un grand nombre de cas qui semblaient distincts.

Le moment n'est pas encore venu pour introduire de tels perfectionnements dans la théorie des surfaces. Ce qui importe à présent, c'est de surmonter les obstacles qu'on rencontre sur le chemin, c'est d'arriver au sommet qui reluit devant nous. S'il y a quelqu'un qui ne se hasarde pas à nous suivre sur une voie désagréable, eh bien qu'il attende! Cependant, nous l'espérons, il lira avec intérêt la description du paysage qui s'offre à nos regards, du point où nous sommes parvenus; il la trouvera dans cette Monographie, qui lui est consacrée.

Mais s'il y a des courageux qui désirent de nous suivre, ils trouveront dans les pages suivantes tous les renseignements pour le faire. Et ils seront récompensés de leur peine, car le champ de recherches est bien loin d'être épuisé, et la région qui reste à explorer est encore très vaste, et peut amener à de brillantes découvertes. Il faut pourtant se rappeler que ce n'est pas d'un seul point de vue qu'on peut embrasser un horizon si vaste. C'est au contraire par les efforts réunis de plusieurs travailleurs suivant des voies différentes, c'est par l'application savante de toutes les ressources que la géométrie et

l'analyse mettent aujourd'hui à notre disposition, qu'on peut espérer d'approfondir la théorie des surfaces, et de l'enrichir de nouvelles découvertes.

Alors seulement cette branche sera digne de figurer à côté de la théorie admirable des fonctions algébriques d'une variable, dont la construction est une gloire des géomètres de notre siècle.

Chapitre I.

Transformations birationnelles. Genre d'une courbe et d'une surface d'après Clebsch et M. Nöther.

1.

Transformations birationnelles.

La géométrie projective (théorie des substitutions linéaires et homogènes entre deux groupes de variables) a trouvé son extension la plus naturelle dans la théorie des transformations birationnelles entre deux variétés algébriques.

On sait bien comment ces transformations sont définies. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_r$, et $y_1, y_2, \ldots, y_s$ deux groupes de variables, que nous pouvons regarder comme les coordonnées homogènes d'un point x dans un espace linéaire X à $r-1$ dimensions, et d'un point y dans un espace Y à $s-1$ dimensions; établissons entre ces variables des relations de la forme

$$\varrho y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{1}$$

où les f_i sont des formes algébriques toutes du même degré dans les x, et ϱ est un facteur de proportion; on aura alors une *transformation rationnelle* entre l'espace X et une certaine variété algébrique de l'espace Y. A tout point général x de X correspond un (seul) point y de l'espace Y; tandis que x décrit dans son espace une ligne, ou surface . . . algébrique F, le point y décrit en Y (en général) une ligne, ou surface . . . algébrique F' qui correspond à F. Tout point général y de F' peut provenir cependant d'un, ou de plusieurs (même d'infinis) points x. Si c'est le premier cas qui arrive, alors, à l'aide des (1) et des équations qui définissent la F en X, on peut exprimer à leur tour les variables x en fonctions rationnelles des y, par des relations de la forme

$$\sigma x_k = \varphi_k(y_1, y_2, \ldots, y_s) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{2}$$

Les (1) et (2) définissent une *correspondance*, ou *transformation birationnelle* entre F et F'.

En particulier, on peut avoir une transformation birationnelle (ou *de Cremona*) entre deux espaces linéaires (ayant les mêmes dimensions); les (1) et (2) définissent une telle transformation entre X et Y, si $r = s$, et si en outre l'on peut deduire les (1) des (2), et celles-ci de celles-là, pour *toutes* les valeurs des x et des y.

2.

Eléments exceptionnels d'une transformation.

En revenant aux variétés F et F' en correspondance birationnelle, il y a deux cas à distinguer, suivant que les F, F' sont des courbes, ou bien des variétés à plus d'une dimension. Dans le premier cas en effet, on a entre les courbes F, F' une correspondance biunivoque *sans exceptions* d'une nature essentielle. Mais si F, F' sont par exemple des surfaces (à deux dimensions), il peut bien exister sur F (ou F') des points simples (en nombre fini), à chacun desquels vont correspondre sur F' (ou F) tous les points d'une courbe*). Sur une surface, une courbe qui par une transformation birationnelle convenable peut être changée en un point simple d'une autre surface, se distingue, par bien de propriétés, des autres courbes de la première surface; nous la nommerons *courbe exceptionnelle*. Les courbes exceptionnelles (dans la plupart des cas) ne diffèrent pas des *ausgezeichnete Curven*, considérées par M. Nöther**); c'est ce que nous verrons plus tard.

Supposons, en particulier, qu'au point P de F corresponde la courbe exceptionnelle P' de F'; et soit C une courbe quelconque de F passant par P. Les points de C, autres que P, correspondent aux points d'une courbe C' de F'; on pourrait vraiment regarder C' comme la courbe correspondante de C sur F. Mais d'ordinaire il convient de joindre à la courbe C', la courbe exceptionnelle P' (qui provient du point P de C), et d'envisager la courbe ainsi composée comme la transformée de C. C'est là une convention que nous allons respecter, en général, dans la suite.

3.

Répartition en classes des variétés algébriques.

Par rapport aux transformations birationnelles, les variétés algébriques, ayant un même nombre de dimensions, se répartissent en classes; nous dirons, avec Riemann, que deux variétés appartiennent

*) La projection stéréographique d'une surface du second ordre sur un plan donne un exemple bien simple de telles courbes.

**) Mém. cité, Mathem. Annalen 8, pag. 521.

à la même classe lorsqu'on peut établir une correspondance birationnelle entre elles. On aura donc, par exemple, à considérer la classe des *courbes rationnelles* (ou unicursales) qui peuvent être transformées birationnellement en une droite, la classe des *surfaces rationnelles* (ou unicursales, homaloïdes) qui sont en correspondance birationnelle avec un plan, etc.

Les variétés d'une même classe diffèrent entre elles, il est vrai, par leurs caractères projectifs (ordre, dimension de l'espace auquel elles appartiennent, ...); mais elles ont plusieurs propriétés communes, dont la recherche forme le sujet de la *Géométrie sur les variétés algébriques;* cette branche s'occupe donc des propriétés invariables par rapport aux transformations birationnelles. Il s'ensuit que lorsqu'on étudie une *classe* de variétés, on peut se rapporter toujours à une variété abstraite, générale, de la classe, sans faire attention du tout à ses caractères projectifs; on pourrait même dire qu'on envisage le *champ algébrique* dont les variétés de la classe (courbes, surfaces ...) sont des *images projectives;* il n'y aurait là pourtant qu'un nouveau mot, pas une conception nouvelle*).

La considération de la variété générale d'une classe a ce grand avantage, qu'elle permet de faire abstraction de toutes les singularités de nature projective qu'une variété particulière peut présenter. Ainsi, dans la suite, lorsque nous parlerons des points de la variété générale d'une classe, nous allons supposer toujours qu'il s'agit de points *simples;* on n'exclut pas naturellement que ces points ne peuvent correspondre à des points multiples sur des variétés particulières de la classe; mais on affirme simplement qu'un point multiple est une particularité projective de quelque représentant de la classe, pas de la classe elle-même; c'est, pour ainsi dire, un défaut de l'image, pas du modèle.

On va trouver pourtant, dans la suite, quelques paragraphes où l'on envisage vraiment une variété donnée par ses caractères projectifs (une courbe *plane* avec ses points multiples, une surface *de l'espace ordinaire* d'ordre connu, etc.); c'est que ces paragraphes n'appartiennent pas proprement à notre théorie, mais à des théories auxiliaires. On pourrait même les supprimer, si l'on ne redoutait pas la complication qui s'ensuivrait.

4.

Genre d'une courbe et d'une surface algébrique.

Pour effectuer la répartition en classes, dont nous venons de parler, il faut connaître des caractères numériques qui gardent la même valeur

*) A ce point de vue l'on peut regarder l'étude d'une classe de variétés comme l'étude d'un *champ de rationnalité* (d'après Kronecker) ou d'un *corps de fonctions algébriques* (d'après Dedekind et Weber).

pour toutes les variétés d'une même classe. On sait bien comment Riemann, en étudiant au point de vue de l'*Analysis situs* la surface réelle qui représent les points (réels et imaginaires) d'une *courbe algébrique*, est parvenu au plus important de ces caractères, qu'il a nommé *genre de la courbe* (ou de la relation algébrique correspondante)*). Clebsch et Gordan, en exposant (1866) la même conception sous la forme géométrique, ont donné du genre la définition bien connue qui suit.

Soit C une courbe plane de l'ordre n; supposons par simplicité que C n'ait d'autres points multiples, en dehors de d points doubles. Considérons les courbes d'ordre $n-3$ qui passent simplement par les d points nommés, courbes qu'on appelle *adjointes* à C; *le nombre des courbes adjointes qui sont linéairement distinctes est le genre p de C.*

A côté de cette définition *géométrique*, on peut donner une définition *numérique* de p. Il suffit de remarquer que le nombre des paramètres qui entrent d'une façon homogène dans l'équation d'une courbe de l'ordre $n-3$, assujettie à passer par d points donnés, est

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d.$$

On suppose vraiment ici que les d points doubles de C présentent autant de conditions *distinctes* aux courbes d'ordre $n-3$, que l'on contraint à passer par eux; cela n'est pas évident *a priori*, mais on a démontré plus tard (Brill et Nöther**)) que la supposition est toujours vérifiée, lorsque on se borne aux courbes irréductibles.

Même si l'on fait abstraction de cette remarque, il est bon d'observer que les deux définitions amènent également à des invariants d'une courbe plane; en effet, on a donné plusieurs démonstrations de l'invariance du genre, dont quelques-unes (Riemann, Clebsch et Gordan,...) se rapportent à la première définition, d'autres (Cremona, Bertini, Zeuthen,...) à la seconde.

L'extension de ces définitions aux surfaces algébriques est immédiate, dans les cas les plus simples; Clebsch***) et M. Nöther†) l'ont indiqué.

Soit F une surface algébrique d'ordre n de l'espace ordinaire; supposons que F n'ait d'autres singularités qu'une courbe double de l'ordre $d(\geq 0)$ et genre π, et un certain nombre fini $t(\geq 0)$ de points triples pour la surface, et triples aussi pour la courbe double nommée. Considérons maintenant les surfaces d'ordre $n-4$ qui passent simplement par la courbe double (et en conséquence deux fois, en général, par ses points triples), surfaces que nous appelerons *adjointes* à F; *le*

*) On pourrait faire remonter la notion du genre au théorème d'Abel, bien que Abel lui-même ne parle pas expressément de caractères invariants.

**) *Ueber die algebraischen Functionen* ..., Math. Annalen Bd. 7, 1873.

***) Comptes Rendus de l'Acad. d. Sc., Déc. 1868.

†) Mémoire cité, *Zur Theorie* ...; Mathem. Annalen 2, 8.

nombre de ces surfaces linéairement distinctes est (d'après la démonstration de M. Nöther) un caractère invariant (par rapport aux transformations birationnelles) de la surface F; on l'appelle le *genre géométrique* de F, et on le désigne par p_g.

Or si nous remarquons qu'une surface d'ordre m *assez élevé* doit satisfaire à

$$md - 2t - \pi + 1$$

conditions pour contenir la courbe double de F, nous sommes portés (avec Cayley*)) à former l'expression

$$p_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} - (n-4)d + 2t + \pi - 1,$$

dont la valeur est exactement p_g, si $m = n - 4$ est assez élevé pour que l'on puisse appliquer la formule qui précède. Que la dernière condition soit remplie ou non, l'*expression de p_n a toujours la propriété d'invariance;* c'est ce que MM. Zeuthen et Nöther**) ont montré. La même expression est parfaitement analogue à celle considerée ci-dessus en parlant des courbes planes; on lui a donné le nom de *genre numérique* de la surface F.

Mais ici s'arrête l'analogie avec les courbes planes; en effet nous ne pouvons plus affirmer l'égalité entre les valeurs de p_g et p_n; au contraire *il peut bien arriver que l'on ait $p_g \neq p_n$ et précisément $p_g > p_n$*. Par exemple une surface réglée ayant les sections planes de genre p, a (d'après Cayley***)) $p_g = 0$, $p_n = -p$. On a porté plus tard d'autres exemples de surfaces avec $p_g > p_n$; nous y reviendrons dans la suite.

5.

Remarques sur les définitions qui précèdent.

M. Nöther dans le Mémoire cité plusieurs fois, avance dans l'étude des surfaces, en considérant les courbes découpées sur F par les surfaces adjointes d'ordre $n - 4$. Nous ne le suivrons pas, pour le moment, dans cette direction; nous aimons mieux montrer quelques difficultés auxquelles amènent les définitions des genres d'une surface.

Nous nous sommes bornés en les rappelant, à considérer des surfaces ayant des singularités bien simples; on pourrait vraiment, envisager aussi des cas plus compliqués, mais il s'en faut de beaucoup que l'on puisse toujours préciser d'une manière directe le comportement

---

*) *On the Deficiency of certain Surfaces*, Mathem. Annalen, 3, 1871.

**) Zeuthen, *Etude géométrique ...*, Mathemat. Annalen, 4, 1871; Nöther, *Zur Theorie ...*, Math. Annalen, 8, pag. 526.

***) Mém. cité.

d'une surface adjointe dans un point singulier de la surface donnée*). On n'est donc pas en mesure de définir le genre numérique d'une surface ayant des singularités supérieures, ni par suite de montrer dans ce cas la propriété d'invariance de p_n. Ce serait bien mieux si l'on pouvait donner de p_n, et même de p_g, une telle définition qui ne dependît pas des singularités de la surface considérée, et qui fît ressortir sur le champ l'invariance de ces caractères, et le lien entre eux. C'est ce que nous nous proposons d'obtenir. Mais pour plus de clarté il convient de partir des notions les plus simples, et de montrer comment la théorie des courbes et des surfaces algébriques peut se reconstruire sous un unique point de vue.

Chapitre II.

Série linéaire de groupes sur une courbe. Système linéaire de courbes sur une surface.

6.

Série linéaire sur une courbe.

Dans l'étude d'une *classe* de variétés algébriques, le plus grand intérêt appartient aux *fonctions rationnelles* des équations qui définissent la classe.

En nous bornant, pour le moment, aux courbes, si

$$f(x, y) = 0$$

est l'équation d'une courbe plane quelconque de la classe, à toute *fonction rationnelle* $R(x, y)$ de x et y (liées par la $f = 0$) correspond une *série linéaire* ∞^1 de groupes de points sur la courbe; chaque groupe de la série se compose des points (en nombre fixe) où la R prend une valeur arbitrairement donnée, qui change d'un groupe à l'autre. Le nombre n des points de chaque groupe est appelé l'*ordre* de la R ou de la série; celle-ci est désignée, d'ordinaire, par g_n^1. On peut dire aussi que les groupes de g_n^1 sont les groupes des zéros des fonctions rationnelles représentées par l'expression $R(x, y) + C$, où C est un paramètre; toutes ces fonctions ont les mêmes pôles. Plus généralement considérons plusieurs fonctions rationnelles de notre courbe,

$$R_1(x, y),\ R_2(x, y),\ \ldots,\ R_r(x, y)$$

*) La méthode analytique proposée à cet effet par M. Nöther ne fournit pas une définition directe, permettant le calcul de p_n, car on doit recourir à une transformation de la surface. Voir à ce sujet Nöther, Göttinger Nachrichten, 1871, Mathem. Annalen, 29, ainsi que Zeuthen, *Révision et extension des formules numériques* ... Mathem. Annalen 10, pag. 544, 1876.

ayant toutes les mêmes n pôles, et n'étant pas liées par aucune relation linéaire à coefficients constants; formons la fonction

$$\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \cdots + \lambda_r R_r + C$$

qui dépend des paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, C$; le groupe des zéros de celle-ci décrit (lorsque on fait varier les paramètres) *une série linéaire* g_n^r *d'ordre* n, *et dimension* r; r points généraux de la courbe entrent dans un groupe de g_n^r, et dans un seul. Le groupe des pôles appartient aussi à la série, et ne présente aucune particularité dans celle-ci. Il est facile maintenant de définir la plus ample série linéaire d'ordre n, à laquelle appartient un groupe de n points donnés, ou, comme nous dirons, la *série complète* (*Vollschaar*) qui est déterminée par ce groupe. Il suffit en effet de considérer *toutes* les fonctions rationnelles d'ordre n, qui ont leurs pôles dans ce groupe; les groupes des zéros de ces fonctions forment la série demandée. Il est clair que la dimension de la dernière série ne peut surpasser n; si elle atteint cette valeur, la courbe dont il s'agit est rationnelle, car dans le cas contraire on ne saurait fixer arbitrairement les zéros et les pôles d'une même fonction rationnelle.

Les mêmes considérations peuvent être présentées aussi sous la forme géométrique*). Soit C une courbe algébrique (plane ou de l'espace ordinaire, ou d'un hyperespace); découpons-la par un système linéaire ∞^r ($r \geqq 0$) de variétés (courbes, surfaces . . .)

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_{r+1} f_{r+1} = 0,$$

où les f sont des formes algébriques toutes du même degré (à trois, quatre . . . variables). Si chaque f a n points d'intersection avec la C, et s'il n'y a dans le système aucune variété qui contient la C, les groupes des intersections formeront une série linéaire g_n^r. Plus généralement si avec les groupes de la g_n^r nous formons des groupes de $n \pm n'$ points, en ajoutant aux premiers groupes les mêmes n' points fixés arbitrairement sur C, ou en les retranchant s'ils entrent dans chaque groupe de g_n^r, nous dirons que les nouveaux groupes forment une série linéaire $g_{n\pm n'}^r$.

Les variétés f qui nous ont permis de construire la série g_n^r ne sont pas pourtant liées avec elle (au point de vue de la géométrie sur la courbe), et n'entrent pas du tout dans l'étude de la série. On peut

*) Ainsi que nous l'avons dit dans l'introduction, nous présentons ici la théorie géométrique des séries linéaires (qui est due à MM. Brill et Nöther, Mém. cité) suivant le plan adopté dans quelques travaux italiens. On trouvera les développements et les citations relatives dans la Monographie de M. Segre, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico* . . ., Annali di Matematica s°. II, tomo XXII, 1894. Dans le même volume on pourra aussi consulter avec profit une Monographie de M. Bertini, où le même sujet est exposé au point de vue de Brill et Nöther.

bien construire celle-ci par d'autres systèmes de variétés, soit sur la même courbe C, soit sur une courbe C' de la même classe (car une transformation birationnelle entre C et C' change la g_n^r de C en une g_n^r de C').

On peut même définir la série linéaire g_n^r sur une courbe algébrique quelconque, sans mentionner expressément les variétés qui servent à la découper. En effet *c'est une g_n^r tout système ∞^r de groupes de n points sur la courbe, dont les groupes dépendent rationnellement de r paramètres, de manière que la condition de contenir un point arbitrairement fixé sur la courbe se traduise par une relation linéaire entre les paramètres.* Il s'ensuit naturellement que r points généraux de la courbe définissent un groupe; mais nous verrons tout à l'heure comment on peut aussi (avec quelques restrictions) tirer les prémisses de la conclusion.

Lorsqu'une série linéaire g_n^r $(r \geqq 0)$ est donnée sur une courbe, il peut se faire qu'il existe sur la même courbe une nouvelle série g_n^s du même ordre et de dimension $s > r$, qui contienne tous les groupes de g_n^r, et par suite la g_n^r elle-même; il peut arriver au contraire qu'une telle série g_n^s n'existe pas. Or on dit *qu'une série est complète lorsqu'elle n'est pas contenue dans une autre série du même ordre et de dimension supérieure;* la série est *incomplète* dans le cas contraire*).

Dans ce dernier cas, en formant des séries de l'ordre n et de plus en plus amples, qui contiennent une série incomplète g_n^r donnée, on parviendra nécessairement à une série g_n^s $(r < s \leqq n)$ complète contenant celle-là. Or on démontre que cette dernière série ne dépend pas du procédé qu'on suit pour la construire; elle dépend seulement de la série g_n^r d'où l'on part. En d'autres termes:

Une série linéaire g_n^r $(r \geqq 0)$ ou bien est complète, ou bien elle est contenue dans une série complète du même ordre n, laquelle est entièrement déterminée par la g_n^r).

Il s'ensuit par exemple que *si d'une série complète g_n^r on déduit une nouvelle série $g_{n-\nu}^{\varrho}$ en imposant aux groupes de celle-là la condition de contenir ν points quelconques de la courbe, et en les supprimant ensuite dans ces groupes, la nouvelle série sera encore complète.* On l'appelle *série résiduelle* des ν points par rapport à g_n^r; sa dimension ϱ est égale à $r - \nu$, ou supérieure, selon que les ν points présentent des conditions toutes indépendantes, ou non, aux groupes de g_n^r qui les contiennent.

Ce sont les séries complètes qui offrent le plus grand intérêt. Toutefois la théorie des surfaces va nous amener souvent à considérer aussi des séries incomplètes. Un caractère d'une telle série g_n^r auquel il faut avoir égard, c'est la difference $s - r$ que l'on obtient en

*) On voit bien que cette définition est parfaitement d'accord avec celle que nous avons donnée, en partant de considérations analytiques.

**) Segre, l. c., § 14.

retranchant la dimension de notre série de la dimension de la série complète g_n^s qui contient celle-là. Nous appelons cette différence le *défaut* (*deficiensa*, *difetto di completezza*, *Defect*) de la g_n^r.

Remarque. — Sur la définition d'une série linéaire on peut faire une remarque, qui, du reste, n'a pas d'importance pour la suite de notre Monographie. Appelons *involution d'ordre n et dimension r* sur une courbe algébrique tout système algébrique de ∞^r groupes de n points, tels que r points généraux de la courbe entrent dans un seul groupe du système. Alors nous pouvons dire que toute série linéaire est une involution; sera-t-il vrai aussi le théorème réciproque? Pas toujours, car il y a des involutions ∞^1 qui ne sont pas linéaires; celles, par exemple, qui sont découpées par les génératrices d'une surface réglée irrationnelle sur les courbes appartenantes à la surface. Mais, *en dehors* des involutions ∞^1, et *des involutions* ∞^r *dont tout groupe est formé par r groupes arbitraires d'une involution* ∞^1 (d'ordre $n \geqq 1$), on démontre que *toute involution de dimension* > 1 *est une série linéaire**). On a donc là une nouvelle définition de ces séries.

7.

Système linéaire de courbes sur une surface.

Les fonctions rationnelles d'une équation algébrique à deux variables nous ont portés à considérer les séries linéaires sur une courbe; de même, en partant d'une équation à trois variables, on parviendrait à envisager les systèmes linéaires de courbes sur une surface.

Pour les définir au point de vue géométrique il suffit de considérer une surface algébrique F (de l'espace ordinaire ou d'un hyperespace) et un système linéaire de variétés (à deux, . . ., dimensions)

$$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_{r+1} f_{r+1} = 0;$$

les courbes que ces variétés découpent sur la F forment un *système linéaire* dont la *dimension* est r, si aucune des variétés nommées ne contient la F.

Au sujet des variétés f, il peut se faire qu'elles contiennent une même courbe fixe de F, courbe qu'on est libre de regarder comme faisant partie de la courbe générale du système, ou bien comme étrangère à celle-ci (qui alors se réduira à la partie variable de l'intersection fF). Il peut arriver encore que les f passent par des points fixes de F (en dehors des courbes fixes); ces points, en nombre fini, qui appartiennent à toutes les courbes du système, sont appelés *points-base* de celui-ci.

*) Ce théorème a été donné en même temps (juin 1893) par MM. Humbert (Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc.; voir aussi Journal de Mathématiques, 4e série t. X) et Castelnuovo (Atti dell' Accad. d. Sc. di Torino).

Un système linéaire ∞^r de courbes sur une surface a la propriété que par r points généraux de la surface passe une seule courbe du système. Cette propriété peut même servir de définition pour un système linéaire de dimension $r > 1$. Il existe, c'est vrai, des systèmes pas linéaires ∞^1 de courbes satisfaisant à la condition que par tout point général de la surface passe une seule courbe du système; *ce sont les faisceaux irrationnels*, dont le système des génératrices d'une surface réglée irrationnelle fournit un exemple bien simple. *Mais tout système* ∞^r, *avec* $r > 1$, *dont une seule courbe est entièrement déterminée par* r *points de la surface, est un système linéaire, si l'on exclut seulement le cas où la courbe générale du système est composée par plusieurs courbes d'un faisceau irrationnel**).

La courbe générale d'un système linéaire peut être *irréductible*, ou bien se composer de plusieurs parties; dans le premier cas on dit que le système est *irréductible*, et *réductible* dans le second cas. L'étude de ce dernier cas se réduit au premier (le plus intéressant) à l'aide du théorème:

La courbe générale d'un système linéaire réductible ∞^r *est formée:*

1) *ou bien par une partie fixe (commune à toutes les courbes du système), jointe à une courbe qui varie dans un système linéaire irréductible* ∞^r;

2) *ou bien par plusieurs* $(\geqq r)$ *courbes qui appartiennent à un même faisceau (rationnel ou non), auxquelles peuvent s'ajouter parfois des parties fixes.*

L'exclusion des systèmes réductibles, qui rendrait plus simples nos considérations, n'est pas toujours possible; car il y a des opérations sur les systèmes linéaires qui, même en partant d'un système irréductible, peuvent porter à des systèmes réductibles. Mais, à l'aide de conventions appropriées, on peut réunir sous un même énoncé la plupart des propriétés des uns et des autres systèmes.

Bornons-nous, pour le moment, aux systèmes irréductibles; soit $|C|$ un tel système, C sa courbe générale.

Les caractères les plus importants du système (qui restent invariables par les transformations birationnelles de la surface) sont les suivants:

1) la *dimension* r de $|C|$;

2) le *degré* n, c'est à dire le nombre des intersections variables de deux courbes générales du système (pour $r = 1$, on a $n = 0$).

3) le *genre* π, qui est le genre de la courbe C.

On a aussi à considérer souvent une série linéaire qui est liée invariablement avec le système $|C|$, et qui va jouer dans la suite un

*) Enriques, *Una questione sulla linearità* ..., Rendic. della R. Accad. d. Lincei, luglio 1893; la démonstration est rapportée avec quelques simplifications dans la Monographie citée de M. Segre, n° 27.

rôle important; c'est la *série caractéristique* g_n^{r-1}, qui est découpée sur une C par les autres courbes de $|C|$*). Ici l'on a $r - 1 \leqq n$, d'où l'on conclut que la dimension d'un système irréductible ne peut surpasser le degré augmenté d'une unité.

Remarque. — La propriété d'un système $|C|$, situé sur une surface F, d'être réductible ou irréductible, ainsi que les caractères r, n, π de $|C|$, se transportent sans modifications à un système $|C'|$ d'une surface F', lorsqu'il y a une transformation birationnelle qui change F en F' et $|C|$ en $|C'|$. Toutefois pour que cette remarque subsiste sans exceptions, il faut faire la convention suivante. Il peut arriver qu'un point-base P de $|C|$ sur F, ayant l'ordre $i \geqq 1$ pour la courbe C générale (point que nous supposerons simple pour F), donne, par la transformation, une courbe exceptionnelle P' de F'. D'après le n° 2, on devrait regarder cette courbe P', comme faisant partie de la courbe C' transformée de C; mais alors $|C'|$ serait réductible, lors même que $|C|$ ne l'est pas. Pour éviter le désaccord on convient dans ce cas, de faire abstraction de la courbe P' (correspondante à un point-base de $|C|$), et de regarder C' comme le lieu des points correspondants aux points de C, excepté le point P. On va respecter au contraire la règle du n° 2 lorsque P (qui se transforme en la courbe P') n'est pas un point-base de $|C|$, mais bien un point général de F.

Outre l'exemple que nous avons porté, il y en aurait d'autres analogues à discuter. Nous n'y insistons pas ici; le lecteur qui voudra approfondir ces questions, pourra le faire ailleurs**); il verra pourtant de ces quelques mots, qu'il y a dans la théorie des surfaces des difficultés et des distinctions qu'on ne réussit pas à éviter.

8.

Systèmes linéaires complets.

Si nous nous proposons de transporter aux systèmes linéaires sur une surface la notion de série complète établie pour une courbe, nous rencontrons tout d'abord une distinction qui ne se présentait pas alors. En effet si l'on cherche un système $|D|$ qui contienne le système donné $|C|$, il faut fixer quel est le caractère de $|C|$ qui doit se transmettre au nouveau système. On peut exiger que le genre π seulement reste

*) L'importance de cette série dans l'étude des systèmes linéaires de courbes planes a été remarquée par MM. Segre (*Sui sistemi lineari ...*, Rendic. Circolo Mat. di Palermo, tomo I, 1887) et Castelnuovo (*Ricerche generali sopra i sistemi lineari ...*, Memorie dell' Acc. d. Sc. di Torino, s^e^ II, t. 42). Quant à la considération de cette série sur les surfaces on n'a qu'à consulter les travaux de MM. Enriques et Castelnuovo, cités dans l'introduction.

**) Enriques, *Introduzione ...*, cap. I.

invariable; mais on peut aussi exiger que ce soit le degré n (et par suite le genre) qui ne change pas. Bien que la première condition soit de nature plus générale que la seconde, c'est à celle-ci qu'il faut assigner plus d'intérêt; le progrès de la théorie des surfaces l'a montré. Par conséquent nous dirons qu'*un système linéaire irréductible de courbes est complet (par rapport au degré), lorsqu'il n'y a sur la surface d'autre système du même degré et de dimension supérieure, qui contienne le premier système**).

En voici un exemple fort simple. Considérons sur un plan le système linéaire de toutes les courbes ayant des multiplicités données en certains points-base; c'est un système *complet*. En d'autres termes: *un système linéaire de courbes planes entièrement défini par ses points-base est complet***).

La définition que nous venons de donner ci-dessus, peut se présenter d'une manière plus générale, qui permet de l'étendre aussi aux systèmes réductibles. A cet effet il faut expliquer d'abord la locution: *une courbe C_0 (simple ou composée) est contenue totalement dans un système $|C|$ donné.*

Cela revient à dire que la courbe C_0 est par elle-même *une* courbe de $|C|$ (on exclut ainsi qu'elle soit *une partie* d'une telle courbe), et en outre que C_0 a le même ordre de multiplicité de la courbe générale de $|C|$ en tout point-base du système. Pareillement on dit qu'un système est contenu *totalement* dans un autre, lorsque la courbe générale du premier système est contenue totalement dans le second, et les points-base de celui-ci sont aussi les points-base de celui-là. On démontre alors facilement que deux systèmes dont l'un est contenu totalement dans l'autre, ont le même *degré;* et *viceversa*, si de deux systèmes ayant le même degré, l'un est contenu dans l'autre, on peut affirmer qu'il y est contenu *totalement****). Il résulte que la définition de système complet peut maintenant s'énoncer comme il suit:

Un système linéaire est complet s'il n'est pas contenu totalement dans un autre système.

Sous cette forme la définition a une signification, et montre ce

---

*) La notion de système complet (par rapport au degré), *sistema normale* a été introduite par M. Enriques (*Ricerche di geometria*... I, 2; *Introduzione*...): l'extension aux variétés ∞^r se trouve dans la Monographie citée de M. Segre (n° 26). M. Enriques dans le premier Mémoire parle aussi des systèmes complets par rapport au genre, qu'il appelle *sistemi completi*. Nous n'y recourons pas dans ce Mémoire.

**) Si parmi les points-base il y en a des simples, en faisant abstraction de ceux-ci l'on obtient un système plus ample que le système donné, qui a pourtant le même genre de celui-ci, mais le degré supérieur. On voit donc qu'un système complet par rapport au degré peut bien n'être pas complet par rapport au genre.

***) Enriques, *Introduzione*... n° 7.

que l'on doit entendre par *système complet*, lors même que le système donné est réductible, ou s'il a la dimension *un* ou *zéro;* dans ces derniers cas pourtant on doit désigner quels sont les points qu'il faut regarder comme points-base du système complet.

C'est dans ce sens qu'il faut entendre le théorème suivant, qui est parfaitement analogue à un théorème sur les séries linéaires*):

Tout système linéaire ∞^r $(r \geqq 0)$ *est complet, ou bien il est contenu totalement dans un système complet qui est entièrement déterminé par celui-là.*

On a encore cet autre théorème qui rappelle aussi un théorème sur les séries:

Si d'un système linéaire complet on déduit un nouveau système en imposant aux courbes du premier la condition de passer par des points fixes avec des ordres de multiplicité donnés, le dernier système est aussi complet.

Dans la suite nous allons considérer, autant que possible, des systèmes complets.

9.

Opérations élémentaires sur les séries et sur les systèmes de courbes.

Nous appelons par ce nom les opérations d'addition et de soustraction des séries et des systèmes, que nous allons définir; elles correspondent à la multiplication et à la division des fonctions rationnelles qui appartiennent à un même champ de rationnalité.

Soient d'abord deux séries linéaires complètes g_m^q, g_n^r sur une même courbe; formons tous les groupes de $m + n = p$ points que l'on obtient en réunissant un groupe arbitraire de g_m^q à un groupe arbitraire de g_n^r; les groupes ainsi formés appartiennent, on le démontre facilement, à une même série complète g_p^s, que l'on appelle *somme des deux séries données.* On n'exclut pas le cas où les deux séries g_m^q, g_n^r coïncident; on parvient alors à la série *double* d'une série donnée. Et de même l'on définit la série somme de plusieurs séries, et la série multiple (k. uple) d'une série donnée**).

Nous sommes maintenant en mesure de définir l'opération inverse, la soustraction des séries, autant qu'elle est possible. Considérons à

*) Enriques, *Introduzione* . . . n° 11.

**) Segre, *Introdusione* . . . n° 59. Vraiment on entendait quelques fois par *somme de deux séries* g_m^q, g_n^r (complètes, ou non) la série d'ordre $m + n$ et de la plus petite dimension, qui contient les groupes composés d'un groupe de g_m^q et d'un groupe de g_n^r (*voir* Castelnuovo, *Sui multipli di una serie lineare...*, Rendic. Circolo Mat. di Palermo, t. VII). Mais dans cette Monographie nous adoptons la définition exposée ci-dessus.

cet effet deux séries complètes g_p^s, g_n^r $(p > n)$ sur la courbe, et supposons qu'un certain groupe G_n de la seconde série soit contenu dans ∞^q groupes $(q \geqq 0)$ de la première. Les groupes des $p - n = m$ points qui restent, forment comme nous savons, une série complète g_m^q *résiduelle* de G_n par rapport à g_p^s. Or cette série g_m^q a une propriété remarquable; en effet elle est résiduelle (par rapport à g_p^s) non seulement de G_n, mais aussi de tout autre groupe de g_n^r. On dit par conséquent que *g_m^q est la série résiduelle de g_n^r par rapport à g_p^s*; mais l'on voit de même que g_n^r, à son tour, est résiduelle de g_m^q par rapport à g_p^s; la dernière série est la somme des deux premières. Cette propriété donne lieu à l'énoncé qui suit*):

Deux séries complètes g_p^s, g_n^r étant données sur une même courbe, si un groupe de la g_n^r est contenu dans quelque groupe de la prémière série, il en est de même pour tout autre groupe de la g_n^r; il existe alors une troisième série g_m^q entièrement déterminée, qui additionnée à la seconde g_n^r donne la première série g_p^s; les deux séries g_m^q, g_n^r sont résiduelles l'une de l'autre par rapport à g_p^s.

A ce théorème l'on pourrait donner le nom de *théorème du reste* pour les séries; ce nom cependant a été dejà adopté par MM. Brill et Nöther pour désigner un théorème qui a bien d'analogie avec le précédent, mais qui comprend aussi d'autres notions dont nous allons parler plus tard.

Venons maintenant aux systèmes linéaires de courbes sur une surface; l'analogie nous permet d'étendre sur le champ les résultats qui précèdent. Si $|C_1|$ et $|C_2|$ sont deux systèmes complets de courbes sur une même surface, les courbes $C_1 + C_2$, que l'on peut former en réunissant deux courbes prises arbitrairement dans les deux systèmes, appartiennent à un même système complet déterminé $|C| = |C_1 + C_2|$ qui s'appelle *somme de* $|C_1|$ *et* $|C_2|$. En particulier on peut parler du système *double, triple* ... d'un système donné.

Partons à présent du système $|C|$, et soit C_1 une courbe qui entre dans quelque courbe (réductible) de $|C|$; les courbes C_2 qui avec la C_1 donnent lieu à des courbes de $|C|$ forment un système complet $|C_2|$ *résiduel de la C_1 par rapport à $|C|$*. Or si la C_1 appartient à un système complet $|C_1|$ (déterminé par elle), on démontre que $|C_2|$ est aussi résiduel (par rapport à $|C|$) de toute autre courbe de $|C_1|$; c'est *le système $|C_2| = |C - C_1|$ résiduel de $|C_1|$ par rapport à $|C|$*, de même que $|C_1|$ est résiduel de $|C_2|$ par rapport à $|C|$. On a donc le théorème**):

Si un système complet $|C|$ contient une courbe d'un second système

*) Segre, *Introduzione* ... n° 58.

**) Enriques, *Introduzione* ... n° 13.

complet $|C_1|$, *le premier système contient toute courbe du second; il existe alors un système complet* $|C_2|$ *entièrement déterminé, tel que* $|C| = |C_1 + C_2|$; *chacun des deux systémes* $|C_1|$ *et* $|C_2|$ *est résiduel de l'autre par rapport à* $|C|$.

Il faut remarquer pourtant que même si $|C|$ et $|C_1|$ sont supposés irréductibles, il peut bien se faire que $|C_2| = |C - C_1|$ soit réductible.

Pour terminer ces considérations sur le système somme de deux systèmes donnés, nous ferons connaître ici deux relations bien simples, auxquelles il faut pourtant recourir souvent dans les recherches sur les surfaces. Ces formules expriment le degré n et le genre π du système somme $|C| = |C_1 + C_2|$ à l'aide des caractères analogues n_1, π_1 et n_2, π_2 des deux systèmes $|C_1|$ et $|C_2|$; on a précisément

$$n = n_1 + n_2 + 2i,$$
$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1,$$

où i désigne le nombre des intersections variables d'une C_1 avec une C_2. On suppose ici que $|C_1|$ et $|C_2|$ sont irréductibles; mais il est utile de remarquer que s'il n'en était pas ainsi, on pourrait de même définir le genre et le degré des systèmes réductibles de sorte que les relations précédentes fussent encore vraies*).

Chapitre III.

Courbes adjointes à une courbe plane. — Surfaces sous-adjointes à une surface de l'espace ordinaire.

Dans le Chapitre précédent nous avons consideré des séries complètes et des systèmes complets de courbes, mais nous n'avons pas indiqué le moyen de *completer* une série ou un système donné. C'est ce que nous allons faire maintenant, en nous bornant (dans ce Chapitre) aux séries situées sur les courbes *planes*, et aux systèmes de courbes sur les surfaces de *l'espace ordinaire*. Tous les autres cas peuvent se ramener à ceux-ci, à l'aide d'une transformation birationnelle convenable de la courbe ou de la surface donnée.

10.

Courbes adjointes à une courbe plane.

Soit d'abord C une courbe *plane* de l'ordre m, qui aura en général des points multiples. On appelle *courbe adjointe* à C une courbe qui passe $\alpha - 1$ fois par tout point multiple d'ordre α de la courbe C ($\alpha = 2, 3 \ldots$)**). Les courbes adjointes à C d'un ordre donné (qui

*) Enriques, *Introduzione* . . . n. 15, 16.

**) Brill et Nöther, *Ueber die algebraischen Functionen* . . ., l. c.

existent certainement si cet ordre est assez élevé) forment un système linéaire (complet) de courbes planes. Or ce système a une propriété bien remarquable, d'où s'ensuit l'application des courbes adjointes à la théorie des séries linéaires. En effet*):

Les courbes adjointes à C d'un ordre quelconque donné découpent sur la courbe C une série linéaire complète; il faut entendre ici que tout groupe de la série est formé par les intersections de C avec une courbe adjointe en dehors des points multiples. Il s'ensuit (n° 9) qu'on obtient de même sur C une série complète, si l'on oblige les courbes adjointes à passer par des points fixés arbitrairement *sur* C, et l'on se borne à considérer les intersections qui tombent en dehors de ces points (et des points multiples).

A l'aide de la dernière observation on peut tout de suite *construire sur la courbe C, la série linéaire complète qui est définie par un groupe de points, ou par une série incomplète donnée.* Par le groupe G donné (qui dans le second cas sera un groupe quelconque de la série) on fait passer une courbe adjointe quelconque, ce qui est toujours possible si l'ordre de celle-ci est assez élevé. La courbe découpe sur C, en dehors des points multiples et du groupe G, un groupe de points G'. Conduisons par G' toutes les courbes adjointes de l'ordre choisi; celles-ci découperont sur C la série complète définie par G.

Il y a de l'arbitraire dans cette construction, car on dispose de l'ordre des courbes adjointes, et aussi de la courbe, parmi celles-ci, que l'on conduit d'abord par G; mais de quelque manière que l'on s'arrange, toujours on parviendra enfin à la même série. C'est précisément cette affirmation qui constitue le *Restsatz* de MM. Brill et Nöther**).

11.

Série caractéristique d'un système linéaire de courbes planes.

La propriété de couper sur une courbe plane donnée C une série complète n'appartient pas seulement aux systèmes de courbes adjointes,

*) Brill et Nöther, l. c. pag. 275; voir aussi Segre, *Introduzione* ... n° 77.

**) Le *Restsatz* provient donc de deux propositions bien distinctes, dont l'une appartient proprement à la *Géométrie sur la courbe*, et se rapporte aux opérations d'addition et de soustraction des séries (n° 9); tandis que l'autre proposition appartient à la *Géometrie du plan*, et exprime la propriété des systèmes de courbes adjointes que nous avons énoncée ci-dessus. On pourrait même remarquer que le *Restsatz* (comme il est énoncé par MM. Brill et Nöther) dit un peu moins que la réunion de nos deux propositions, car il se borne à affirmer que la série découpée par les courbes adjointes de la manière indiquée, ne dépend pas de celles-ci, tandis que nous affirmons en outre que la même série est complète; mais il faut d'ailleurs remarquer que cette dernière partie se déduit sur le champ de la première. Voir Brill et Nöther, l. c. pag. 273; Segre, *Introduzione* . . ., n° 78.

mais aussi à d'autres systèmes. Par exemple les courbes d'un ordre arbitraire, qui passent avec la multiplicité α par chaque point multiple d'ordre α de C, découpent elles-mêmes sur C une série complète; c'est là une propriété qui s'ensuit aisément de la propriété des courbes adjointes. Le cas le plus intéressant se présente si l'ordre des courbes que nous considérons, est l'ordre de C; en effet dans ce cas la série nommée n'est autre chose que la *série caractéristique* du système complet des courbes planes ayant l'ordre de C et les mêmes multiplicités dans les points multiples de celle-ci. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant qui va nous être utile*):

La série caractéristique d'un système linéaire complet de courbes planes est toujours complète.

12.

Surfaces sous-adjointes à une surface de l'espace ordinaire.

Nous allons voir maintenant comment les théorèmes qui précèdent peuvent s'étendre aux surfaces de l'espace ordinaire.

Soit F une telle surface ayant des singularités (courbes multiples et points multiples) quelconques. On peut toujours construire une surface Ψ d'un ordre assez élevé, qui remplit la condition de couper sur tout plan général une courbe adjointe à la section de F faite par le même plan. On précise, de cette manière, le comportement de la Ψ le long des courbes multiples de F; ainsi lorsqu'il s'agit de courbes multiples ordinaires, la Ψ va passer $\alpha - 1$ fois par toute courbe de F qui a la multiplicité α pour F. On ne dit rien au contraire sur le passage de Ψ par les points multiples *isolés* de F, dont la présence sur F ne s'ensuit pas (pour ainsi dire) de l'existence des courbes multiples; de sorte que si F possède, par exemple, un point multiple qui n'appartient à aucune courbe multiple, la Ψ ne passera pas, en général, par ce point. En vertu de ces explications, nous dirons que la Ψ est une surface *adjointe à F le long des courbes multiples*, ou, tout court, que la Ψ est *sous-adjointe* (*subaggiunta*) *à F***). Nous réservons le nom de surfaces *adjointes* à certaines surfaces, dont nous aurons à nous occuper plus tard, qui tout en satisfaisant aux conditions de la Ψ, vont encore passer convenablement par les points isolés de F. Pour le moment les surfaces sous-adjointes suffisent à notre but.

---

*) Brill et Nöther, l. c. pag. 308; Castelnuovo, *Ricerche generali sopra i sistemi lineari* . . . l. c. n° 18.

**) Enriques, *Introduzione* . . . n° 17; M. Nöther (*Zur Theorie* . . ., Math. Annalen 8, pag. 509) appelle *adjungirte Flächen* les surfaces que nous appelons *sous-adjointes*, et réserve le nom de *surfaces φ* aux surfaces d'ordre $n - 4$ qui, d'après cette Monographie, sont *adjointes à F*. Le développement de la théorie des surfaces a conseillé ce changement de locutions.

Les surfaces d'un ordre donné sous-adjointes à F forment un système linéaire, qui jouit d'une propriété analogue à celle des courbes adjointes. En effet*):

Les surfaces d'un ordre quelconque donné qui sont sous-adjointes à une surface, découpent sur celle-ci un système de courbes complet: la courbe générale du système est formée par l'intersection de la surface sous-adjointe avec F, en dehors des courbes multiples de F. Le théorème subsiste encore si l'on oblige les surfaces sous-adjointes à passer par des points ou des courbes assignées sur F, et l'on retranche ces courbes fixes des courbes du système (n° 9).

A l'aide de ces remarques on peut toujours construire sur F le système complet déterminé par une courbe donnée C, ou par un système linéaire incomplet. Il suffit en effet de conduire par la courbe C (qui dans le second cas sera choisie arbitrairement dans le système) une surface sous-adjointe Ψ d'un ordre assez élevé pour que la construction soit possible. La Ψ va découper en général sur F une nouvelle courbe C', en dehors de C et des courbes multiples de F; que l'on conduise maintenant par C' toutes les surfaces adjointes du même ordre de Ψ; celles-ci vont découper sur F un système linéaire complet auquel appartient la courbe C; c'est le système cherché, ou tout au plus, il en diffère seulement en cela, que le système cherché peut avoir quelques points-base en plus. Il suffit, dans ce dernier cas, d'imposer ces nouveaux points-base aux courbes du système que nous venons de construire, ou (ce qui revient au même) d'imposer aux surfaces Ψ des passages ou des contacts convenables avec F dans les mêmes points.

Le système complet auquel on parvient ne dépend ni de l'ordre des surfaces sous-adjointes Ψ que l'on emploie, ni de la surface, parmi les Ψ, qu'on conduit d'abord. Cette affirmation constitue le *Restsatz* pour les surfaces, d'après M. Nöther**).

Remarque. — Le théorème sur la série caractéristique d'un système linéaire de courbes planes peut s'étendre aussi aux systèmes linéaires de surfaces de l'espace ordinaire. Enonçons le résultat, bien qu'on n'ait pas dans la suite l'occasion d'y recourir:

Si un système linéaire de surfaces est entièrement déterminé par les courbes et les points-base, le système de courbes, qui est découpé sur une des surfaces par les autres surfaces du système, est complet.

---

*) Enriques, *Introduzione* . . . n° 35 (vraiment on y considère les surfaces adjointes, mais la chose est vraie aussi pour les surfaces sous-adjointes). Le même théorème s'ensuit aussi du *Restsatz* de M. Nöther dont nous allons parler tout à l'heure.

**) *Zur Theorie* . . ., Math. Annalen 8, pag. 509; il y aurait à répéter ici une remarque analogue à celle, que nous avons faite à propos des courbes planes.

Chapitre IV.

Système adjoint à un système donné.

Nous allons définir dans ce Chapitre une opération qui va jouer un rôle fondamental dans la théorie des systèmes linéaires situés sur une surface; c'est l'opération *d'adjonction*. Elle fournit le moyen de déduire de tout système linéaire donné, un nouveau système, *l'adjoint* au premier; et par la considération des liens qui passent entre ces deux systèmes, elle nous porte à établir les principaux invariants d'une surface par rapport aux transformations birationnelles.

Suivant notre méthode nous commençons par des considérations relatives aux séries linéaires sur les courbes.

13.

Série canonique sur une courbe.

Parmi les courbes adjointes à une courbe plane C d'ordre m, il faut considérer en particulier celles qui ont l'ordre $m-3$. Supposons qu'il existe de telles courbes, et désignons par $p(>0)$ le nombre de celles qui sont linéairement indépendantes. Alors les dites courbes découpent sur la C une série linéaire complète dont la dimension est $p-1$, et l'ordre est (d'après MM. Brill et Nöther*)) $2p-2$; c'est une g^{p-1}_{2p-2}. Or cette série jouit d'une propriété fondamentale. Si en effet on transforme birationnellement la courbe C en une autre courbe plane C' d'ordre m', la série g^{p-1}_{2p-2} de C se transforme dans la série qui est découpée à son tour sur C' par les courbes d'ordre $m'-3$ adjointes à C'. En d'autres termes *la série découpée sur une courbe plane d'ordre m par les courbes adjointes d'ordre* $m-3$ *jouit de la propriété d'invariance* (par rapport aux transformations birationnelles). Nous aurons souvent l'occasion de nommer cette série; nous la désignerons dans la suite par le nom de *série canonique* sur la courbe C (ou sur toute autre courbe de la même *classe*). On parlera donc aussi de la série canonique sur une courbe gauche; ce sera la série correspondante à celle découpée par les adjointes d'ordre $m-3$, sur une courbe plane d'ordre m en correspondance birationnelle avec la courbe donnée.

La dimension de la série canonique augmentée d'une unité, est aussi un invariant de la courbe considérée; c'est le *genre* p de la courbe, dont nous avons déjà rappelé la définition dans un cas particulier (n° 4).

*) *Ueber die algebraischen Functionen* . . . pag. 280; voir aussi Segre, *Introduzione* . . ., n° 73.

Le caractère p, en vertu de sa définition, ne saurait descendre au-dessous de zéro; il est nul si la courbe correspondante, supposée plane, d'ordre m, n'a pas de courbes adjointes d'ordre $m-3$. On sait bien d'ailleurs que la condition $p=0$ définit entièrement une *classe* de courbes; ce sont les *courbes rationnelles*.

Ce cas excepté, on connaît des propriétés de la série canonique qu'il convient de rappeler ici, car elles sont d'un usage continuel**). La série canonique est la seule série qui ait, sur une courbe de genre p, la dimension $p-1$ avec l'ordre $2p-2$. La même série n'a pas de points fixes qui soient communs à tous ses groupes. Par suite si l'on fixe un point quelconque de la courbe, on déduit de la série canonique g_{2p-2}^{p-1} une nouvelle série g_{2p-3}^{p-2}; celle-ci à son tour n'a pas *en général* de points fixes. Tout au plus, dans un cas particulier, elle peut avoir un point fixe; il arrive alors que tous les groupes de la série canonique qui contiennent un point fixe quelconque, contiennent en conséquence un second point fixe qui est déterminé par le premier; alors il existe sur la courbe une série g_2^1, telle que $p-1$ quelconques de ses groupes forment un groupe de la série canonique g_{2p-2}^{p-1}; c'est le cas des courbes *hyperelliptiques*.

Remarque. — De la série canonique on peut donner une définition analytique, bien connue, qui a l'avantage de s'étendre à la fois à toutes les courbes d'une même classe, qu'elles soient planes ou gauches: *les groupes de la série canonique sont les groupes des zéros des différentielles abéliennes de la première espèce, qui appartiennent à la courbe donnée.*

14.

Système adjoint à un système de courbes planes.

Revenons à la courbe plane C d'ordre m, et supposons maintenant qu'elle soit une courbe générale d'un système linéaire $|C|$ de courbes planes, système complet, c'est-à-dire déterminé entièrement par ses points-base. Ces points ont les mêmes ordres de multiplicité ($\geqq 1$) pour la C et pour les autres courbes du système; et tous les points multiples de la C tombent parmi eux. Il s'ensuit que les courbes adjointes à C, de l'ordre $m-3$, (et plus généralement d'un ordre quelconque) sont de même adjointes à toute autre courbe du système $|C|$. Nous dirons que ces courbes de l'ordre $m-3$ forment *le système* $|C'|$ *adjoint au système* $|C|$; on dit *adjoint*, tout court, sans désigner l'ordre des courbes C', car on n'a pas d'occasion de recourir à des systèmes adjoints d'ordre différent.

**) Brill et Nöther; Segre — l. c.

Le système (complet) $|C'|$, adjoint au système $|C|$, est lié avec celui-ci de telle sorte, que si une transformation birationnelle (ou de Cremona) de tout le plan change les systèmes $|C|$ et $|C'|$ en $|D|$ et $|D'|$ (d'un autre plan), *c'est encore* $|D'|$ *le système adjoint à* $|D|$, pourvu que l'on introduise convenablement en $|D'|$ les courbes exceptionnelles qui proviennent de la transformation*); dans bien de questions il n'est pas même nécessaire de faire attention à ce dernier avertissement. C'est pourquoi nous pouvons dire que *le lien qui passe entre un système linéaire de courbes planes et son système adjoint, est invariable par rapport aux transformations birationnelles du plan.*

Il vient de là que la considération d'un système de courbes planes avec les systèmes adjoints successifs (à savoir, l'adjoint $|C'|$ que nous venons de définir, l'adjoint de l'adjoint, ou second adjoint $|C''|$, etc.) peut rendre bien de services dans l'étude de la Géometrie du plan (ou des surfaces rationnelles), lorsque on prend comme groupe fondamental (dans le sens de M. Klein) le groupe des transformations de Cremona. C'est M. S. Kantor qui semble avoir aperçu, le premier, le profit que l'on pouvait tirer de cette méthode. En effet il a montré dans une Note des Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc. (1885) comment on peut aborder par cette voie le problème de la détermination des transformations planes *cycliques* de Cremona (transformations dont une puissance convenable donne l'identité); et il a continué cette recherche dans d'autres travaux plus récents**). Plus tard M. Castelnuovo a profité des systèmes adjoints pour étudier les systèmes linéaires des courbes planes***), et M. Enriques s'en est servi pour la détermination des groupes continus de transformations birationnelles du plan †).

La propriété d'invariance du système adjoint, que nous venons de rappeler, permet aussi de définir le système $|C'|$ adjoint à un système $|C|$ situé sur une surface rationnelle; il faudra en effet choisir $|C'|$ de telle sorte, que dans une représentation birationnelle quelconque de la surface sur le plan, $|C|$ et $|C'|$ correspondent à deux systèmes de courbes planes, dont le second soit l'adjoint au premier.

Or lorsque la surface rationnelle F est donnée par ses caractères projectifs (à savoir, une surface de l'espace ordinaire, d'un ordre n connu, etc.), on peut demander de construire directement sur F le système $|C'|$ adjoint

---

*) Nöther, *Rationale Ausführung der Operationen* . . . § 31, Math. Annalen 23, 1883; Castelnuovo, *Ricerche generali sopra i sistemi lineari* ... n° 27.

**) *Premiers fondements pour une théorie* . . ., 4me partie, Atti dell' Accad. d. Sc. fis. e mat. di Napoli, serie II, vol. 4°. Voir aussi «Journal für die Mathem. 114», et «Acta Mathem. 19».

***) *Ricerche generali sopra i sistemi lineari* . . ., l. c.

†) *Sui gruppi continui* . . ., Rendic. della R. Accad. d. Lincei, 1893.

à un système donné $|C|$, sans avoir recours à la représentation plane. Supposons, pour plus de simplicité, que $|C|$ soit le système ∞^3 des sections planes de F; existera-t-il un système de surfaces découpant sur F le système de courbes $|C'|$ adjoint à $|C|$? Certainement; on voit même*) que cette propriété appartient à certaines surfaces Φ de l'ordre $n-3$, qui rencontrent tout plan général dans les courbes d'ordre $n-3$ adjointes à la section plane correspondante de F.

Il résulte de là que ces surfaces adjointes Φ sont comprises parmi les surfaces Ψ du même ordre sous-adjointes à F. Or il y a lieu de se demander si les Φ coïncident avec les Ψ, ou bien s'il ne faut imposer aux Ψ de nouvelles conditions pour obtenir les Φ.

Dans certains cas on peut vérifier effectivement que les Φ et les Ψ sont la même chose. Ainsi cela arrive si la surface F n'a pas de *points multiples P isolés* ou *propres*, c'est-à-dire des points P tels que tout plan conduit par P coupe sur la F une courbe ayant le genre *inférieur* au genre de la section plane générale de F. La surface générale du troisième ordre, la surface du quatrième ordre ayant une droite double, ou une section conique double, nous donnent des exemples de telles surfaces. La même particularité (coïncidence des Φ avec les Ψ) peut du reste se présenter aussi dans d'autres cas plus étendus**).

Il ne faut penser pourtant qu'il en soit toujours ainsi. Au contraire, on démontre que les surfaces adjointes ont un point de l'ordre $i-2$ en tout point multiple (ordinaire) de l'ordre i de F; tandis que les surfaces sous-adjointes peuvent ne passer du tout par ce point, ou bien y passer avec un ordre inférieur. D'où il résulte que le système des surfaces adjointes Φ peut bien avoir une dimension inférieure que le système des surfaces sous-adjointes Ψ.

Vérifions cette remarque sur un exemple. Considérons à cet effet la surface F du quatrième ordre ayant un point triple P (point multiple *isolé*), et désignons par $|C|$ le système des sections planes de la F. On voit aisément que la F peut se représenter sur le plan, de manière qu'au système $|C|$ corresponde un système $|c|$ de courbes planes du quatrième ordre rencontrant une même cubique (image de P) en 12 points fixes. Or les surfaces Ψ d'ordre $4-3=1$ sous-adjointes à F, sont, d'après la définition, les plans de l'espace. Ceux-ci pourtant ne découpent pas sur F le système $|C'|$ adjoint à $|C|$; car $|C'|$ est découpé par les seuls plans Φ qui passent par le point P; on le voit tout de suite si l'on recourt à la représentation plane, où $|C'|$ est représenté par le système $|c'|$ des droites adjointes aux courbes $|c|$. Il s'ensuit donc que du

*) Enriques, *Ricerche di geometria* ... III, 5; *Introdusione* ... IV; Humbert, *Sur la théorie générale des surfaces unicursales*, Math. Annalen 45, 1894.

**) Voir à ce propos les Mémoires cités de MM. Enriques et Humbert.

système ∞^3 des Ψ *sous-adjointes* on déduit le système ∞^2 des Φ *adjointes*, en imposant aux Ψ la condition de passer par le point P.

Les considérations qui précèdent regardent le cas des points multiples ordinaires. Mais dès qu'il s'agit de singularités supérieures, le comportement des surfaces adjointes ne peut plus se définir d'une manière si simple, bien qu'on puisse recourir toujours à la représentation de la surface sur le plan.

Ce dernier moyen va pourtant faire défaut, lorsqu'on passe des surfaces rationnelles aux surfaces irrationnelles. En effet, même pour celles-ci, on peut définir un système de surfaces *adjointes* Φ, comprises parmi les sous-adjointes Ψ, et telles que les Φ découpent sur la surface un système *adjoint* au système des sections planes, jouissant de propriétés analogues à celles que nous venons de voir au sujet des surfaces rationnelles. Le comportement des Φ en un point multiple isolé ordinaire de la nouvelle surface pourra s'établir par la même loi que nous avons exposée dans le cas des surfaces rationnelles; mais les points multiples singuliers présentent ici une difficulté encore plus grande; car on ne peut plus recourir à la représentation sur le plan.

On voit d'après cela l'opportunité d'établir une nouvelle définition du système adjoint, définition qui s'étende à toutes les surfaces algébriques, sans faire attention à leurs caractères projectifs (ordre, singularités, etc.), et qui permette, en conséquence, d'approfondir l'étude du lien (invariable par rapport aux transformations birationnelles) qui passe entre un système de courbes et son adjoint. Pour atteindre ce but il convient d'abord d'examiner les propriétés du système adjoint, dans le cas où nous avons tout-à-fait défini ce système, c'est-à-dire sur le plan. Nous chercherons ensuite d'étendre nos conclusions aux systèmes situés sur une surface quelconque.

15.

Sur quelques propriétés caractéristiques du système adjoint.

Reprenons donc un système linéaire $|C|$ de courbes planes d'ordre m et genre π, et le système adjoint $|C'|$ dont les courbes ont l'ordre $m-3$; et tâchons d'établir le lien qui passe entre $|C|$ et $|C'|$, sans faire attention aux caractères projectifs des deux systèmes.

Nous remarquons d'abord que $|C'|$ *découpe la série canonique* $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$ *sur toute courbe générale de* $|C|$.

Cette propriété pourtant ne suffit pas toujours à définir le système $|C'|$. Pour le voir, on n'a qu'à reprendre le système ∞^3 de courbes du quatrième ordre qui passent par 12 points d'une cubique, système qui représente sur le plan la surface du quatrième ordre ayant un

point triple; en effet le système lui-même a la propriété de découper sur chacune de ses courbes la série canonique g_4^2, tandis que le système adjoint (∞^2) est formé par les droites du plan.

Malgré cela il nous convient de considérer le plus ample système $|C_1|$ découpant la série canonique sur la courbe générale de $|C|$; on démontre que ce système $|C_1|$ est unique et comprend (à des courbes fixes près) toute courbe qui rencontre les C en de groupes canoniques. $|C_1|$ ne sera pas toujours le système adjoint à $|C|$; nous l'appelons *système sous-adjoint à* $|C|$, car on voit aisément que sur une surface rationnelle F, dont les sections planes sont représentées par ∞^3 courbes de $|C|$, le système $|C_1|$ est découpé par les surfaces sous-adjointes à F (surfaces de l'ordre $M-3$, si M est l'ordre de F*)).

Le système sous-adjoint $|C_1|$ contient toujours le système adjoint $|C'|$ (et peut même parfois coïncider avec celui-ci). Il s'agit maintenant d'examiner par quelles conditions on peut déduire le système adjoint du système sous-adjoint. Si nous reprenons encore une fois la surface rationnelle F que nous venons de considérer, nous voyons sur le champ que la question proposée ne diffère pas de celle que nous avons rencontrée ci-dessus: établir les conditions qu'il faut imposer à une surface sous-adjointe Ψ, pour qu'elle devienne une surface adjointe Φ. Ces conditions dépendaient de l'existence sur F de certains points multiples *isolés* (ou *propres*), qui n'ont pas d'effet sur les surfaces sous-adjointes. Or remarquons qu'un point multiple isolé de F est représenté sur le plan par une *courbe fondamentale* γ du système $|C|$, courbe qui n'est pas rencontrée en de points variables par les C; c'est de plus une courbe fondamentale que nous dirons *propre*, en faisant attention à la propriété que le système résiduel $|C-\gamma|$ a le genre inférieur au genre de $|C|$ (en relation avec le fait que le point multiple P est *isolé*). On a donc à rechercher sur le plan quelles sont les conditions qu'une courbe fondamentale propre du système $|C|$ impose aux courbes adjointes. Mais cette recherche (ainsi que son analogue sur les surfaces adjointes) ne manque pas de présenter parfois de sérieuses difficultés.

Voici comment on réussit, par une voie indirecte, à les éviter. Mettons en relation notre système $|C|$ avec un autre système linéaire quelconque $|D|$ de courbes du même plan. Envisageons encore le système $|C+D|$ somme de $|C|$ et $|D|$, et le système $|(C+D)'|$ adjoint a celui-là. La courbe générale du système $|C+D|$ a l'ordre $m+n$ (si m et n sont les ordres de C et D), et a l'ordre de multiplicité $\mu+\nu$ en tout point qui est *base* d'ordre μ et ν pour $|C|$ et $|D|$.

*) Par exemple, sur la surface du quatrième ordre ayant un point triple, le système sous-adjoint au système des sections planes, est ce même système.

Par suite la courbe générale du système $|(C+D)'|$ a l'ordre $m+n-3$ et la multiplicité $\mu+\nu-1$ dans le point nommé. Or si nous comparons ce système $|(C+D)'|$ avec le système $|C'+D)|$ somme de $|C'|$ et de $|D|$, nous voyons que les deux systèmes sont formés de courbes du même ordre $(m-3)+n$, qui ont la même multiplicité $(\mu-1)+\nu$ en tout point qui est *base* ($\mu \geqq 1$) pour $|C|$. Mais une distinction entre les deux systèmes se présente en tout point (s'il en existe), qui est base pour $|D|$, mais pas pour $|C|$ ($\mu = 0$, $\nu > 0$); car un tel point a l'ordre $\mu+\nu-1$ pour le système $|(C+D)'|$, et l'ordre $\mu+\nu$ pour le système $|C'+D|$. D'après cela nous pouvons énoncer le résultat suivant:

Si $|C|$ *et* $|D|$ *sont deux systèmes de courbes planes, le système* $|(C+D)'|$ *adjoint à leur somme contient le système* $|C'+D|$; *et précisément si l'on veut déduire* $|C'+D|$ *de* $|(C+D)'|$, *il faut augmenter d'une unité l'ordre de tout point qui est base pour* $|D|$, *mais ne l'est pas pour* $|C|$.

Or il y a lieu de se demander: cette propriété subsiste-t-elle aussi pour les systèmes sous-adjointes? Pas toujours. Et alors, est-ce qu'on ne pourra se servir de la même propriété pour séparer le système adjoint du système sous-adjoint qui le contient?

Il en est précisément ainsi. Partons d'un système $|C|$ quelconque, et choisissons un système auxiliaire $|D|$ qui n'ait pas de courbes fondamentales propres; (cela est possible d'une infinité de manières). Maintenant que l'on choisisse parmi les courbes du système $|C_1|$ sous-adjoint à $|C|$, celles C' qui, additionnées à une courbe D quelconque, donnent des courbes sous-adjointes à $|C+D|$; on peut démontrer que ces courbes C' forment un système linéaire qui ne dépend pas de $|D|$; $|C'|$ *est le système adjoint à* $|C|$. On peut tirer de cette remarque une nouvelle définition du système adjoint à un système donné de courbes planes. Or, et c'est là un résultat fort intéressant, cette définition peut se transporter aux systèmes linéaires situés sur une surface algébrique *quelconque*. On parvient ainsi à l'énoncé suivant, dont le lecteur trouvera ailleurs la démonstration*).

16.

Système adjoint à un système linéaire donné sur une surface algébrique.

Lorsqu'on connaît sur une surface algébrique un système linéaire irréductible $|C|$, *on peut construire un second système* $|C'|$, *appelé système adjoint à* $|C|$, *qui est tout-à-fait défini par les propriétés suivantes:*

---

*) A la définition du système adjoint ici rapportée, est consacré le Chap. III de la *Introdusione* . . . de M. Enriques.

1) *les courbes de* $|C'|$ *découpent des groupes de la série canonique sur toute courbe générale de* $|C|$;

2) *quel que soit le système* $|D|$, *le système* $|C'+D|$ *découpe des groupes de la série canonique sur toute courbe générale de* $|C+D|$ (*supposée irréductible*). *Ces groupes toutefois contiennent* i *points réunis dans chaque point qui a l'ordre* i *pour* $|D|$, *et n'est pas base pour* $|C|$.

Il faut bien remarquer que la série $g_{2\pi-2}$ découpée par le système adjoint $|C'|$ sur la courbe C générale (supposée de genre π), n'est pas nécessairement complète; sur quelques surfaces (au contraire de ce qui arrive sur le plan et sur les surfaces rationnelles) la dite série peut bien avoir une dimension inférieure à $\pi - 1$. Elle peut même faire défaut, avec le système adjoint lui-même (en dehors du cas évident $\pi = 0$). Ainsi l'on démontre*) qu'il n'y a pas de système adjoint au système linéaire des sections planes d'une surface réglée de genre π quelconque.

Il convient souvent d'énoncer, sous forme de théorème, la définition que nous venons de donner du système adjoint, ou du moins la partie essentielle de la même définition. On parvient ainsi à la *propriété fondamentale du système adjoint:*

Soient $|C|$ *et* $|D|$ *deux systèmes linéaires de courbes sur une même surface; le système* $|C'|$ *adjoint au premier, additionné avec le second, donne un système* $|C'+D|$ *qui est contenu dans le système* $|(C+D)'|$ *adjoint à* $|C+D|$; *il en diffère seulement en cela, qu'il peut exister des points en chacun desquels l'ordre de multiplicité de* $|C'+D|$ *est supérieur à l'ordre correspondant de* $|(C+D)'|$. Ce sont précisément les points qui sont base, d'ordre ν par exemple, pour $|D|$, tandis qu'il ne sont pas base pour $|C|$; en effet dans chacun de ces points $|C'+D|$ a l'ordre de multiplicité ν, tandis que $|(C+D)'|$ a l'ordre de multiplicité $\nu - 1$. Si en particulier ces points font défaut, de sorte que tout point-base de $|D|$ est aussi point-base de $|C|$, on a

$$|C'+D| = |(C+D)'|.$$

D'après le théorème qui précède, on peut, par une simple addition, construire le système $|(C+D)'|$ adjoint à $|C+D|$, dès qu'on connaît le système $|C'|$ adjoint à $|C|$. Inversement pour déduire le système adjoint à $|C|$ du système adjoint à $|C+D|$, on n'a qu'à retrancher le système $|D|$ du dernier système adjoint. De ces observations il résulte aisément que, dès qu'on connaît le système $|C'|$ adjoint à un système particulier $|C|$ sur une surface, on peut construire le système adjoint à un système arbitrairement donné sur la surface, à l'aide de simples opérations d'addition et de soustraction (avec des impositions ou suppressions de points multiples, s'il est nécessaire).

*) Enriques, *Introduzione* . . ., 30.

Remarque. — La définition qui précède, comme on l'a vu, n'établit pas d'une manière directe les caractères de l'opération d'*adjonction*, par laquelle on passe d'un système donné $|C|$ au système adjoint $|C'|$. Au contraire on définit cette opération par son comportement en relation avec une autre opération connue d'avance (l'addition). Ce comportement est représenté par la relation

$$|(C + D)'| = |C' + D|$$

qui subsiste toujours, à des multiplicités dans certains points près. Or dans l'Analyse on a souvent l'occasion de recourir à de telles définitions; toutes les fois qu'on définit une fonction, non pas directement, mais à l'aide d'une *équation fonctionnelle.* Ce rapprochement avec des théories connues peut servir à mettre en lumière la voie que nous venons de suivre.

17.

Définition directe du système adjoint.

Dans les cas les plus simples, on peut donner une définition directe du système adjoint à un système donné, définition qui s'ensuit de celle qui précède. Bornons-nous à l'énoncé suivant:

Soit $|C|$ *un système qui ne possède pas de courbes fondamentales propres* (c'est-à-dire des courbes γ qui ne sont pas rencontrées en de points variables par les C, et telles que $|C - \gamma|$ a le genre inférieur au genre de $|C|$); *alors, en général, toute courbe qui découpe un groupe de la série canonique sur les courbes* C, *appartient au système adjoint à* $|C|$. Les mots *en général* se rapportent aux observations suivantes.

Pour démontrer le théorème on suppose d'abord que les courbes C, qui passent par un point quelconque de la surface, ne vont passer en conséquence par d'autres points mobiles avec celui-ci. On rencontre ensuite une seconde restriction; elle se rapporte au cas où la surface appartenant à la *classe* des surfaces réglées, les courbes C découperaient en un point les génératrices. Tandis que la première restriction est peut-être superflue, la seconde est certainement nécessaire. En effet le système $|C|$ des sections planes d'une surface réglée n'a pas de système adjoint, mais il y a bien des courbes qui découpent sur les C des groupes de la série canonique.

En revenant à la définition directe du système adjoint, il y aurait maintenant à considérer le cas d'un système $|C|$ doué de courbes fondamentales propres. Pour ne fatiguer le lecteur nous n'insisterons pas sur ce sujet; on pourra consulter pour ces développements le n° 29 de la *Introduzione* . . . de M. Enriques.

18.

Surfaces adjointes à une surface donnée.

La définition du système adjoint à un système donné (n° 16) vient d'être énoncée sous une forme qui ne subit aucun changement, lorsqu'on transforme birationnellement la surface considérée; un système $|C|$ et son adjoint $|C'|$ se transforment en deux systèmes $|D|$ et $|D'|$ dont le second est encore l'adjoint au premier (à des courbes *exceptionnelles* près). C'est pourquoi cette définition se prête mieux que toute autre dans les recherches des propriétés d'invariance d'une surface algébrique; nous allons le voir bientôt.

Mais d'abord il nous convient de faire quelques remarques au point de vue projectif.

Soit $|C|$ le système des sections planes d'une surface F d'ordre n de l'espace ordinaire; et soit $|C'|$ le système adjoint à $|C|$. Alors on peut construire un système linéaire de surfaces Φ d'ordre $n-3$, sous-adjointes à F, qui découpent sur F (en dehors des courbes multiples de F) les courbes de $|C'|$. Ces surfaces Φ sont tout-à-fait déterminées par les courbes C'; on les appelle *surfaces adjointes à* F, de l'ordre $n-3$; nous en avons déjà parlé dans le cas où F était une surface rationnelle, et nous avons dit alors que cette définition pourrait s'étendre aux surfaces générales.

Sans insister nouvellement sur le même sujet, bornons-nous à remarquer que les considérations précédentes fournissent une définition indirecte des surfaces Φ, à l'aide du système $|C'|$ que celles-ci découpent sur F. Il résulte de la définition que les Φ sont comprises parmi les surfaces sous-adjointes Ψ du même ordre $n-3$, et qu'elles en diffèrent seulement par leur comportement dans les points multiples isolés de la F. De sorte que si la F ne possède de tels points, les surfaces adjointes coïncident avec les sous-adjointes; elles sont alors tout-à-fait déterminées par la condition de découper sur tout plan général des courbes adjointes à la section correspondante de F. C'est ce qui arrive par exemple si la F est une surface générale de l'ordre n, ou si elle possède une courbe double et un nombre fini de points d'ordre $k = 3, 4, \ldots$ satisfaisant à la condition d'avoir l'ordre $\frac{k(k-1)}{2}$ pour la courbe double.

Si au contraire la F possède des points multiples *isolés ordinaires*, de l'ordre k, on démontre que les Φ passent avec l'ordre $k-2$ par chacun d'eux. De sorte que l'on peut énoncer le résultat suivant:

Si une surface F n'a d'autres singularités que des courbes multiples ordinaires de l'ordre $h = 2, 3 \ldots$, et des points multiples ordinaires de l'ordre $k = 2, 3 \ldots$, les surfaces adjointes sont tout-à-fait déterminées par les conditions de passer $h-1$ fois par ces courbes et $k-2$ fois

par ces points. En particulier un point double, isolé, ordinaire, ne présente aucune condition aux surfaces adjointes.

L'énoncé qui précède nous donne une définition directe des surfaces adjointes à une surface douée de singularités ordinaires. On pourrait chercher d'étendre cette définition aux surfaces ayant des points multiples singuliers; mais on rencontre quelques difficultés si l'on veut comprendre, par un même énoncé, tous les cas que ces points peuvent présenter. C'est pourquoi nous avons suivi à ce propos une voie indirecte, en définissant les surfaces Φ adjointes à F à l'aide du système $|C'|$, qu'elles découpent sur F. Mais on aurait pu aborder le problème du comportement des surfaces Φ en un point singulier en s'appuyant sur des considérations analytiques, comme M. Nöther a montré*). Cette dernière voie (qui au point de vue historique précède la nôtre) permettrait alors de définir le système adjoint $|C'|$ à l'aide des Φ, tandis que nous avons suivi le chemin inverse.

Remarque. — Ainsi que nous l'avons fait sur le plan, de même l'on pourrait définir sur une surface quelconque les courbes C_1 *sous-adjointes* à un système $|C|$, par l'unique condition de découper sur toute courbe C des groupes de la série canonique. Ces courbes forment un système linéaire $|C_1|$ (*sous-adjoint* à $|C|$), avec une seule exception relative aux surfaces réglées. Le système $|C_1|$ contient le système adjoint $|C'|$.

Si $|C|$ est le système des sections planes d'une surface F de l'ordre n de l'espace ordinaire, on démontre que $|C_1|$ est découpé par les surfaces d'ordre $n-3$ sous-adjointes à F; le cas excepté où F est une surface réglée de genre $\pi > 0$, car alors il y a des C_1 composées de $2\pi - 2$ génératrices, mais il n'existe aucune surface de l'ordre $n-3$ sous-adjointe à F, qui rencontre F dans ces génératrices seulement (en dehors des courbes multiples).

Du reste, nous n'aurons pas à considérer, dans la suite, le système sous-adjoint.

19.

Surfaces adjointes d'autres ordres.

Lorsqu'on a défini, par les moyens qu'on vient de voir, les surfaces Φ d'ordre $n-3$ adjointes à F, on peut aussi construire des *surfaces adjointes d'ordre* $n-3+i\ (i \gtreqless 0)$, c'est-à-dire des surfaces qui ont

*) *Zur Theorie* . . . Math. Annalen 8, pag. 510; voir aussi une Note du même auteur dans les Götting. Nachrichten (1871), et le Mémoire *Ueber die totalen algebraischen Differentialausdrücke*, Math. Annalen 29. M. Nöther s'occupe en particulier des surfaces adjointes de l'ordre $n-4$ (φ-*Flächen*), que nous allons étudier ensuite. Voir aussi (pour des surfaces particulières) le Mémoire cité de M. Humbert, et l'autre Mémoire du même auteur *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques*, Journal de Mathém. 4e s., t. IX, pag. 394, 1893.

cet ordre, et qui se comportent comme les Φ le long des courbes multiples et dans les points multiples de F. Les nouvelles surfaces sont aussi déterminées par la condition de découper sur F les courbes du système $|C' + iC|$, où $|C|$ est le système des sections planes de F, et $|C'|$ est le système adjoint à celui-ci. Or d'après le théorème fondamental sur le système adjoint, $|C' + iC|$ n'est autre chose que le système adjoint au système $|(i+1)C|$, multiple de $|C|$. On a dans cette remarque un moyen pour définir le système $|C' + iC|$ (et par suite les surfaces adjointes d'ordre $n - 3 + i$ qui le découpent) toutes les fois que $|C'|$ fait défaut; car même alors le système $|(i+1)C|$ peut bien avoir un système adjoint; et il l'a certainement (on le démontre) lorsque i surpasse une certaine valeur.

Nous allons rencontrer dans la suite ces systèmes $|C' + iC|$; il nous faudra alors récourir à la remarque, que nous faisons dès maintenant. Nous avons déjà remarqué (n° 17) que le système $|C'|$ adjoint à un système $|C|$ de genre π, découpe sur la courbe C générale une série $g_{2\pi-2}$, qui est contenue dans la série canonique $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$, mais qui peut bien être incomplète et avoir par conséquent un certain *défaut;* elle peut même manquer (l'exemple des surfaces réglées nous l'a prouvé), et dans ce cas le défaut atteint son *maximum* π. De même la série que le système $|C' + iC|$ $(i > 0)$ découpe sur $|C|$ est une série $g_{2\pi-2+in}$ (où n désigne le degré de $|C|$); si elle était complète, sa dimension serait $\pi - 2 + in$; mais il peut se faire qu'elle aussi soit incomplète, et alors on aura à considérer son défaut. Or, et c'est là la remarque que nous nous proposions de faire, la considération de ce défaut n'a lieu que pour les premières valeurs de i; car *on peut toujours fixer une telle limite l, que pour les valeurs de $i > l$ la série découpée par $|C' + iC|$ sur C résulte complète.*

20.

Surfaces adjointes à une courbe gauche.

Dans le n° 18 nous avons appris à construire des surfaces qui découpent sur une surface donnée F d'ordre n le système adjoint aux sections planes de celle-ci. De même, à l'aide du théorème fondamental, on peut construire des surfaces qui découpent sur F le système adjoint à un système de courbes $|C|$ *quelconque* donné sur F. A cet effet on fait passer d'abord par la courbe C générale une surface G d'un ordre m assez élevé pour que cette construction soit possible. Appelons K la courbe intersection résiduelle de la surface G avec F; on aura alors $|K + C| = |mC|$. Or le système $|C' + (m-1)C|$ adjoint à celui-ci est découpé sur F par les surfaces d'ordre

$$n - 3 + (m - 1) = m + n - 4$$

djointes à F (n° 19). Donc, d'après le théorème fondamental:

Si nous imposons à ces surfaces adjointes d'ordre $m + n - 4$ la ndition de passer par la courbe K, et d'avoir avec F un contact d'ordre $- 1$ dans tout point-base d'ordre i pour le système $|C|$, nous allons écouper sur F le système adjoint à $|C|$.

Le théorème qu'on vient d'énoncer, nous fournit tout d'abord le ıoyen de découper sur une courbe gauche C, intersection partiale de eux surfaces F et G ayant les ordres n, m, la série canonique, ou lu moins une partie de cette série. Nous voyons qu'il faut construire ce but les surfaces d'ordre $m + n - 4$, qui passent par l'intersection ésiduelle K de F et G, et se comportent d'une manière convenable ans les points multiples de ces surfaces. Or c'est là précisément un ıéorème de M. Nöther sur les surfaces *adjointes* à une courbe auche*).

Mais il résulte encore du théoreme qui précède, que toute courbe djointe à $|C|$ sur la surface F peut être découpée par les dites surfaces djointes, ce qui permet, pour ainsi dire, l'inversion du théorème de f. Nöther, autant qu'elle est possible.

Chapitre V.

Invariants d'une surface par rapport aux transformations birationnelles.

En nous appuyant sur les résultats qui précèdent nous sommes intenant en mesure d'aborder la question fondamentale de notre ›rie; à savoir, la recherche de quelques invariants d'une surface rapport aux transformations birationnelles; invariants qui peuvent des nombres ou des variétés géométriques (courbes ou systèmes de bes).

A cette recherche il convient cependant de faire précéder quelques rques d'un caractère général.

\ la notion des invariants on est parvenu tout d'abord en con- ut les expressions transcendantes liées à la surface (Clebsch, er 1868—69; Picard 1884). Ensuite on s'est proposé de définir ımes invariants par la voie géométrique (ou algébrique). Les res qui ont abordé cette question (Cayley, Nöther, Zeuthen), ient de la manière suivante. On considérait une surface F de ordinaire, et on faisait attention à ses caractères projectifs (ordre, et points multiples). On transformait ensuite birationnellement

*) *ur Theorie*... pag. 510, Math. Annalen 8; voir aussi le Mémoire, *Ueber ıischen Raumcurven*, Denkschriften der Berliner Akad. 1882, pag. 12.

la F en une autre surface F' du même espace, et en comparant les caractères projectifs de F aux caractères analogues de F', on formait des expressions numériques ou des fonctions, qui n'étaient pas modifiées par la transformation.

Nous allons maintenant remplacer cette méthode par une autre qui présente sur celle-là quelque avantage, bien qu'elle n'en diffère pas d'une manière essentielle; elle nous permet pourtant de faire abstraction des caractères projectifs des surfaces, et d'éviter par là les difficultés qui proviennent des points singuliers et de leur comportement dans les transformations.

A cet effet reprenons la surface générale d'une *classe* donnée (n° 3), surface dont les caractères projectifs n'ont pour nous aucun intérêt, et partons d'un système linéaire de courbes $|C|$ de la surface. De $|C|$ nous pouvons déduire, par quelque opération, de nouveaux systèmes qui sont liés avec $|C|$; tels sont, par exemple, le système adjoint $|C'|$, l'adjoint $|C''|$ de $|C'|$, etc. Que l'on cherche maintenant des rélations entre ces systèmes, ou entre leurs caractères (genre, dimension, degré); si l'on parvient à une rélation qui ne dépend pas du système $|C|$ d'où l'on part, on aura là un *invariant de la surface.*

Les exemples que nous allons donner, montreront la fécondité de cette méthode.

21.

Système canonique.

L'exemple le plus important nous est fourni par l'application immédiate du théorème fondamental sur le système adjoint.

Ce théorème en effet nous dit, que si $|C|$ et $|D|$ sont deux systèmes de courbes sur la surface, on parvient au système $|(C+D)'|$ adjoint à $|C+D|$ de deux manières différentes: on peut additionner à $|D|$ le système $|C'|$ adjoint à $|C|$, mais on peut de même additionner à $|C|$ le système $|D'|$ adjoint à $|D|$. On a donc l'égalité symbolique*)

$$|C' + D| = |C + D'|,$$

d'où l'on déduit

$$|C' - C| = |D' - D|.$$

Cette rélation a une signification géométrique seulement dans le cas où $|C'|$ contient $|C|$, car elle nous dit alors que $|D'|$ aussi contient $|D|$, et en outre que le système $|K| = |C' - C|$ résiduel de $|C|$ par

*) Au sujet des ordres de multiplicité des points-base qui appartiennent aux deux systèmes considérés dans cette rélation, il y aurait une observation à faire, car ces ordres peuvent différer d'une unité; qu'il nous soit permis de l'omettre, attendu qu'ici nous nous proposons seulement d'esquisser la démonstration. Voir la démonstration complète dans le n° 38 de l'*Introduzione* . . . de M. Enriques.

rapport à $|C'|$, est de même le résiduel de tout autre système $|D|$ par rapport à son adjoint $|D'|$. En conclusion:

Le résiduel $|K|$ d'un système linéaire $|C|$ par rapport à son système adjoint, ne dépend pas du système $|C|$ d'où l'on part.

En d'autres termes, $|K|$ est un système de courbes qui dépend seulement de la surface considérée, ou plus précisément de la *classe* de surfaces à laquelle celle-là appartient; c'est donc un *invariant* de la dite surface. Nous l'appellerons *système canonique* (et courbe canonique chacune de ses courbes), car, ainsi que nous allons le voir, il a la plus grande analogie avec la série canonique définie sur les courbes.

La dimension du système canonique $|K|$ est aussi un *caractère invariable* de la surface. Cette dimension augmentée d'une unité s'appelle *premier genre* de la surface (*Flächengeschlecht* d'après M. Nöther)*); il convient d'ajouter *genre géométrique*, pour le distinguer du genre numérique que nous allons introduire bientôt; on le désigne par p_g.

Si $p_g = 0$, il n'y a pas de système canonique; en d'autres termes, il n'y a sur la surface aucun système $|C|$, qui soit contenu dans son adjoint $|C'|$. C'est ce qui arrive, par exemple, sur les surfaces rationnelles, sur les surfaces réglées, ou plus généralement sur toute surface contenant un système $|C|$ de courbes dont la série caractéristique est non-spéciale.

Si $p_g = 1$, la courbe générale d'un système quelconque $|C|$ appartient à *une seule* courbe du système adjoint $|C'|$. Le reste $C' - C$, s'il y en a, fournit (à des courbes exceptionnelles près) la seule courbe canonique. Mais dans certains cas il peut se faire que $|C|$ coïncide avec $|C'|$; alors il n'y a pas de reste, et la courbe canonique a, pour ainsi dire, l'ordre zéro.

Si $p_g \geqq 1$, le système canonique $|K|$ peut se construire à l'aide d'un seul système de courbes $|C|$ de la surface, et du système adjoint $|C'|$; cela résulte de la définition. En rappelant les propriétés du système adjoint, on trouve, pour les courbes canoniques, la propriété suivante:

Toute courbe canonique découpe sur la courbe générale C d'un système quelconque $|C|$ un groupe de points, qui joint aux points-base de $|C|$ et à un groupe de la série caractéristique de $|C|$, fournit un groupe de la série canonique de C.

La propriété énoncée est caractéristique pour les courbes canoniques; il suffit même, pour définir ces courbes, qu'elle soit vérifiée par rapport à un seul système $|C|$, pourvu que ce système satisfasse aux restrictions dont on parle au n° 17.

---

*) *Zur Theorie* . . . pag. 520, ibid.

22.

Construction du système canonique à l'aide des surfaces adjointes de l'ordre $n-4$.

Lorsqu'une surface F est donnée par ses caractères projectifs dans l'espace ordinaire, et l'on désigne par n son ordre, il convient, dans la construction du système canonique $|K|$, de recourir au système $|C|$ des sections planes de F. On a à retrancher le système $|C|$ du système adjoint $|C'|$, qui est découpé sur F par les surfaces adjointes d'ordre $n-3$. Le système résiduel sera naturellement déterminé par les surfaces adjointes d'ordre $n-4$. On a donc ce résultat:

*Sur une surface d'ordre n de l'espace ordinaire le système canonique est découpé par les surfaces adjointes de l'ordre $n-4$**). Le nombre de telles surfaces qui sont linéairement indépendantes, fournit donc le genre p_g de F. Ici, comme d'ordinaire, on envisage l'intersection d'une surface adjointe avec F, en dehors des courbes multiples de F. Mais dans cette intersection on peut trouver parfois des courbes qui appartiennent à toutes les surfaces adjointes d'ordre $n-4$, et qu'on ne doit pas regarder comme des courbes canoniques. On démontre en effet que si une courbe γ de F est *exceptionnelle*, c'est-à-dire, si elle correspond, par une transformation birationnelle, à un point P' d'une surface F' (n° 2), cette courbe γ appartient à toutes les surfaces d'ordre $n-4$ adjointes à F.

Or au sujet des courbes exceptionnelles γ de F, il y a une distinction à faire. En effet le point P' de F', qui correspond à la courbe γ, n'appartient pas, en général, à toutes les courbes canoniques de F (n'est pas point-base du système canonique sur F'), et dans ce cas la courbe exceptionnelle γ, que nous dirons de la *première espèce*, ne doit pas être regardée comme faisant partie des courbes canoniques de F; par suite il faut retrancher la γ de l'intersection de F avec une surface adjointe générale de l'ordre $n-4$, pour obtenir une courbe canonique. On remarquera encore qu'une courbe exceptionnelle de la première espèce n'a aucune intersection variable avec les courbes canoniques**).

Mais il peut arriver au contraire, dans quelques cas particuliers, que P' soit un point-base du système canonique sur F'; alors la courbe exceptionnelle γ correspondante sur F, courbe exceptionnelle de la *seconde espèce*, jouit de la propriété d'invariance, et doit être regardée comme faisant partie de toutes les courbes canoniques. Les courbes

---

*) Nöther, *Zur Theorie* ... pag. 514, ibid.

**) Pour avoir un exemple d'une telle courbe exceptionnelle il suffit de considérer la droite qui joint deux points triples d'une surface du cinquième ordre; ici les surfaces adjointes de l'ordre $5-4=1$ sont les plans conduits par cette droite.

résiduelles variables découpent à present γ en de points variables (un au moins).

Voici comment on peut obtenir un exemple d'une courbe exceptionnelle de la seconde espèce. Qu'on envisage une surface du cinquième ordre ayant deux contacts avec elle-même (*points tacnodals*)*); chacun de ces points impose une condition aux surfaces adjointes, de sorte que les surfaces adjointes de l'ordre $5 - 4 = 1$ sont les plans passant par ces points. Les courbes canoniques sont donc des courbes du cinquième ordre (genre 2), qui ont un point-base P' (en dehors des points singuliers) dans l'intersection ultérieure de la surface avec la droite joignant les deux points singuliers. Toute transformation birationnelle de la surface qui change le point P' en une courbe γ, donne lieu à une courbe exceptionnelle de la seconde espèce.

En laissant de côté l'exemple pour revenir à la remarque qui précède, on peut maintenant préciser l'énoncé du dernier théorème:

Les surfaces d'ordre $n - 4$ adjointes à une surface de l'ordre n découpent sur celle-ci le système canonique, en dehors des courbes multiples et des courbes exceptionnelles de la première espèce.

La considération des surfaces adjointes de l'ordre $n - 4$ pourrait même servir à définir le système canonique. C'est précisément la voie que Clebsch a indiquée, et que M. Nöther a suivie dans le Mémoire cité. Ce savant a dû, naturellement, surmonter la difficulté de démontrer le caractère d'invariance du système qu'il venait à construire ainsi. Nous avons évité cette difficulté en définissant le système canonique à l'aide de la propriété fondamentale du système adjoint, laquelle peut même remplacer la propriété d'invariance du système canonique, pour les surfaces ($p_g = 0$) qui ne possèdent pas un tel système.

La construction du système canonique à l'aide des surfaces adjointes de l'ordre $n - 4$, montre que ce système a la plus grande analogie avec la série canonique découpée sur une courbe plane de l'ordre n par les courbes adjointes de l'ordre $n - 3$; on voit ainsi la raison du nom que nous avons attribué à ce système.

23.

Système canonique réductible.

Le système canonique appartenant à une surface donnée peut être réductible, soit par la présence de quelque courbe fixe commune à

*) Si 1 et 2 (points fondamentaux du système des coordonnées) sont les deux points singuliers, l'équation de la surface est de la forme

$$ax_2^3x_3^2 + bx_2^3x_1^2 + x_1^2x_2^2f_1 + x_1x_2(x_1g_2 + x_2h_2 + i_3) + x_1j_4 + x_2k_4 + l_5 = 0$$

où a et b sont des constantes, et $f_1, g_2 \ldots l_5$ sont des formes algébriques dans les variables x_3, x_4 ayant les degrés $1, 2 \ldots 5$.

toute courbe canonique, soit par la division de la courbe canonique générale en plusieurs courbes variables dans un faisceau (n° 7).

Le premier cas se présente, nous le savons, toutes les fois qu'il y a sur la surface quelque courbe exceptionnelle de la seconde espèce. Mais il y a lieu de rechercher si le système canonique ne peut contenir d'autres courbes fixes, en dehors de ces courbes exceptionnelles. Il paraît qu'il en puisse contenir en effet, bien qu'il ne soit pas facile de trouver des exemples à ce sujet. Sans nous arrêter sur la question, nous nous bornons à montrer, par un exemple, que, pour les surfaces ayant $p_g = 1$, la courbe canonique n'est pas nécessairement exceptionnelle, ainsi qu'on a été porté à le croire; au contraire il peut se faire que cette courbe (ou quelqu'une de ses parties) ait le genre >0. Considérons en effet une surface du cinquième ordre passant par une section conique, et ayant trois contacts avec elle-même en trois points A, B, C de cette courbe. L'unique surface adjointe de l'ordre $5 - 4 = 1$ est ici le plan ABC, qui rencontre la surface le long de la section conique nommée et d'une courbe ultérieure du troisième ordre passant simplement par A, B, C. Or il est clair que cette dernière courbe (ayant le genre > 0) n'est certainement pas exceptionnelle.

Il peut encore arriver, nous avons dit, que la courbe canonique générale (en dehors peut-être de parties fixes) se décompose en plusieurs courbes (au moins $p_g - 1$) variables dans un même faisceau (qui peut être rationnel ou bien irrationnel). Si le faisceau n'a pas de points-base, et s'il n'existe aucune courbe exceptionnelle de la seconde espèce, on démontre (d'après M. Nöther*)) que *chacune des courbes partielles a le genre* 1. La restriction énoncée est nécessaire, car il y a des surfaces de genre $p_g = 2$ ayant un faisceau de courbes canoniques de genre > 1 (avec des points-base). On n'a qu'à rappeler l'exemple de la surface du cinquième ordre cité au n° 22. Inversement *si une surface* ($p_g \geqq 2$) *contient un faisceau de courbes du genre* 1, *toute courbe canonique se decompose en* $i \geqq p_g - 1$ *courbes de ce faisceau.*

24.

Les caractères $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ d'une surface.

Pour obtenir des nombres qui jouissent de la propriété d'invariance par rapport à une surface donnée, on n'a qu'à considérer les autres caractères du système canonique, à côté de la dimension $p_g - 1$ dont nous avons déjà parlé. Ainsi se présentent le genre et le degré du système canonique.

---

*) *Zur Theorie*... pag. 523, ib. Voir aussi Castelnuovo, *Osservazioni intorno alla geometria sopra una superficie*, Rendic. Istituto Lombardo 1891. Nota I, § 2.

Le genre (de la courbe canonique générale), dans la supposition $p_g \geqq 1$, nous fournit l'invariant qu'on appelle *second genre* (*Curvengeschlecht* d'après M. Nöther*)) et qu'on désigne par $p^{(1)}$. On peut le calculer directement pour les seules surfaces qui ont des vraies courbes canoniques (d'ordre > 0)**); pour les autres surfaces on ne saurait le définir qu'à l'aide d'une convention; c'est ce que nous allons faire tout à l'heure, du moins dans certains cas.

Mais d'abord parlons aussi du *troisième genre* $p^{(2)}$***), qui est le degré du système canonique, c'est-à-dire le nombre des intersections variables de deux courbes canoniques; pour que cette définition ait un sens, par elle-même, il faut supposer qu'on ait $p_g > 1$ (pour $p_g = 2$ ou aura $p^{(2)} = 0$), et en outre que la courbe canonique générale soit irréductible.

A ce dernier caractère pourtant, on ne fait pas attention d'ordinaire, car M. Nöther à montré†) qu'il est lié à $p^{(1)}$ par la relation bien simple

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1.$$

Mais au sujet de cette relation une remarque est nécessaire; car elle n'est pas vraie sans restriction, si par $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ on entend le genre de la courbe canonique (supposée irréductible), et le nombre des intersections *variables* de deux courbes canoniques. C'est ce que les exemples suivants nous montreront.

Reprenons à cet effet la surface du cinquième ordre qui a deux points de contact avec elle-même (surface dont nous avons parlé au n° 22). Les courbes canoniques sont ici les sections de la surface déterminées par les plans passant par les points singuliers; elles sont par suite ∞^1 courbes du genre $p^{(1)} = 2$; et pourtant on a $p^{(2)} = 0$, car deux courbes de ce faisceau n'ont aucune intersection *variable*. La relation précédente $p^{(2)} = p^{(1)} - 1$ est donc en défaut.

Un autre exemple, relatif à une valeur plus élevée de p_g, ne sera pas inutile. Désignons par $1, 2, \ldots, 8$ les huit intersections de trois surfaces du second ordre, et construisons une surface F^6 d'ordre 6, qui ait un point multiple d'ordre trois dans $1, 2, \ldots, 7$ et un point simple dans 8; cela est toujours possible. Or on voit que les surfaces d'ordre $6 - 4 = 2$ adjointes à F^6, sont les surfaces du second ordre qui passent par $1, 2, \ldots, 7$, et en conséquence par 8. Ici l'on a $p_g = 3$, $p^{(1)} = 4$, $p^{(2)} = 2 = p^{(1)} - 2$.

---

*) *Zur Theorie* ... pag. 520, ibid.

**) Ainsi par exemple pour la surface générale d'ordre 5, on a

$$p_g = 4, \quad p^{(1)} = 6.$$

***) Nöther l. c.

†) l. c.

On voit par ces exemples que la relation $p^{(2)} = p^{(1)} - 1$ est en défaut, et doit être remplacée par l'inégalité $p^{(2)} < p^{(1)} - 1$, toutes les fois que le système canonique possède sur la surface des points-base en dehors des points multiples, ou, ce qui revient au même, s'il contient des courbes exceptionnelles de la seconde espèce.

25.

Définition numérique de $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$.

Les nombres invariants d'une surface dont nous avons parlé jusqu'ici, à savoir p_g, $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$, ont été introduits par la considération directe du système canonique et de ses caractères géométriques. Or à côté de ces invariants *géométriques*, il convient, dans la théorie des surfaces, de considérer d'autres invariants définis par des expressions numériques formées avec les caractères d'un système quelconque de courbes sur la surface. Ces nouveaux invariants, que nous appellerons *numériques* ou *virtuels*, sont tels, d'ordinaire, qu'ils coïncident avec les invariants géométriques correspondants, lorsque sont remplies certaines conditions de *régularité* de la surface. Ils fournissent au contraire de nouveaux caractères d'invariance pour les surfaces *irrégulières*, et parfois ils peuvent remplacer les invariants géométriques dans les cas où la définition de ceux-ci n'a plus de sens. Le plus important de ces invariants numériques est le (premier) *genre numérique* p_a, qui correspond à p_g; nous y consacrerons quelques uns des paragraphes suivants. Occupons-nous d'abord des caractères numériques $p_a^{(1)}$, $p_a^{(2)}$, qui se présentent à côté de $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$.

Partons de l'hypothèse que le système canonique $|K|$ de notre surface existe ($p_g > 0$), et soit irréductible; et considérons sur la surface un système quelconque $|C|$ irréductible, ainsi que son système adjoint $|C'|$. Pour plus de simplicité supposons encore que $|C|$ et $|C'|$ sur notre surface n'aient pas de points-base, et que la surface ne possède aucune courbe exceptionnelle: on aura alors exactement

$$|K| = |C' - C|.$$

On peut calculer le genre $p_a^{(1)}$ et le degré $p_a^{(2)}$ de $|K|$ en fonction des caractères analogues π, n de $|C|$ et π', n' de $|C'|$, pourvu que l'on recoure aux rélations du n° 9. Ainsi l'on trouvera aisément

$$(1) \qquad \begin{cases} p_a^{(1)} = \pi' + n - 2\pi + 3, \\ p_a^{(2)} = n' + n - 4\pi + 4. \end{cases}$$

Dans les hypothèses où nous nous sommes placés, les deux caractères $p_a^{(1)}$ et $p_a^{(2)}$ ne diffèrent pas de $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$, et jouissent par suite de la propriété d'invariance. Mais il faut remarquer que les relations préc-

dentes gardent un sens déterminé, lors même qu'on fait abstraction des restrictions imposées au système canonique $|K|$. Ce système peut bien faire défaut ($p_g = 0$), ou, quoique existant, il peut différer du système $|C' - C|$ par la présence de courbes exceptionnelles, il peut même être réductible; néammoins on pourra toujours construire les expressions (1) à l'aide d'un système $|C|$ et de son adjoint $|C'|$. Mais on ne peut plus affirmer maintenant que les valeurs (1) coïncident avec les valeurs de $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ qui peuvent même n'avoir aucun sens. Il y a donc à examiner si, même dans ce cas, les expressions (1) gardent la propriété d'invariance. Il en est bien ainsi. On démontre en effet le théorème suivant*):

Soit F une surface ne possédant aucune courbe exceptionnelle, et $|C|$ un système quelconque qui n'ait pas de points-base sur F; les valeurs $p_a^{(1)}$, $p_a^{(2)}$ calculées à l'aide des caractères du système $|C|$, ne changent pas si l'on remplace ce système par un autre satisfaisant à la même condition; $p_a^{(1)}$, $p_a^{(2)}$ sont par suite deux *invariants* de la surface**). *Ils satisfont toujours à la relation*

$$p_a^{(2)} = p_a^{(1)} - 1.$$

Que l'on ait au contraire une surface F possédant des courbes exceptionnelles; on pourra de même définir les caractères $p_a^{(1)}$, $p_a^{(2)}$ de F, pourvu que l'on parvienne à transformer birationnellement la surface F en une autre F' qui n'ait pas de telles courbes; car il suffira ensuite d'envisager, par exemple, sur F' le système des sections planes. Or cette transformation de F en F' est possible dans bien de cas, même si le système canonique fait défaut ($p_g = 0$). Pas toujours pourtant; il y a en effet des surfaces (par exemple, les surfaces rationnelles, et les surfaces réglées) qui possèdent certainement des courbes exceptionnelles, en quelque manière qu'on les transforme. Pour ces surfaces les définitions de $p_a^{(1)}$ et $p_a^{(2)}$ que nous avons données, sont en défaut. On pourrait vraiment les modifier de sorte qu'elles s'étendent aussi à ces cas; mais il ne convient pas de nous arrêter ici sur des recherches qui sont encore incomplètes.

---

*) Enriques, *Introduzione* ... n° 41.

**) Sur la surface du cinquième ordre ayant deux contacts avec elle-même (n° 22, 24) un système tel que $|C|$ est fourni par les sections planes de la surface ($\pi = 6$, $n = 5$; $\pi' = 12$, $n' = 16$); on trouvera $p_a^{(1)} = 2$, $p_a^{(2)} = 1$, tandis qu'on avait $p^{(1)} = 2$, $p^{(2)} = 0$.

Un autre exemple digne de remarque nous est donné par la surface du sixième ordre qui passe deux fois par les six arêtes d'un tetraèdre. Cette surface dont nous aurons à parler plus tard, n'a pas de système canonique ($p_g = 0$) et par suite $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ n'ont aucun sens; pourtant si l'on part du système des sections planes de la surface ($\pi = 4$, $n = 6$; $\pi' = 4$, $n' = 6$) on trouve $p_a^{(1)} = 1$, $p_a^{(2)} = 0$.

26.

Le genre numérique.

Nous allons maintenant définir un nouvel invariant numérique d'une surface, qui jouit aussi d'une grande importance.

Partons d'un système $|C|$ situé sur la surface, et de son système adjoint $|C'|$. Nous avons remarqué jadis (n° 16) que la série $g_{2\pi-2}$ découpée par $|C'|$ sur la courbe générale C de $|C|$, n'est pas nécessairement complète; au contraire elle peut avoir un certain défaut δ_0, et alors sa dimension se réduit à $\pi - 1 - \delta_0$ (et la dimension de $|C'|$ se réduit à $p_g + \pi - 1 - \delta_0$).

De même les séries découpées par les systèmes $|C'+C|$, $|C'+2C|$... sur la courbe peuvent avoir des défauts positifs $\delta_1, \delta_2, \ldots$ La succession des nombres positifs $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots$ n'est pas pourtant illimitée, car nous savons (n° 19) qu'on peut toujours choisir un nombre i assez élevé, pour que les systèmes $|C' + iC|$, $|C' + (i+1)C| \ldots$ découpent sur C une série complète. Il y a donc lieu à considerer la somme

$$\Delta = \delta_0 + \delta_1 + \cdots + \delta_{i-1}$$

formée avec les défauts des séries découpées sur la courbe générale d'un système $|C|$ par les systèmes $|C'|$, $|C'+C| \ldots$ qui sont adjoints à $|C|$, $|2C| \ldots$.

Eh bien, cette somme Δ, qui est tout-à-fait déterminée par le système $|C|$, ne change pas lorsqu' on remplace le système $|C|$ par un autre système quelconque de la surface; en d'autres termes, Δ est un *nouvel invariant* de la surface*). Bien que Δ lui-même entre dans plusieurs questions, toutefois en nous conformant à l'usage établi, nous introduirons au lieu de Δ un nouveau caractère, le *genre numérique* p_n, qui est défini par la relation

$$p_g - p_n = \Delta.$$

On obtient donc le genre numérique d'une surface en retranchant du genre géométrique la somme des défauts des séries, qui sont découpées sur la courbe générale d'un système linéaire par les systèmes adjoints à celui-ci et à ses multiples.

D'après cette définition on a

$$p_n \leqq p_g;$$

p_n peut même être négatif, tandis que p_g ne l'est jamais.

Par exemple une surface réglée ayant les sections planes de genre π, a, comme nous avons remarqué, $p_g = 0$; de plus, si $|C|$ est le système des sections planes, on trouve $\delta_0 = \pi$, $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = 0$, et par

*) Enriques, *Introdusione* ... n° 40.

suite $\Delta = \pi$, $p_a = -\pi$; *le genre numérique d'une surface réglée est le genre des sections planes de celle-ci précédé du signe négatif.*

La définition de p_a que nous venons de donner, peut aussi se présenter sous la forme projective; nous verrons par là que ce nouveau caractère ne se distingue pas du genre numérique introduit par Cayley, Zeuthen et Nöther*), et cela donnera raison du nom que nous avons attribué à p_a.

Il suffit, à cet effet, de supposer que le système $|C|$, dont nous nous servons pour calculer Δ, soit formé par les sections planes d'une surface F de l'espace ordinaire, dont nous envisageons, à present, les caractères projectifs, l'ordre n, etc. Les systèmes $|C'|$, $|C'+C|$, ... $|C'+iC|$ sont alors découpés sur F par les surfaces Φ^ν d'ordre $\nu = n-3, n-2, \ldots n-3+i$ adjointes à F. La remarque d'après laquelle les systèmes $|C'+iC|$, $|C'+(i+1)C| \ldots$ découpent sur C une série complète (pour i assez élevé), se traduit maintenant dans la propriété du système des Φ^ν de découper sur un plan général *toutes* les courbes d'ordre ν adjointes à la section de F, lorsque $\nu \geqq n-3+i$; tandis que pour les valeurs de $\nu < n-3+i$ les Φ^ν découpent sur le plan une partie seulement des courbes adjointes, si $\delta_{i-1}, \delta_{i-2}, \ldots$ sont supérieurs à zéro. Or les courbes d'ordre ν adjointes à la section plane générale de F forment un système qui a la dimension

$$\varrho_\nu = \binom{\nu+2}{2} - 1 - k,$$

où k est une constante qui dépend seulement des singularités de la section nommée, c'est-à-dire des courbes multiples de la F; ν peut avoir une valeur quelconque $\geqq n-3$. Il s'ensuit (par un calcul bien simple) que la dimension du système des Φ^ν pour $\nu \geqq n-3+i$ est

$$r_\nu = \binom{\nu+3}{3} - 1 - k\nu + k', \tag{1}$$

où k' est une nouvelle constante qui dépend des courbes et des points multiples isolés de F. Le second membre de la (1), pour les valeurs de $\nu < n-3+i$, ne fournit plus (en général) la dimension exacte, *effective*, du système des Φ^ν (car alors il faut faire attention aux défauts $\delta_{i-1}, \delta_{i-2}, \ldots$); il fournit seulement un caractère qu'on pourrait appeler *dimension virtuelle* (numérique), et qui coïncide avec la dimension *effective* seulement dans le cas où $\delta_{i-1} = \delta_{i-2} = \cdots = 0$.

Précisément on trouve, sans difficulté, que la dimension effective du système des Φ^{n-4} est

$$r_{n-4} = \binom{n-1}{3} - 1 - k(n-4) + k' + \sum_0^{i-1} \delta_h,$$

*) Voir les citations au n° 4.

d'où l'on déduit sur le champ (en ayant égard à la définition $p_g - p_a = \sum_0^{i-1} \delta_h$)

$$p_a = \binom{n-1}{3} - k(n-4) + k'.$$

Cette relation s'énonce par le théorème:

Le genre numérique d'une surface n'est autre chose que la dimension virtuelle du système des surfaces adjointes d'ordre $n-4$, augmentée d'une unité.

C'est précisément cette dimension augmentée de 1, qui d'après les auteurs cités, fournit la définition de p_a.

Au sujet des considérations qui précèdent il ne sera pas inutile d'ajouter quelques remarques.

Nous sommes parvenus à la rélation (1) sans préciser les singularités (courbes et points multiples) de la surface F, qu'on avait à considérer; k et k' dépendent de ces singularités, il est vrai, mais les expressions de k et k' en fonction de celles-ci n'ont aucune importance, du moins dans les considérations théoriques que nous venons de faire. Il en serait autrement si l'on voulait calculer en effet p_a pour une surface donnée. Mais même dans ce cas on pourrait éviter la détermination directe de k et k', si l'on parvenait à déterminer par une voie quelconque les dimensions des systèmes des Φ^ν en correspondance aux valeurs assez élevées de ν; car nous venons de voir, en conclusion, que *lorsque ν parcourt la série croissante des nombres entiers* (à partir d'une certaine limite), *ces dimensions parcourent une progression arithmétique du troisième ordre, laquelle prolongée aussi aux valeurs inférieures de ν, contient $p_a - 1$ parmi ses termes.*

A la même conclusion arrivent aussi Cayley et Nöther directement, en calculant les expressions de k et k' au moyen des singularités de la surface, et en les substituant dans la formule (1) (*formule de postulation*)*).

Dès que ce calcul est fait, une voie se présente pour démontrer l'invariance de p_a; il suffit en effet de refaire un calcul analogue avec les caractères d'une surface transformée de F, et de comparer les résultats. C'est la voie que les auteurs cités ont suivie. Nous avons remarqué plus haut les difficultés qu'on y rencontre; nous venons de voir maintenant comment on peut les éviter.

---

*) Voir à ce propos: Nöther, *Sulle curve multiple di superficie algebriche*, Annali di Matem. serie II, t. 5°, (1871) pag. 172.

27.

Deux nouvelles définitions du genre numérique; la série caractéristique d'un système linéaire.

La définition que nous avons donnée plus haut du caractère $p_g - p_a$, à l'aide d'un système $|C|$ et du système adjoint $|C'|$, peut même se présenter sous la forme suivante.

La série que $|C'|$ découpe sur la courbe générale de $|C|$ peut avoir, nous l'avons dit, un certain défaut δ_0. Ce défaut ne reste pas invariable en général, lorsqu'on remplace le système $|C|$ et son adjoint $|C'|$, par un nouveau système $|D|$ et par son adjoint $|D'|$. Considérons toutes les valeurs que δ_0 peut prendre en correspondance avec les différents systèmes situés sur la surface. On démontre que ces valeurs ont un *maximum*, qui est naturellement un invariant de la surface; mais ce n'est pas un nouvel invariant; au contraire ce maximum est précisément $p_g - p_a$. On a donc le théorème*):

Le défaut de la série découpée sur la courbe générale d'un système linéaire par le système adjoint, peut dépendre du système que l'on choisit sur la surface; mais dans tous les cas ce défaut atteint un maximum, qui est égal à la différence entre les genres géométrique et numérique de la surface.

Si l'on compare la définition de $p_g - p_a$ qui résulte ainsi, avec celle que nous avons donnée ci-dessus, on voit qu'on peut choisir toujours sur une surface un système $|D|$ tellement, que les séries découpées sur la courbe D par $|D'+D|$, $|D'+2D|$ ... résultent complètes**)- On peut même démontrer qu'on parvient à un tel système $|D|$, en prenant un multiple assez élevé d'un système $|C|$ quelconque de la surface.

Dans la dernière définition de $p_g - p_a$ on fait attention à la série découpée par $|C'|$ sur C. Or sur la courbe C on trouve une autre série remarquable, que nous avons définie plus haut (n° 7); c'est la *série caractéristique* g_n^{r-1} découpée sur la courbe générale du système $|C|$ ∞^r, par les autres courbes du système. Nous allons maintenant nous occuper de cette série; sera-t-elle toujours complète? ou bien dans le cas contraire, qu'est-ce qu'on peut dire de son défaut?

On suppose naturellement ici que le système $|C|$ soit complet; car dans l'hypothèse contraire, si $|C|$ était contenu dans un système $\infty^{r+\delta}$ du même degré n, la série caractéristique g_n^{r-1} de $|C|$ serait contenue

---

*) Enriques, *Introdusione* ... n° 40. On peut vérifier ce théorème sur les surfaces *hyperelliptiques* ($p_g = 1$, $p_a = -1$); voir à ce sujet Humbert, *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques* n° 130, 144; l. c.

**) Enriques. l. c.; pour les surfaces hyperelliptiques voir Humbert, l. c., n° 144. Pour les surfaces reglées voir ci-dessus, n° 26.

à son tour dans la série caractéristique $g_n^{r+\delta-1}$ du nouveau système, et aurait par suite un défaut $\geqq \delta$. Or si $|C|$ est complet, la série caractéristique peut être complète, ou bien ne l'être pas; cela dépend de la surface sur laquelle le système est situé. C'est le premier cas qui se présente, par exemple, si la surface est rationnelle; nous l'avons remarqué plus haut pour les systèmes de courbes planes (n° 11), et il s'agit ici naturellement d'une propriété invariable par rapport aux transformations birationnelles. La même propriété est verifiée sur les surfaces générales de l'ordre n, etc. Considérons au contraire une surface réglée irrationnelle, qui ne soit pas un cône, par exemple la surface du quatrième ordre ayant deux droites directrices doubles; les sections planes de cette surface forment bien un système linéaire complet, et pourtant la série caractéristique g_4^2 n'est pas complète; au contraire elle a le défaut 1. Quel est donc le lien qui passe entre le défaut de la série caractéristique et les invariants d'une surface donnée?

Si l'on considère plusieurs systèmes linéaires complets sur une même surface, et l'on fait attention aux défauts de leurs séries caractéristiques, on trouvera parfois que ces défauts diffèrent l'un de l'autre. Que l'on prenne le maximum parmi les défauts qui correspondent à tous les systèmes de la surface; ce maximum, qui est fini et existe toujours (comme on peut le démontrer), est naturellement un invariant de la surface. Sera-t-il un invariant nouveau? On pourrait le penser. Eh bien, il n'en est pas ainsi; car on montre que ce maximum est précisément égal à la différence $p_g - p_a$. On a donc le théorème suivant*):

Le défaut de la série caractéristique d'un système complet situé sur une surface, peut dépendre du système que l'on choisit sur la surface; mais dans tous les cas ce défaut atteint un maximum, qui est égal à la différence entre les genres géométrique et numérique de la surface.

28.

Les surfaces régulières.

Les deux théorèmes qui précèdent donnent sur le champ les propriétés fondamentales des surfaces qui ont $p_g = p_a$, surfaces que nous appellons *régulières*. On a en effet:

a) *Sur une surface régulière le système adjoint à un système linéair quelconque (irréductible) découpe sur la courbe générale de celui-ci la*

*) Castelnuovo, *Alcuni risultati* ... n° 7; on y trouvera la démonstration seulement pour le cas $p_g = p_a$; l'Auteur se propose d'exposer prochainement la démonstration complète. On peut vérifier le théorème sur les surfaces hyperelliptiques (Humbert, l. c., n° 114), et sur les surfaces réglées (Segre, Mathem. Annalen, 34, n° 3.).

série canonique complète; il a la dimension $p_g + \pi - 1$, si π est le genre de la dernière courbe.

b) *Sur une surface régulière la série caractéristique de tout système linéaire complet est elle-même complète.*

Chacun des deux théorèmes peut servir à caractériser une surface régulière. Pour ce qui concerne le premier, on peut même dire davantage, car *en général la connaissance d'un seul système* ∞^r $(r \geqq 3)$, *sur les courbes duquel le système adjoint découpe la série canonique complète, est suffisante pour affirmer que la surface est régulière**). Les mots *en général* se rapportent aux restrictions suivantes qu'on rencontre dans la démonstration: 1) le système n'a pas de courbes fondamentales propres; 2) les courbes du système qui passent par un point de la surface, ne passent pas en conséquence par d'autres points variables avec celui-ci. Est-ce qu'il y a là des restrictions nécessaires?

29.

Sur quelques classes de surfaces irrégulières.

La nécessité de considérer les deux caractères p_g et p_a d'une surface, dépend de cela qu'il y a de nombreux exemples de surfaces (*irrégulières*) ayant $p_g > p_a$. Nous avons déjà cité à ce propos la surface réglee à sections de genre π, pour laquelle on a $p_g = 0$, $p_a = -\pi$. Mais on connaît maintenant deux familles très étendues de surfaces irrégulières.

La première famille, qui comprend aussi les surfaces réglées, se compose des surfaces qui contiennent un faisceau irrationnel de courbes, c'est à dire un système ∞^1 pas linéaire, tel que par tout point général de la surface passe une seule courbe du système. *La connaissance d'un faisceau irrationnel sur une surface suffit toujours pour affirmer que la surface est irrégulière.* En d'autres termes: *sur une surface régulière tout faisceau de courbes est un système linéaire***).

Pour construire la surface la plus générale contenant un faisceau irrationnel, il suffit de transformer une surface réglée irrationnelle à l'aide d'une transformation $(1, n)$ rationnelle en un seul sens (exprimant les coordonnées d'un point de la surface réglée par des fonctions rationnelles des coordonnées d'un point de la surface transformée***)).

---

*) Castelnuovo, *Alcuni risultati* ... n° 6.

**) Castelnuovo, *Alcuni risultati* ... n° 10. La connaissance d'un faisceau irrationnel suffit aussi pour reconnaître que la surface possède des intégrales de différentielles totales de première espèce.

***) On trouvera des exemples de telles surfaces dans une Note de M. Castelnuovo, *Osservazioni intorno alla geometria sopra una superficie*, Rendic. Istituto Lombardo, serie II, vol. 24, pag. 135.

Une seconde famille de surfaces irrégulières s'obtient en considérant les surfaces, dont les points correspondent, élément par élément, aux couples de points d'une courbe quelconque de genre $p > 0$. Ainsi, si l'on part d'une courbe elliptique ($p = 1$), on parvient à la surface réglée elliptique ($p_g = 0$, $p_a = -1$); si l'on part de la courbe de genre $p = 2$, on obtient une surface hyperelliptique ($p_g = 1$, $p_a = -1$)*); etc.

Il existe certainement d'autres familles de surfaces irrégulières, mais jusqu'à présent aucune, à ce que nous croyons, n'a formé le sujet d'une étude particulière.

30.

Sur de nouveaux systèmes invariants qui appartiennent à une surface.

Nous avons parlé jusqu'à présent d'un seul système invariant situé sur une surface donnée, à savoir du système canonique $|K|$. Mais on peut tout de suite introduire de nouveaux systèmes invariants, car il suffit de considérer les multiples $|K_i| = |iK|$ du système canonique. Il ne vaudrait pas même la peine de faire attention à ces nouveaux systèmes, s'il n'arrivait parfois de rencontrer des systèmes analogues sur des surfaces qui ne possèdent pas de système canonique ($p_g = 0$). Dans ce cas pourtant on ne peut définir $|K_i|$ comme un multiple de $|K|$, car celui-ci n'existe plus; mais il suffit de recourir à la définition de $|K|$, laquelle s'étend sur le champ. Nous avons démontré que si $|C|$ est un système quelconque sur une surface, et $|C'|$ est son adjoint, le système résiduel $|K| = |C' - C|$ ne dépend pas du système $|C|$ d'où l'on part; de même l'on voit directement que le système $|K_i| = |iC' - iC|$ ne dépend pas de $|C|$ (à des courbes exceptionnelles près), et peut donc s'obtenir aussi en retranchant le système $|iD|$ du système $|iD'|$, où $|D'|$ est l'adjoint de $|D|$**). Le système $|K_i|$ jouit donc de la propriété d'invariance; on va l'appeler *système i-canonique; i* est un nombre entier, positif, quelconque. Outre que par la relation $|K_i| = |iC' - iC|$, ce système est aussi défini par la relation $|K_i| = |C^{(i)} - C|$ (à des courbes exceptionnelles près), où $C^{(i)}$ est le système que l'on obtient de $|C|$ en appliquant de suite i fois l'opération d'adjonction. Le système *i-canonique* nous fournit de nouveaux caractères invariants de la surface; tels sont par exemple le nombre P_i des courbes i-canoniques qui sont linéairement indépendantes, le genre de ces courbes, etc. Pour $i = 1$, $P_i = P_1$ nous donne le genre géométrique p_g de la surface; pour $i = 2$ on a un caractère P_2 qu'on pourrait appeler *bigenre*, et qui va jouer (comme on verra) un

*) Humbert, *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques*, Journal de Mathém., 4e série, t° IX; voir aussi pour $p = 3$ deux Notes du même auteur dans les Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc., Février 1895.

**) Enriques, *Introduzione* ..., n° 39.

rôle fondamental dans la théorie des surfaces rationnelles; etc. Quelques-uns de ces nouveaux caractères peuvent s'exprimer en fonction des anciens; pas tous pourtant; c'est ce que nous allons reconnaître au sujet de P_2.

Mais remarquons d'abord que si une surface F de l'ordre n, est donnée (par ses caractères projectifs) dans l'espace ordinaire, le système i-canonique sur F peut être découpé par des surfaces de l'ordre $i(n-4)$, qui se comportent d'une façon *convenable* le long des courbes multiples et dans les points multiples de F. Préciser le comportement des surfaces *i-adjointes* dans le cas général, exigerait beaucoup de détails relatifs aux singularités élevées; qu'on nous permette de nous borner au cas $i=2$, dans l'hypothèse que la surface F ne possède d'autres singularités qu'une courbe double, et des points d'ordre $k=3, 4, \ldots$ qui sont d'ordre $\frac{k(k-1)}{2}$ pour la courbe double. *Dans ce cas le système bicanonique est découpé sur F par les surfaces d'ordre* $2(n-4)$ *qui passent deux fois par la courbe double de F.*

Revenons maintenant aux relations entre le système canonique $|K|$ et le système i-canonique $|K_i|$. Si le premier système existe, le second existera de même, quel que soit i, car on a $|K_i| = |iK|$, et en conséquence $P_i \geqq p_g$; donc si $p_g > 0$, on a aussi $P_i > 0$. Supposons, au contraire, qu'on ait $p_g = 0$; $|K|$ n'existe plus. Alors il y a à distinguer deux cas. Il peut arriver en effet que $|K_i|$ n'existe non plus, quel que soit i; c'est ce qu'on peut vérifier tout de suite sur le plan, sur une surface réglée quelconque, plus généralement sur toute surface contenant un système $|C|$ de genre π, dont deux courbes ont plus que $2\pi-2$ intersections variables; dans cette hypothèse, en effet, le système $|iC|$ ne peut être contenu dans le système $|iC'|$. Mais il peut arriver au contraire que $|K_i|$ existe, en relation avec quelques valeurs de i, lors même que $|K|$ n'existe pas; en d'autres termes, il peut arriver que l'on ait $p_g = 0$, $P_i > 0 (i > 1)$. C'est là une propriété singulière, qui n'a pas son analogue dans la théorie des courbes algébriques. Qu'elle se présente parfois, c'est ce que nous allons reconnaître sur quelques exemples, en nous bornant à la valeur $i = 2$.

Un premier exemple, bien simple, est fourni par *la surface du sixième ordre qui passe deux fois par les six arêtes d'un tetraèdre*, et en conséquence trois fois par les sommets de celui-ci*); la surface a le genre géomètrique $p_g = 0$, car il n'existe pas de surface du second ordre passant simplement par les six arêtes. Il existe au contraire une surface bi-adjointe de l'ordre 4, qui est formée par les quatre faces du tetraèdre; par suite l'on a $P_2 = 1$. La dernière surface ne découpe pas la surface donnée en

*) Enriques, *Introduzione* ..., n° 39; Castelnuovo, *Sulle superficie di genere zero*, n° 15.

dehors des lignes multiples; on dira donc que la courbe bicanonique correspondante a l'ordre zéro.

Voici un second exemple*). Considérons dans l'espace une droite d, une section conique k ne rencontrant pas la droite, et quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 en de positions générales. Construisons maintenant une surface de l'ordre 7 qui passe trois fois par d et deux fois par k, avec la condition ultérieure que deux nappes de la surface touchent en A_i le plan $A_i d$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. On démontre tout d'abord qu'une telle surface existe; ensuite qu'elle a le genre $p_g = 0$ et le bigenre $P_2 = 2$; enfin que les courbes bicanoniques sont ∞^1 courbes du quatrième ordre et de genre 1, découpées par les plans passant par la droite d.

31.

Sur quelques relations entre les caractères invariants.

Les caractères principaux d'une surface que nous venons de définir $(p_g, p_n, P_2, p^{(1)})$, quoique indépendants deux à deux, satisfont à quelques inégalités, qu'il est bon de connaître. Nous avons remarqué déjà les deux suivantes, qui découlent de la définition,

$$p_g \geqq p_n, \quad P_2 \geqq p_g.$$

On peut même dire davantage, si l'on fait attention à ce que le système bicanonique est l'adjoint du système canonique; en effet, si l'on suppose que celui-ci soit irréductible, on obtient, lorsque $p_g > 1$,

$$p_g + p^{(1)} \geqq P_2 \geqq p_n + p^{(1)}.$$

Cette relation, qui devient une égalité pour les surfaces régulières, ne subsiste pas toujours si $p_g = 1$, même si l'on recourt à la définition virtuelle de $p^{(1)}$. Précisément, en nous bornant au cas $p_g = p_n = 1$**), on trouve

$$P_2 = p^{(1)} + 1, \quad \text{ou} \quad P_2 = p^{(1)},$$

selon qu'il existe, ou n'existe pas, une courbe canonique d'ordre > 0 (en dehors des courbes exceptionnelles).

Par suite le minimum de $p^{(1)}$ pour les surfaces régulières de genre 1, est 1. Il y a deux espèces de telles surfaces pour lesquelles le minimum est atteint; elles correspondent aux valeurs $P_2 = 2$, $P_2 = 1$***). Les surfaces de la seconde espèce sont surtout remarquables. On peut les représenter sur une surface F, d'un certain ordre n, ne possédant

*) Castelnuovo, l. c.

**) *Voir* pour ce cas Enriques, *Sui piani doppi di genere uno*, n^{os} 4, 5.

***) Un exemple de surfaces de la première espèce est fourni par la surface du cinquième ordre du n^0 23. Quant aux surfaces de la seconde espèce, on a tout d'abord la surface générale du quatrième ordre, ensuite la surface du sixième ordre qui passe doublement par l'intersection de deux surfaces de l'ordre 2 et 3; etc.

aucune courbe exceptionnelle; la F n'est pas rencontrée par la surface adjointe de l'ordre $n-4$, en dehors des courbes multiples. Sur F tout système linéaire complet $|C|$, qui n'a pas de points-base, jouit d'une propriété remarquable; *si π est le genre de $|C|$, la dimension de $|C|$ a la même valeur π, et deux courbes C se rencontrent en $2\pi-2$ points ($r=\pi$, $n=2\pi-2$). Le système $|C|$ est l'adjoint de lui-même.*

Revenons maintenant aux relations d'inégalité entre les caractères d'une surface, et considérons p_g et $p^{(1)}$, en supposant, par simplicité, que le système canonique soit irréductible ($p_g > 1$).

M. Nöther*) a démontré qu'on a toujours

$$p^{(1)} \geqq 2p_g - 3.$$

Si le minimum de $p^{(1)}$ est atteint, les courbes canoniques sont hyperelliptiques (et *viceversa*); elles se rencontrent deux à deux en

$$\frac{p^{(1)}-1}{2} = p_g - 2$$

couples de points conjugués. Par suite si $p_g > 2$, on peut prendre comme équation de la surface (ou d'une transformée de celle-ci)

$$z^2 = f(x, y),$$

où f est un polynôme. On peut même préciser davantage**), car *on peut s'arranger de manière que*

1) *ou bien f ait le degré 6 en x (et le degré total $2n > 6$),*

2) *ou bien f ait le degré total 8 ou 10 (respect. $p_g = 3, 6$).*

Dans le cas 1) les plans $y = const.$ découpent sur la surface un faisceau de courbe du genre 2.

Qu'on écarte maintenant les surfaces pour lesquelles

$$p^{(1)} = 2p_g - 3;$$

on démontre alors que $p^{(1)}$ ne peut descendre au dessous de $3p-6$, à savoir

$$p^{(1)} \geqq 3p_g - 6;$$

et précisément***):

Toute surface ayant

$$p^{(1)} = 3p_g - 6 \quad (p_g > 3)$$

peut être représentée par une equation

$$f(x, y, z) = 0$$

du degré 4 par rapport à x, y (ou par une transformée de celle-ci); sauf dans le cas de certaines surfaces du genre $p_g = 4$ (surface générale

---

*) *Zur Theorie* ... Math. Ann. 8, p. 252.

**) Enriques, *Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche.* Rendic. Accad. Lincei 1896.

***) Castelnuovo, *Osservazioni interno alla geometria sopra una superficie*, Nota II, Rendic. Istit. Lombardo 1896.

du cinquième ordre), $p_g = 5$, $p_g = 7$. Dans le cas général, les plans $z = const.$ découpent sur la surface un faisceau de courbes du genre 3 (et d'ordre 4).

Chapitre VI.

Systèmes linéaires spéciaux et non-spéciaux. Extension aux surfaces du théorème de Riemann-Roch.

Avant de quitter la théorie générale des surfaces, il faut que nous consacrions quelques mots aux questions qui se rapportent à l'extension du théorème de Riemann-Roch aux surfaces.

Mais d'abord examinons quelle est la vraie nature de ce théorème, lorsqu' on se borne aux courbes.

32.

Séries spéciales et non-spéciales sur une courbe.

Par rapport à la série canonique g_{2p-2}^{p-1} appartenant à une courbe de genre p, les séries situées sur la même courbe se répartissent en deux familles*). A la première famille appartiennent les séries qui sont contenues dans la série canonique, et même celle-ci; on les appelle *séries spéciales;* les séries spéciales ont naturellement l'ordre $\leq 2p-2$ et la dimension $\leq p-1$. L'autre famille est formée par les séries qui ne sont pas contenues dans la série canonique; ce sont les *séries non-spéciales*, dont l'ordre et la dimension n'ont pas de limite supérieure.

Si l'on veut voir clairement la différence qui passe entre ces deux familles, il convient de recourir aux séries complètes.

Soit g_n^r une série complète sur une courbe du genre p; alors

1) *si g_n^r est non-spéciale on a la relation*

$$r = n - p,$$

qui permet de calculer un des trois caractères n, r, p à l'aide des autres;

2) *si, au contraire, g_n^r est spéciale, l'égalité précédente est à remplacer par l'inégalité*

$$r > n - p.$$

Et, inversement, si la dernière inégalité subsiste entre les caractères d'une série quelconque (complète ou incomplète), on peut affirmer que la série est spéciale.

La distinction que nous venons de faire, peut même se présenter sous la forme suivante. Regardons $n - p$ comme la *dimension virtuelle* (théorique) d'une série complète d'ordre n sur une courbe de genre p,

*) Brill et Nöther, *Ueber die algebraischen Functionen...*, Math. Ann. 7.

et comparons la dimension virtuelle avec la *dimension effective* r que la série possède en effet. Alors nous voyons que si la série est non-spéciale les deux dimensions coïncident, et la série est, pour ainsi dire, *régulière;* si, au contraire, la série est spéciale la dimension effective est supérieure à la dimension virtuelle, et la série est irrégulière.

Pour une série spéciale complète g_n^r, il y a lieu à considérer la différence entre les deux dimensions

$$i = r - (n-p) = p - n + r.$$

On démontre que i *est précisément le nombre des groupes canoniques linéairement indépendants qui contiennent un groupe général de la série* g_n^r. C'est là le théorème connu qui porte le nom de Riemann-Roch. Le nombre i est un caractère de la série g_n^r, qu'on pourrait appeler le *degré de spécialité;* pour une série non-spéciale on a $i = 0$, pour la série canonique g_{2p-2}^{p-1}, $i = 1$; etc.

En profitant de la notion des séries résiduelles (n° 9), on peut énoncer le théorème de Riemann-Roch sous la forme suivante, qui est due à MM. Brill et Nöther, et qui se prête le mieux aux applications géométriques:

Toute série spéciale complète g_n^r *située sur une courbe de genre* p, *a, par rapport à la série canonique, une série résiduelle* $g_{n'}^{r'}$ *dont les caractères ont les valeurs suivantes*

$$n' = 2p - 2 - n, \quad r' = p - 1 - (n-r) = i - 1.$$

33.

Quelques remarques sur les systèmes linéaires de courbes planes.

La répartition des séries en deux familles s'étend tout de suite aux systèmes linéaires de courbes sur une surface, et donne lieu à la notion de *systèmes spéciaux* et *systèmes non-spéciaux*, dont les premiers sont contenus dans le système canonique (et ont par suite la dimension $\leqq p_g - 1$, le genre $\leqq p^{(1)}, \ldots$), tandis que les seconds n'y sont pas contenus. Or on saurait s'attendre de trouver pour les systèmes non-spéciaux une *régularité* analogue à celle, que nous avons rencontrée dans les séries non-spéciales. Mais il en est tout autrement. C'est ce que nous allons reconnaître tout d'abord dans le cas le plus simple, sur le *plan* ($p_g = 0$), où tous les systèmes sont non-spéciaux.

Un système $|C|$ complet de courbes planes d'ordre m est entièrement défini, dès que l'on a fixé les points-base du système, et les ordres de multiplicité que les courbes C ont en ces points. Or pour calculer la dimension de $|C|$, du moins avec quelque approximation, on peut d'abord évaluer le nombre des conditions, que chaque point-base, séparé des autres, présente aux courbes d'ordre m; on additionnera

du cinquième ordre), $p_g = 5$, $p_g = 7$. Dans le cas général, les plans $z = const.$ découpent sur la surface un faisceau de courbes du genre 3 (et d'ordre 4).

Chapitre VI.

Systèmes linéaires spéciaux et non-spéciaux. Extension aux surfaces du théorème de Riemann-Roch.

Avant de quitter la théorie générale des surfaces, il faut que nous consacrions quelques mots aux questions qui se rapportent à l'extension du théorème de Riemann-Roch aux surfaces.

Mais d'abord examinons quelle est la vraie nature de ce théorème, lorsqu' on se borne aux courbes.

32.

Séries spéciales et non-spéciales sur une courbe.

Par rapport à la série canonique g^{p-1}_{2p-2} appartenant à une courbe de genre p, les séries situées sur la même courbe se répartissent en deux familles*). A la première famille appartiennent les séries qui sont contenues dans la série canonique, et même celle-ci; on les appelle *séries spéciales;* les séries spéciales ont naturellement l'ordre $\leqq 2p-2$ et la dimension $\leqq p-1$. L'autre famille est formée par les séries qui ne sont pas contenues dans la série canonique; ce sont les *séries non-spéciales*, dont l'ordre et la dimension n'ont pas de limite supérieure.

Si l'on veut voir clairement la différence qui passe entre ces deux familles, il convient de recourir aux séries complètes.

Soit g^r_n une série complète sur une courbe du genre p; alors

1) *si g^r_n est non-spéciale on a la relation*

$$r = n - p,$$

qui permet de calculer un des trois caractères n, r, p à l'aide des autres;

2) *si, au contraire, g^r_n est spéciale, l'égalité précédente est à remplacer par l'inégalité*

$$r > n - p.$$

Et, inversement, si la dernière inégalité subsiste entre les caractères d'une série quelconque (complète ou incomplète), on peut affirmer que la série est spéciale.

La distinction que nous venons de faire, peut même se présenter sous la forme suivante. Regardons $n - p$ comme la *dimension virtuelle* (théorique) d'une série complète d'ordre n sur une courbe de genre p,

*) Brill et Nöther, *Ueber die algebraischen Functionen...*, Math. Ann. 7.

et comparons la dimension virtuelle avec la *dimension effective* r que la série possède en effet. Alors nous voyons que si la série est non-spéciale les deux dimensions coïncident, et la série est, pour ainsi dire, *régulière;* si, au contraire, la série est spéciale la dimension effective est supérieure à la dimension virtuelle, et la série est irrégulière.

Pour une série spéciale complète g_n^r, il y a lieu à considérer la différence entre les deux dimensions

$$i = r - (n-p) = p - n + r.$$

On démontre que i *est précisément le nombre des groupes canoniques linéairement indépendants qui contiennent un groupe général de la série* g_n^r. C'est là le théorème connu qui porte le nom de Riemann-Roch. Le nombre i est un caractère de la série g_n^r, qu'on pourrait appeler le *degré de spécialité;* pour une série non-spéciale on a $i = 0$, pour la série canonique g_{2p-2}^{p-1}, $i = 1$; etc.

En profitant de la notion des séries résiduelles (n° 9), on peut énoncer le théorème de Riemann-Roch sous la forme suivante, qui est due à MM. Brill et Nöther, et qui se prête le mieux aux applications géométriques:

Toute série spéciale complète g_n^r *située sur une courbe de genre* p, *a, par rapport à la série canonique, une série résiduelle* $g_{n'}^{r'}$ *dont les caractères ont les valeurs suivantes*

$$n' = 2p - 2 - n, \quad r' = p - 1 - (n-r) = i - 1.$$

33.

Quelques remarques sur les systèmes linéaires de courbes planes.

La répartition des séries en deux familles s'étend tout de suite aux systèmes linéaires de courbes sur une surface, et donne lieu à la notion de *systèmes spéciaux* et *systèmes non-spéciaux*, dont les premiers sont contenus dans le système canonique (et ont par suite la dimension $\leqq p_g - 1$, le genre $\leqq p^{(1)}, \ldots$), tandis que les seconds n'y sont pas contenus. Or on saurait s'attendre de trouver pour les systèmes non-spéciaux une *régularité* analogue à celle, que nous avons rencontrée dans les séries non-spéciales. Mais il en est tout autrement. C'est ce que nous allons reconnaître tout d'abord dans le cas le plus simple, sur le *plan* ($p_g = 0$), où tous les systèmes sont non-spéciaux.

Un système $|C|$ complet de courbes planes d'ordre m est entièrement défini, dès que l'on a fixé les points-base du système, et les ordres de multiplicité que les courbes C ont en ces points. Or pour calculer la dimension de $|C|$, du moins avec quelque approximation, on peut d'abord évaluer le nombre des conditions, que chaque point-base, séparé des autres, présente aux courbes d'ordre m; on additionnera

du cinquième ordre), $p_g = 5$, $p_g = 7$. Dans le cas général, les plans $z = const.$ découpent sur la surface un faisceau de courbes du genre 3 (et d'ordre 4).

Chapitre VI.

Systèmes linéaires spéciaux et non-spéciaux. Extension aux surfaces du théorème de Riemann-Roch.

Avant de quitter la théorie générale des surfaces, il faut que nous consacrions quelques mots aux questions qui se rapportent à l'extension du théorème de Riemann-Roch aux surfaces.

Mais d'abord examinons quelle est la vraie nature de ce théorème, lorsqu' on se borne aux courbes.

32.

Séries spéciales et non-spéciales sur une courbe.

Par rapport à la série canonique g^{p-1}_{2p-2} appartenant à une courbe de genre p, les séries situées sur la même courbe se répartissent en deux familles*). A la première famille appartiennent les séries qui sont contenues dans la série canonique, et même celle-ci; on les appelle *séries spéciales*; les séries spéciales ont naturellement l'ordre $\leq 2p-2$ et la dimension $\leq p-1$. L'autre famille est formée par les séries qui ne sont pas contenues dans la série canonique; ce sont les *séries non-spéciales*, dont l'ordre et la dimension n'ont pas de limite supérieure.

Si l'on veut voir clairement la différence qui passe entre ces deux familles, il convient de recourir aux séries complètes.

Soit g^r_n une série complète sur une courbe du genre p; alors

1) *si g^r_n est non-spéciale on a la relation*

$$r = n - p,$$

qui permet de calculer un des trois caractères n, r, p à l'aide des autres;

2) *si, au contraire, g^r_n est spéciale, l'égalité précédente est à remplacer par l'inégalité*

$$r > n - p.$$

Et, inversement, si la dernière inégalité subsiste entre les caractères d'une série quelconque (complète ou incomplète), on peut affirmer que la série est spéciale.

La distinction que nous venons de faire, peut même se présenter sous la forme suivante. Regardons $n - p$ comme la *dimension virtuelle* (théorique) d'une série complète d'ordre n sur une courbe de genre p,

*) Brill et Nöther, *Ueber die algebraischen Functionen...*, Math. Ann. 7.

et comparons la dimension virtuelle avec la *dimension effective* r que la série possède en effet. Alors nous voyons que si la série est non-spéciale les deux dimensions coïncident, et la série est, pour ainsi dire, *régulière;* si, au contraire, la série est spéciale la dimension effective est supérieure à la dimension virtuelle, et la série est irrégulière.

Pour une série spéciale complète g_n^r, il y a lieu à considérer la différence entre les deux dimensions

$$i = r - (n-p) = p - n + r.$$

On démontre que i *est précisément le nombre des groupes canoniques linéairement indépendants qui contiennent un groupe général de la série* g_n^r. C'est là le théorème connu qui porte le nom de Riemann-Roch. Le nombre i est un caractère de la série g_n^r, qu'on pourrait appeler le *degré de spécialité;* pour une série non-spéciale on a $i = 0$, pour la série canonique g_{2p-2}^{p-1}, $i = 1$; etc.

En profitant de la notion des séries résiduelles (n° 9), on peut énoncer le théorème de Riemann-Roch sous la forme suivante, qui est due à MM. Brill et Nöther, et qui se prête le mieux aux applications géométriques:

Toute série spéciale complète g_n^r *située sur une courbe de genre* p, *par rapport à la série canonique, une série résiduelle* $g_{n'}^{r'}$ *dont les caractères ont les valeurs suivantes*

$$n' = 2p - 2 - n, \quad r' = p - 1 - (n-r) = i - 1.$$

33.

Quelques remarques sur les systèmes linéaires de courbes planes.

La répartition des séries en deux familles s'étend tout de suite aux systèmes linéaires de courbes sur une surface, et donne lieu à la notion de *systèmes spéciaux* et *systèmes non-spéciaux*, dont les premiers sont contenus dans le système canonique (et ont par suite la dimension $\leqq p_g - 1$, le genre $\leqq p^{(1)}, \ldots$), tandis que les seconds n'y sont pas contenus. Or on saurait s'attendre de trouver pour les systèmes non-spéciaux une *régularité* analogue à celle, que nous avons rencontrée dans les séries non-spéciales. Mais il en est tout autrement. C'est ce que nous allons reconnaître tout d'abord dans le cas le plus simple, sur le *plan* ($p_g = 0$), où tous les systèmes sont non-spéciaux.

Un système $|C|$ complet de courbes planes d'ordre m est entièrement défini, dès que l'on a fixé les points-base du système, et les ordres de multiplicité que les courbes C ont en ces points. Or pour calculer la dimension de $|C|$, du moins avec quelque approximation, on peut d'abord évaluer le nombre des conditions, que chaque point-base, séparé des autres, présente aux courbes d'ordre m; on additionnera

du cinquième ordre), $p_g = 5$, $p_g = 7$. Dans le cas général, les plans $z = const.$ découpent sur la surface un faisceau de courbes du genre 3 (et d'ordre 4).

Chapitre VI.

Systèmes linéaires spéciaux et non-spéciaux. Extension aux surfaces du théorème de Riemann-Roch.

Avant de quitter la théorie générale des surfaces, il faut que nous consacrions quelques mots aux questions qui se rapportent à l'extension du théorème de Riemann-Roch aux surfaces.

Mais d'abord examinons quelle est la vraie nature de ce théorème, lorsqu' on se borne aux courbes.

32.

Séries spéciales et non-spéciales sur une courbe.

Par rapport à la série canonique g^{p-1}_{2p-2} appartenant à une courbe de genre p, les séries situées sur la même courbe se répartissent en deux familles*). A la première famille appartiennent les séries qui sont contenues dans la série canonique, et même celle-ci; on les appelle *séries spéciales;* les séries spéciales ont naturellement l'ordre $\leq 2p-2$ et la dimension $\leq p-1$. L'autre famille est formée par les séries qui ne sont pas contenues dans la série canonique; ce sont les *séries non-spéciales*, dont l'ordre et la dimension n'ont pas de limite supérieure.

Si l'on veut voir clairement la différence qui passe entre ces deux familles, il convient de recourir aux séries complètes.

Soit g^r_n une série complète sur une courbe du genre p; alors

1) *si g^r_n est non-spéciale on a la relation*

$$r = n - p,$$

qui permet de calculer un des trois caractères n, r, p à l'aide des autres;

2) *si, au contraire, g^r_n est spéciale, l'égalité précédente est à remplacer par l'inégalité*

$$r > n - p.$$

Et, inversement, si la dernière inégalité subsiste entre les caractères d'une série quelconque (complète ou incomplète), on peut affirmer que la série est spéciale.

La distinction que nous venons de faire, peut même se présenter sous la forme suivante. Regardons $n - p$ comme la *dimension virtuelle* (théorique) d'une série complète d'ordre n sur une courbe de genre p,

*) Brill et Nöther, *Ueber die algebraischen Functionen...*, Math. Ann. 7.

et comparons la dimension virtuelle avec la *dimension effective* r que la série possède en effet. Alors nous voyons que si la série est non-spéciale les deux dimensions coïncident, et la série est, pour ainsi dire, *régulière;* si, au contraire, la série est spéciale la dimension effective est supérieure à la dimension virtuelle, et la série est irrégulière.

Pour une série spéciale complète g_n^r, il y a lieu à considérer la différence entre les deux dimensions

$$i = r - (n-p) = p - n + r.$$

On démontre que i *est précisément le nombre des groupes canoniques linéairement indépendants qui contiennent un groupe général de la série* g_n^r. C'est là le théorème connu qui porte le nom de Riemann-Roch. Le nombre i est un caractère de la série g_n^r, qu'on pourrait appeler le *degré de spécialité;* pour une série non-spéciale on a $i = 0$, pour la série canonique g_{2p-2}^{p-1}, $i = 1$; etc.

En profitant de la notion des séries résiduelles (n° 9), on peut énoncer le théorème de Riemann-Roch sous la forme suivante, qui est due à MM. Brill et Nöther, et qui se prête le mieux aux applications géométriques:

Toute série spéciale complète g_n^r *située sur une courbe de genre* p, *a, par rapport à la série canonique, une série résiduelle* $g_{n'}^{r'}$ *dont les caractères ont les valeurs suivantes*

$$n' = 2p - 2 - n, \quad r' = p - 1 - (n-r) = i - 1.$$

33.

Quelques remarques sur les systèmes linéaires de courbes planes.

La répartition des séries en deux familles s'étend tout de suite aux systèmes linéaires de courbes sur une surface, et donne lieu à la notion de *systèmes spéciaux* et *systèmes non-spéciaux*, dont les premiers sont contenus dans le système canonique (et ont par suite la dimension $\leq p_g - 1$, le genre $\leq p^{(1)}, \ldots$), tandis que les seconds n'y sont pas contenus. Or on saurait s'attendre de trouver pour les systèmes non-spéciaux une *régularité* analogue à celle, que nous avons rencontrée dans les séries non-spéciales. Mais il en est tout autrement. C'est ce que nous allons reconnaître tout d'abord dans le cas le plus simple, sur le *plan* ($p_g = 0$), où tous les systèmes sont non-spéciaux.

Un système $|C|$ complet de courbes planes d'ordre m est entièrement défini, dès que l'on a fixé les points-base du système, et les ordres de multiplicité que les courbes C ont en ces points. Or pour calculer la dimension de $|C|$, du moins avec quelque approximation, on peut d'abord évaluer le nombre des conditions, que chaque point-base, séparé des autres, présente aux courbes d'ordre m; on additionnera

du cinquième ordre), $p_g = 5$, $p_g = 7$. Dans le cas général, les plans $z = const.$ découpent sur la surface un faisceau de courbes du genre 3 (et d'ordre 4).

Chapitre VI.

Systèmes linéaires spéciaux et non-spéciaux. Extension aux surfaces du théorème de Riemann-Roch.

Avant de quitter la théorie générale des surfaces, il faut que nous consacrions quelques mots aux questions qui se rapportent à l'extension du théorème de Riemann-Roch aux surfaces.

Mais d'abord examinons quelle est la vraie nature de ce théorème, lorsqu' on se borne aux courbes.

32.

Séries spéciales et non-spéciales sur une courbe.

Par rapport à la série canonique g_{2p-2}^{p-1} appartenant à une courbe de genre p, les séries situées sur la même courbe se répartissent en deux familles*). A la première famille appartiennent les séries qui sont contenues dans la série canonique, et même celle-ci; on les appelle *séries spéciales;* les séries spéciales ont naturellement l'ordre $\leqq 2p-2$ et la dimension $\leqq p-1$. L'autre famille est formée par les séries qui ne sont pas contenues dans la série canonique; ce sont les *séries non-spéciales*, dont l'ordre et la dimension n'ont pas de limite supérieure.

Si l'on veut voir clairement la différence qui passe entre ces deux familles, il convient de recourir aux séries complètes.

Soit g_n^r une série complète sur une courbe du genre p; alors

1) *si g_n^r est non-spéciale on a la relation*

$$r = n - p,$$

qui permet de calculer un des trois caractères n, r, p à l'aide des autres;

2) *si, au contraire, g_n^r est spéciale, l'égalité précédente est à remplacer par l'inégalité*

$$r > n - p.$$

Et, inversement, si la dernière inégalité subsiste entre les caractères d'une série quelconque (complète ou incomplète), on peut affirmer que la série est spéciale.

La distinction que nous venons de faire, peut même se présenter sous la forme suivante. Regardons $n - p$ comme la *dimension virtuelle* (théorique) d'une série complète d'ordre n sur une courbe de genre p,

*) Brill et Nöther, *Ueber die algebraischen Functionen...*, Math. Ann. 7.

et comparons la dimension virtuelle avec la *dimension effective* r que la série possède en effet. Alors nous voyons que si la série est non-spéciale les deux dimensions coïncident, et la série est, pour ainsi dire, *régulière;* si, au contraire, la série est spéciale la dimension effective est supérieure à la dimension virtuelle, et la série est irrégulière.

Pour une série spéciale complète g_n^r, il y a lieu à considérer la différence entre les deux dimensions

$$i = r - (n-p) = p - n + r.$$

On démontre que i *est précisément le nombre des groupes canoniques linéairement indépendants qui contiennent un groupe général de la série* g_n^r. C'est là le théorème connu qui porte le nom de Riemann-Roch. Le nombre i est un caractère de la série g_n^r, qu'on pourrait appeler le *degré de spécialité;* pour une série non-spéciale on a $i = 0$, pour la série canonique g_{2p-2}^{p-1}, $i = 1$; etc.

En profitant de la notion des séries résiduelles (n° 9), on peut énoncer le théorème de Riemann-Roch sous la forme suivante, qui est due à MM. Brill et Nöther, et qui se prête le mieux aux applications géométriques:

Toute série spéciale complète g_n^r *située sur une courbe de genre* p, *a, par rapport à la série canonique, une série résiduelle* $g_{n'}^{r'}$ *dont les caractères ont les valeurs suivantes*

$$n' = 2p - 2 - n, \quad r' = p - 1 - (n-r) = i - 1.$$

33.

Quelques remarques sur les systèmes linéaires de courbes planes.

La répartition des séries en deux familles s'étend tout de suite aux systèmes linéaires de courbes sur une surface, et donne lieu à la notion de *systèmes spéciaux* et *systèmes non-spéciaux*, dont les premiers sont contenus dans le système canonique (et ont par suite la dimension $\leqq p_g - 1$, le genre $\leqq p^{(1)}, \ldots$), tandis que les seconds n'y sont pas contenus. Or on saurait s'attendre de trouver pour les systèmes non-spéciaux une *régularité* analogue à celle, que nous avons rencontrée dans les séries non-spéciales. Mais il en est tout autrement. C'est ce que nous allons reconnaître tout d'abord dans le cas le plus simple, sur le *plan* ($p_g = 0$), où tous les systèmes sont non-spéciaux.

Un système $|C|$ complet de courbes planes d'ordre m est entièrement défini, dès que l'on a fixé les points-base du système, et les ordres de multiplicité que les courbes C ont en ces points. Or pour calculer la dimension de $|C|$, du moins avec quelque approximation, on peut d'abord évaluer le nombre des conditions, que chaque point-base, séparé des autres, présente aux courbes d'ordre m; on additionnera

les nombres qui correspondent à tous les points-base, et on retranchera la somme du nombre $\frac{1}{2}m(m+3)$, qui exprime la dimension du système formé par toutes les courbes de l'ordre m. Désignons par ϱ le résultat de ce calcul; est-ce que ϱ nous fournira exactement la dimension r de $|C|$? Certainement si les points-base présentent des conditions toutes indépendantes aux courbes d'ordre m; c'est ce qui arrive, par exemple, s'il n'y a pas de points-base, ou si ceux-ci se trouvent en des points généraux du plan; on a alors la relation $r = \varrho$. Mais il n'en est plus ainsi, si ω parmi les conditions imposées par les points-base sont une conséquence des autres; car on trouve alors $r = \varrho + \omega$. Un exemple de ce cas nous est fourni par le système des courbes d'ordre m, qui passent par les $m\mu$ intersections d'une d'entre elles avec une courbe générale d'ordre $\mu < m$; on a en effet

$$r = \frac{(m-\mu)(m-\mu+3)}{2} + 1,$$

$$\varrho = \frac{m(m+3)}{2} - m\mu,$$

et, par suite,

$$\omega = r - \varrho = \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}.$$

Quoique le nombre ϱ puisse, dans bien de cas, différer de la dimension exacte r d'un système linéaire, il convient pourtant d'y faire attention, car il est un nouvel invariant du système (par rapport aux transformations birationnelles). Nous appelons ϱ la *dimension virtuelle* du système $|C|$, r la *dimension effective*. En conséquence nous répartissons les systèmes linéaires complets de courbes planes (qui sont tous non-spéciaux) en deux familles*):

1) la première famille comprend les *systèmes réguliers*, pour lesquels la dimension effective est égale à la dimension virtuelle, $r = \varrho$; ils correspondent, en une certaine façon, aux séries non-spéciales (ou régulières) sur une courbe;

2) la seconde famille comprend les systèmes *surabondants*, dont la dimension effective surpasse la dimension virtuelle, $r = \varrho + \omega$; $\omega > 0$ est la *surabondance* du système. Il ne convient pas de regarder ces systèmes comme les analogues des séries spéciales; au contraire, ils en diffèrent par bien de propriétés. Par exemple, en cela que sur une courbe de genre zéro il n'y a pas de séries spéciales, tandis que sur le plan ($p_g = p_a = 0$) nous trouvons des systèmes surabondants; en cela, encore, que l'ordre et la dimension d'une série spéciale ne peuvent surpasser certaines limites, tandis que le degré, la dimension, le genre

*) Castelnuovo, *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane*, l. c. n° 1.

d'un système surabondant peuvent être aussi élevés, que l'on désire. Il convient plutôt de regarder la *surabondance*, comme une *cause d'irrégularité* d'une autre nature que la *spécialité*, considérée sur les courbes, bien qu'elle ait le même effet d'augmenter la dimension effective par rapport à la dimension virtuelle.

La distinction que nous avons faite entre les systèmes réguliers et surabondants, se traduit en une distinction entre les séries caractéristiques de ces systèmes. On a en effet le théorème*):

Un système est régulier ou bien surabondant, selon que la série caractéristique du système est non-spéciale ou bien spéciale; d'où il s'ensuit, par exemple, qu'un système surabondant de courbes de genre π a le degré $\leqq 2\pi - 2$ et la dimension effective $\leqq \pi - 1$**).

En général si l'on désigne (comme d'ordinaire) par n et r le degré et la dimension effective d'un système complet, on a pour un système régulier l'égalité

$$\pi - n + r - 1 = 0, \tag{1}$$

tandis que pour les systèmes surabondants on a

$$\pi - n + r - 1 = \omega > 0 \tag{2}$$

(ω étant la surabondance);

dans tous les cas

$$\varrho = n - \pi + 1 \tag{3}$$

est la dimension virtuelle du système.

34.

Systèmes réguliers sur une surface.

La distinction que nous venons de faire entre les systèmes *réguliers* et *surabondants* sur le plan (ou sur les surfaces rationnelles), peut maintenant se transporter sur une surface quelconque. Ici l'on rencontre pourtant une complication, qui dépend de la répartition des systèmes en spéciaux et non-spéciaux, dont nous avons parlé plus haut. Pour éviter cette difficulté nous nous bornons tout d'abord aux systèmes *non-spéciaux* (à savoir, aux systèmes qui ne sont pas contenus dans le système canonique).

Soit $|C|$ un système non-spécial, complet, dont nous désignerons les caractères par n, r, π, suivant l'habitude. Envisageons l'expression

$$\pi - n + r - 1$$

que nous avons déjà considérée sur le plan. Elle peut prendre dif-

*) Castelnuovo, l. c., n° 18.

**) Segre, *Sui sistemi lineari*, Circolo Matem. di Palermo, t. I, 1887.

férentes valeurs, selon le système $|C|$ auquel elle se rapporte; mais on démontre*) que parmi toutes ces valeurs il y a *un minimum, qui est précisément le genre numérique p_n de la surface* (pour le plan on a $p_n = 0$). Eh bien, nous appelons *régulier* tout système (non-spécial), dont les caractères satisfont à la relation

$$\pi - n + r - 1 = p_n; \tag{4}$$

surabondant tout système pour lequel on a

$$\pi - n + r - 1 = p_n + \omega, \tag{5}$$

où $\omega > 0$ désigne la *surabondance* du système. On va considérer tout d'abord les systemes réguliers, car ils sont les plus simples, et ils satisfont à des lois générales fort remarquables. En voici quelques unes**).

La série caractéristique d'un système complet régulier a le défaut $p_g - p_n$, c'est-à-dire le défaut maximum qui appartient aux systèmes complets (n° 27).

Le système canonique découpe sur la courbe générale d'un système régulier une série complète, dont la dimension est $p_g - 1$, et l'ordre est $2\pi - 2 - n$; c'est la série résiduelle de la série caractéristique par rapport à la série canonique.

En particulier: *si la surface a le genre géometrique $p_g = 0$, la série caractéristique d'un système régulier est non-spéciale;* c'est ce qui arrive par exemple sur le plan, ou sur les surfaces réglées.

On peut construire un système régulier dont la dimension est aussi grande que l'on veut; à cet effet on commencera par construire dans l'espace ordinaire une surface F, qui soit en correspondance birationnelle avec la surface donnée, et qui n'ait pas de points multiples *isolés* (n° 15); ensuite on conduira les surfaces adjointes à F. On démontre que ces surfaces découpent sur F un système régulier, aussitôt que leur ordre est assez élevé. Si, par exemple, la F était une surface générale de l'ordre n, on verrait aisément que les surfaces générales d'un ordre quelconque $> n - 4$ découpent sur F un système régulier non-spécial.

La définition de la *surabondance* ω que nous avons donnée, est tout-à-fait arithmétique; nous sommes en mesure maintenant d'en reconnaître la signification géométrique et d'en justifier le nom.

Mais il faut d'abord que nous introduisons un nouveau caractère d'un système linéaire quelconque $|C|$ (spécial ou non-spécial) sur la surface;

*) Pour les surfaces régulières on trouvera démontré ce théorème dans les *Ricerche di geometria* ... de M. Enriques, IV, 2; pour une surface quelconque voir Castelnuovo, *Alcuni risultati* ..., n° 8. Il est à remarquer que ce théorème fournit une nouvelle définition de p_n.

**) Castelnuovo, l. c.

caractère qui devient la *dimension virtuelle* du système (n° 33), dès que la surface est rationnelle, et qui par suite sera désigné dans tous les cas par le même nom.

Construisons à cet effet un système *régulier* $|D|$ assez ample pour contenir $|C|$; c'est ce que nous pouvons faire de plusieurs façons. Pour déduire le système $|C|$ du nouveau système $|D|$, il faudra en général retrancher de $|D|$ une courbe γ convenable, et imposer certains points-base au système résiduel $|D-\gamma|$. Il se présente maintenant un moyen pour calculer la dimension r de $|C|$; car il suffit de retrancher de la dimension de $|D|$ le nombre des conditions qu'il faut imposer aux courbes D, pour qu'elles contiennent la courbe γ et les points-base nommés. Or si nous nous bornons d'abord à une première approximation, nous pouvons supposer: 1) que la série découpée par $|D|$ sur la courbe γ soit complète et non-spéciale; 2) que les conditions imposées par les points-base nommés soient toutes indépendantes entre elles et des précédentes. En exécutant le calcul dans ces hypothèses nous parvenons à un résultat ϱ, qui ne coïncide pas généralement avec la dimension vraie, *effective*, r de $|C|$, mais qui pourtant ne manque pas d'intérêt. On démontre en effet que l'on parvient au même résultat ϱ, si, dans les mêmes hypothèses, on calcule la dimension de $|C|$ en partant d'un système régulier quelconque, autre que $|D|$, qui contienne $|C|$. Par conséquent ϱ est un vrai caractère du système $|C|$; nous l'appellerons *la dimension virtuelle* de $|C|$. Il s'exprime du reste, aisément, à l'aide des autres caractères n, π de $|C|$, et de p_n, car on a

$$\varrho = p_n + n - \pi + 1, \tag{6}$$

relation qui comprend, en particulier, la (3) du n° 33.

Cela posé, revenons maintenant à notre système $|C|$ non-spécial, dont nous désignons par r et ϱ les dimensions effective et virtuelle. Si nous comparons ces caractères à l'aide des relations (4), (5) et (6), nous trouvons sur le champ que si $|C|$ est régulier, on a $\varrho = r$; si, au contraire $|C|$ est surabondant, avec la surabondance ω, alors $\varrho < r$, et précisément

$$r - \varrho = \omega.$$

Donc *la surabondance d'un système non-spécial est la différence entre la dimension effective et la dimension virtuelle du système*, d'accord avec ce que nous avons reconnu sur le plan.

Une autre interprétation, celle-ci tout-à-fait géométrique, peut être donnée du caractère ω sur les surfaces régulières ($p_g = p_n = p$). On y parvient en considérant le groupe des n intersections variables de deux courbes générales du système donné $|C|$, et les courbes du système adjoint $|C'|$ qui passent par ce groupe. En effet tandis que le nombre de ces dernières courbes, qui sont linéairement indépendantes, est $2p$,

si le système $|C|$ est régulier, le même nombre est $2p + \omega$ si le système $|C|$ a la surabondance ω. Par suite*):

La surabondance d'un système non-spécial $|C|$ sur une surface régulière de genre (géom. = num.) p, est l'excès sur $2p$ du nombre des courbes adjointes C' linéairement indépendantes qui passent par les intersections variables de deux C. On vérifiera le théorème tout de suite sur le plan.

Remarque. — Supposons que la surface F (régulière ou non) soit donnée dans l'espace ordinaire, et ne possède que des singularités ordinaires. D'après le *Restsatz* (n° 12), tout système $|C|$ sur F peut être construit à l'aide des surfaces adjointes (ou sous-adjointes), d'un ordre assez élevé, qui passent par une courbe fixe γ et par les points-base de $|C|$. Alors la *dimension virtuelle* ϱ de $|C|$ (et par suite sa surabondance ω) peut être calculée d'après les *formules de postulation* de M. Nöther (n° 26).

35.

Systèmes spéciaux.

Les propriétés que nous venons d'énoncer sur les systèmes non-spéciaux, s'étendent aussi aux systèmes spéciaux, pourvu que l'on ait égard à un nouveau caractère qui se présente dans ce cas, et qui est tout-à-fait analogue au caractère i, que nous avons introduit dans l'étude des séries spéciales. Un système spécial complet $|C|$ est contenu, par définition, dans le système canonique $|K|$; il y a donc lieu à considérer le nombre i des courbes canoniques linéairement indépendantes qui contiennent la courbe générale de $|C|$; ce nombre i, qui désigne, pour ainsi dire, le *degré de spécialité* de $|C|$ est le nouveau caractère. Si $|C|$ est non-spécial, on a $i = 0$; si $|C|$ est le système canonique, alors $i = 1$; etc. Au lieu de i, on peut aussi considérer la dimension r_1 du système $|C_1| = |K - C|$ résiduel de $|C|$ par rapport au système canonique; on a naturellement

$$r_1 = i - 1.$$

A l'aide du caractère i nous pouvons étendre de la façon suivante les formules que nous avons trouvées à propos des systèmes non-spéciaux. Désignons par n, π, r, i les caractères d'un système spécial $|C|$, et par p_n le genre numerique de la surface; on a alors

$$\pi - n + r - 1 \geqq p_n - i,$$

et précisément si

$$\pi - n + r - 1 = p_n - i + \omega, \tag{7}$$

on appelle $\omega \geqq 0$ la *surabondance* du système; pour $i = 0$ on retombe

*) Enriques, *Ricerche di geometria* . . . IV. 2.

dans la formule des systèmes non-spéciaux. On voit d'ici qu'*un système est certainement spécial si*

$$\pi - n + r - 1 < p_n;$$

mais, à cause de ω, on ne peut dire que cette relation soit aussi nécessaire; au contraire de ce qui arrivait sur les courbes, où l'inégalité $n - r < p$ pouvait servir de définition d'une série spéciale complète.

On peut écrire l'égalité (7) de façon à mettre en évidence la dimension r du système $|K-C|$. On parvient au résultat suivant:

Sur une surface de genre numérique p_n, tout système spécial complet ayant les caractères n, r, π, a, par rapport au système canonique, un système résiduel dont la dimension est

$$r_1 = p_n - (\pi - n + r) + \omega, \tag{8}$$

où ω (surabondance du premier système) désigne un nombre ≥ 0.

Il faut regarder ce théorème, comme l'extension aux surfaces du théorème de Riemann-Roch énoncé pour les courbes, car celui-ci nous donnait aussi la dimension r_1 de la série résiduelle d'une série g_n^r par rapport à la série canonique $\big(r_1 = p - 1 - (n-r)\big)$. Pour les surfaces nous voyons que la formule est compliquée par la présence du nombre ω, qui n'a pas son analogue dans la théorie des courbes*) **).

L'égalité (7) peut encore se transformer en introduisant la dimension virtuelle ϱ du système $|C|$, que nous avons définie plus haut pour un système quelconque à l'aide de la relation (6) du n° 34. On trouve ainsi la relation

$$r - \varrho = \omega - i,$$

---

*) L'extension du théorème de R.-R. aux surfaces est due à M. Nöther (Comptes Rendus de l'Ac. des Sc. 1886), dans l'hypothèse sousentendue que la série caractéristique du système $|C|$ soit complète; nous savons à présent que cette hypothèse est vérifiée toujours sur une surface régulière $(p_g = p_n = p)$. M. Nöther présente la relation du théorème sous la forme

$$r_1 \geq p + n - \pi - r;$$

c'est M. Enriques (*Ricerche di geometria* ... IV, 2) qui a montré la signification géométrique de la différence ω entre les deux membres de l'inégalité; voir à ce propos les lignes qui suivent ci-dessus.

**) Outre la dimension r_1 du système $|K-C|$, résiduel de $|C|$ par rapport au système canonique, on peut exprimer aussi les autres caractères n_1 (degré), π_1 (genre), ω_1 (surabondance), du nouveau système à l'aide des caractères du système $|C|$. On n'a qu'à recourir aux relations du n° 9. On trouvera ainsi

$$\pi_1 = p^{(1)} - 3(\pi - 1) + 2n,$$
$$n_1 = p^{(1)} - 1 - 4(\pi + 1) + 3n,$$
$$\omega_1 = \omega,$$

où $p^{(1)}$ est le genre du système canonique (*Curvengeschlecht*). Voir à ce sujet Enriques, l. c.

laquelle nous dit que *pour un système spécial la surabondance s'obtient en ajoutant le caractère i à la différence entre les dimensions effective et virtuelle du système.* Cette définition de ω se réduit à celle que nous avons exposée au sujet des systèmes non-spéciaux, lorsque $i = 0$.

Pour les surfaces régulières ($p_g = p_a = p$) on peut même étendre aux systèmes spéciaux la seconde définition de la surabondance, que nous avons énoncée pour les systèmes non-spéciaux. On n'a qu'à remplacer, dans celle-ci, ω par $\omega - i$.

36.

Aperçu sur les considérations qui précèdent.

En ayant égard aux complications que peut présenter un système linéaire de courbes sur une surface algébrique, il ne paraîtra pas inutile que nous résumons ici brièvement les remarques, que nous venons de faire à ce sujet.

Si n et π désignent le degré et le genre d'un système complet $|C|$ sur une surface de genre numérique p_a, il faut faire attention d'abord à la dimension virtuelle de $|C|$, qui est fournie par l'expression

$$\varrho = p_a + n - \pi + 1.$$

Ensuite on doit avoir égard à deux causes d'irrégularité, dont l'effet est de modifier la dimension effective r de $|C|$ par rapport à la dimension virtuelle ϱ. Ces deux causes ont du reste des effets opposés, qui parfois peuvent s'éliminer. Elles peuvent agir soit séparément, soit en même temps. Elles sont:

1) la *surabondance*, qui fait *augmenter* la dimension du système ($r = \varrho + \omega$); elle peut se présenter sur une surface quelconque, et pour des systèmes de dimension, de genre, et d'ordre aussi élevés que l'on veut; rien d'analogue n'a lieu pour les séries linéaires sur une courbe;

2) la *spécialité*, à laquelle on doit, au contraire, une *diminution* de la dimension ($r = \varrho - i$); propriété d'autant plus remarquable que dans la théorie des séries linéaires sur une courbe, la cause analogue a pour effet d'augmenter la dimension ($r = n - \pi + i$). Sur les surfaces, du reste (de même que sur les courbes), on n'a lieu à considérer cette cause d'irrégularité que pour les systèmes ayant leurs caractères n, π et r inférieurs à certaines limites (qui sont respectivement $p^{(2)}$, $p^{(1)}$ et $p_g - 1$).

Les seuls systèmes sur lesquels ni l'une ni l'autre de ces causes n'agissent, sont les *systèmes réguliers* ($r = \varrho$, $\omega = i = 0$).

Chapitre VII.

Sur les surfaces rationnelles et sur quelques plans doubles.

Nous consacrons ce dernier Chapitre de notre Monographie à l'étude de la classe des surfaces rationnelles; classe remarquable aussi parce que les recherches auxquelles elle a donné lieu, ont conduit, par extension naturelle, à des recherches sur les surfaces algébriques générales. Nous dirons ensuite quelques mots sur les plans doubles.

La théorie des surfaces rationnelles a commencé par l'étude de quelques surfaces, particulières au point de vue projectif, qui pouvaient se représenter birationnellement sur le plan; on cherchait de lire sur la représentation les principales propriétés de telles surfaces. Ainsi l'on trouve considérée tout d'abord la surface du second ordre (Plücker, 1847; Cayley et Chasles, 1861), et quelques ans plus tard la surface générale du troisième ordre (Cremona, Clebsch, 1865); suivent la surface réglée du troisième ordre, la surface de Steiner, etc.

Ayant reconnu sur ces exemples le profit que l'on pouvait tirer de la représentation d'une surface pour l'étude de celle-ci, ayant appris à vaincre les difficultés que pouvait présenter, au premier abord, la lecture des propriétés de la surface sur la représentation, le problème (projectif) d'étudier une surface d'après sa représentation connue, pouvait se regarder comme résolu d'avance dans tous les cas. Cependant un autre problème (appartenant celui-ci à la *Géométrie sur une surface*) se présentait: déterminer si une surface donnée par quelqu'un de ses caractères est rationnelle, ou bien ne l'est pas.

C'est à Clebsch et à M. Nöther qu'on doit les propositions fondamentales sur ce sujet. Clebsch*) a montré comment on pouvait établir le caractère rationnel d'un grand nombre de surfaces, en représentant d'abord ces surfaces sur *un plan double* (voir n° 38), et en cherchant ensuite les conditions de rationnalité d'un plan double. M. Nöther**) a accompli ces recherches, et a donné le théorème capital***), d'après lequel est rationnelle toute surface contenant un faisceau linéaire de courbes rationnelles.

On est parvenu plus tard à étendre ces propositions, ainsi qu'en ajouter d'autres d'un caractère très général, que nous allons exposer dans les pages suivantes. Mais il faut pourtant remarquer que la plupart des nouveaux résultats s'appuyent en conclusion sur les théorèmes de Clebsch et Nöther.

---

*) *Ueber den Zusammenhang* ... Math. Annalen, 3, 1870.

**) *Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen*, Sitzungsber. d. phys. medicin. Soc. zu Erlangen, 1878; *Ueber eine Classe* ..., Math. Annalen, 33.

***) *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen*. Math. Ann., 3, 1870.

37.

Quelques propriétés des surfaces rationnelles.

Les propriétés générales des surfaces que nous venons d'étudier dans les Chapitres précédents, fournissent des propriétés des surfaces rationnelles dès qu'on particularise les genres de la surface ($p_g = p_a = 0$). Ces mêmes propriétés, du reste, peuvent se deduire de l'étude directe des systèmes de courbes planes; et la dernière voie est naturellement préférable au point de vue de la simplicité.

D'une manière ou d'autre, on parviendra aux propositions suivantes que nous réunissons ici, bien que quelques unes d'entre elles aient été déjà énoncées.

Sur une surface rationnelle:

a) *la série caractéristique de tout système linéaire complet, est complète;*

b) *la série (canonique) découpée sur la courbe générale d'un système linéaire par le système adjoint, est elle-même complète.*

Chacun de ces deux théorèmes revient à dire qu'*une surface rationnelle a les deux genres p_g, p_a égaux;* chacun peut se déduire de l'autre.

c) *Sur une surface rationnelle il existe des systèmes linéaires dont la série caractéristique est non-spéciale, et parmi ceux-ci il y a des systèmes de genre π dont le degré $n > 2\pi - 2$;* tel est par exemple, le système formé par toutes les courbes planes d'un ordre donné.

Le théorème c) nous dit que *le genre géométrique p_g ($= p_a$) d'une surface rationnelle est nul.* Il nous dit davantage: non seulement il n'y a pas de système canonique sur la surface, mais ni le système bicanonique, ni le système i-canonique (i quelconque) n'existent non plus; de sorte que l'on a (en adoptant les mêmes désignations qu'au n° 30)

$$p_g = 0, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = 0 \ldots.$$

Nous verrons bientôt que ces conditions ne sont pas, du reste, toutes indépendantes.

d) *Sur une surface rationnelle il existe des systèmes linéaires de genre π quelconque.* Pour $\pi = 0$ on trouve des systèmes ayant la dimension r, et le degré $n = r - 1$ aussi hauts que l'on veut; il n'en est plus ainsi pour $\pi > 0$, car *un système de courbes de genre 1 a la dimension et le degré $\leqq 9$; tandis que pour un système de genre $\pi > 1$, la dimension ne peut surpasser $3\pi + 5$, ni le degré ne peut surpasser $4\pi + 4$;* mais on peut atteindre ces *maxima**).

---

*) Pour $\pi = 1$ le théorème dépend de la réduction des systèmes de courbes elliptiques planes à des types bien connus; voir les travaux de MM. Bertini (Annali di Matematica, s^{e} 2^{a}. t. 8, 1877), Guccia (1886), Martinetti (1887) (Rendic.

Sans insister ultérieurement sur les propriétés des surfaces rationnelles, nous allons aborder maintenant une question très importante, qui est, en quelque sorte, l'inverse des précédentes: il s'agit de décider si une surface donnée est rationnelle, par l'examen de quelques caractères connus de la surface. Le problème, ainsi posé, n'est pas bien défini; il faudra particulariser les caractères de la surface que l'on regarde connus; c'est ce que nous allons faire de plusieurs façons.

38.

On connaît le degré d'un système linéaire de courbes situées sur la surface.

Souvent c'est la connaissance d'un système linéaire de courbes sur la surface, qui permet de décider la rationnalité de celle-ci; parfois même (dans les cas les plus simples) la connaissance d'un caractère du système (par exemple, du degré n, ou du genre π) suffit; d'après le caractère auquel on fait attention, on parvient à des classes différentes de résultats.

Supposons, tout d'abord, qu'il existe sur la surface un système $|C|$ dont le *degré* soit $n > 0$; la dimension r du système sera ≥ 2 et $\leq n + 1$. Examinons successivement les premières valeurs qu'on peut attribuer à n.

1) Les premiers cas que nous rencontrons, correspondent à $n = 1$, $r = 2$, et $n = 2$, $r = 3$; ceux-ci conduisent à des surfaces rationnelles, ainsi qu'on voit sur le champ.

2) Arrêtons-nous plutôt sur le cas plus intéressant, où l'on a $n = 2$, $r = 2$. Si nous faisons correspondre à chaque courbe C du système, une droite d'un plan, nous allons représenter deux points conjugués de la surface (intersections de deux C) sur un point général du plan; la surface de cette façon se représente sur un *plan double*, c'est-à-dire sur une surface dont l'équation peut s'écrire sous la forme $z^2 = R(x, y)$, R étant une fonction rationnelle (que l'on peut supposer entière). C'est donc la question de la rationnalité d'un plan double que nous rencontrons maintenant.

Un plan double est entièrement défini par sa *courbe de diramation* (*Uebergangscurve*) $R(x, y) = 0$, qui est le lieu d'un point dont les deux points correspondants sur la surface coïncident. Quelle particularité doit présenter la courbe de diramation pour que le plan double soit rationnel (représentable sur le plan simple)? La question, abordée par

---

Circolo Mat. di Palermo, t. I), Jung (Rendic. Istituto Lombardo 1887–88). Pour $\pi > 1$ les limites supérieures de n et r ont été assignées par M. Castelnuovo (*Massima dimensione* ..., Annali di Matem. s^{e} 2^{a}, t. 18, 1890).

Clebsch, a été entièrement résolue par M. Nöther*). Voici la réponse:

Afin qu'un plan double soit rationnel, il faut et il suffit que la courbe de diramation puisse être ramenée, par une transformation birationnelle du plan, à l'une des trois courbes qui suivent:

a) *courbe d'un certain ordre n ayant un point multiple d'ordre $n-2$;*

b) *courbe du quatrième ordre;*

c) *courbe du sixième ordre ayant deux points triples infiniment prochains.*

Les dégénérations de ces trois cas sont admises, excepté la scission a_1) de la courbe d'ordre n en n droites d'un faisceau, b_1) de la courbe du quatrième ordre en quatre droite d'un faisceau, c_1) de la courbe du sixième ordre en six droites d'un faisceau, ou en trois coniques d'un faisceau avec deux contacts fixes; car ces dégénérations amènent à des plans doubles, qui représentent des surfaces réglées**).

Venons maintenant aux valeurs > 2 du degré n, mais supposons en même temps $r > 2$, car jusqu'à present on ne sait rien sur la rationnalité des plans triples, ... ($n = 3, \ldots, r = 2$). Supposons plus précisément qu'on puisse construire une surface F d'ordre n de l'espace ordinaire, dont les sections planes appartiennent au système $|C|$ donné, qui a le degré n et la dimension r.

Il s'agit d'examiner dans quels cas la surface F est rationnelle. La question a été résolue entièrement pour les valeurs les plus petites de $n(>2)$.

3) On sait par exemple que *toute surface de l'ordre $n = 3$ est rationnelle, abstraction faite du cône général du troisième ordre.*

4) On sait aussi qu'*une surface de l'ordre $n = 4$ ayant des lignes multiples* (au moins une droite double) *est rationnelle, excepté les surfaces réglées de genre > 0. Parmi les surfaces du quatrième ordre qui n'ont pas de courbes multiples, il y a seulement quatre familles de surfaces rationnelles, qui ont été déterminées par* M. Nöther***). Une d'entre elles se compose des surfaces du quatrième ordre ayant un point triple.

*) Mémoires cités.

**) La correspondance qui passe entre les points d'un plan double rationnel et les couples de points d'un plan simple, donne lieu, sur celui-ci, à une *involution de* (∞^2) *couples de points*. Or les types de ces involutions qui sont distinctes par rapport aux transformations birationnelles, ont été déterminés par M. Bertini (*Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie del piano*. Annali di Matem. s° 2ª, t. 8, 1877); ils correspondent naturellement aux trois types de plans doubles. La possibilité de l'existence d'autres types, en dehors des précédents, qui n'était pas exclue par le Mémoire de M. Bertini, a été écartée par des recherches ultérieures (Kantor, Castelnuovo).

***) *Ueber die rationalen Flächen vierter Ordnung*, Math. Annalen, 33, 1888.

Les trois autres familles correspondent à un point double singulier que la surface possède, par lequel la surface est projectée sur un des trois plans doubles rationnels que nous venons de citer; le premier de ces cas remarquables a été signalé par M. Cremona.

5) Pour $n \geqq 5$ on n'a que des résultats incomplets; c'est pourquoi nous n'y insistons pas pour le moment, en nous réservant d'indiquer comment la détermination des surfaces rationnelles d'un ordre donné saurait maintenant s'aborder.

39.

On connaît le genre d'un système linéaire de courbes situées sur la surface.

Une autre série de recherches correspond à la classification des systèmes de courbes de la surface, faite d'après le *genre* π. Pour les premières valeurs de π on a des résultats qu'il est bon de rappeler.

1) Un théorème bien connu de M. Nöther se rapporte au cas $\pi = 0$*):

Toute surface contenant un système linéaire ∞^1 *de courbes rationnelles* ($\pi = 0$), *est rationnelle.*

En particulier: *toute surface de l'espace ordinaire dont les sections planes sont rationnelles, est rationnelle;* et on peut ajouter (grâce à un théorème de M. Picard**)) que *la surface est réglée, à moins qu'elle ne soit la surface de Steiner* (du quatrième ordre, avec un point triple et trois droites doubles).

2) Si $\pi = 1$, la connaissance d'un système ∞^1 de courbes ne suffit pas pour en conclure la rationnalité de la surface (on peut le vérifier sur de nombreux exemples); mais si l'on connaît un système linéaire ∞^2 de courbes elliptiques ($\pi = 1$), on peut énoncer un résultat intéressant***):

Toute surface contenant un système linéaire ∞^2 *de courbes elliptiques peut se transformer birationnellement en un plan, ou bien en une surface réglée elliptique.* Dans ce dernier cas il existe sur la surface donnée un faisceau elliptique de courbes rationnelles, qui découpent en un seul point variable chaque courbe du système ∞^2; c'est le faisceau correspondant à la série des génératrices de la surface réglée.

---

*) l. c. Math. Annalen, 3.

**) *Sur les surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales*, Journal für Mathem., 100, 1885; voir aussi Guccia, Rendic. Circolo Mat. di Palermo, t. I, 1886.

***) Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche*, Rendic. della R. Acc. d. Lincei, 1894; la démonstration est rapportée par M. Enriques dans le Mémoire *Sui sistemi lineari di superficie algebriche* . . ., n° 8, Math. Annalen, 46.

En particulier*): *toute surface de l'espace ordinaire dont les sections planes sont de courbes elliptiques, est rationnelle, ou bien elle est une surface réglée.* Dans le premier cas l'ordre de la surface ne peut surpasser 9.

3) Pour $\pi = 2$ on a un résultat analogue au précédent, pourvu que l'on ait égard à la restriction $n > 2$**): *Toute surface contenant un système linéaire de courbes de genre 2 dont la dimension $r \geq 2$, et le degré $n > 2$, peut se transformer birationnellement en un plan, ou bien en une surface réglée dont le genre peut assumer les valeurs 2 ou 1.* Dans le cas de la surface réglée du genre 2, les génératrices de celle-ci sont découpées en un seul point par toute courbe du système donné. Si au contraire la surface réglée est elliptique, ses génératrices sont rencontrées en plus d'un point par les courbes du système ∞^2.

*Toute surface de l'espace ordinaire dont les sections planes ont le genre 2, est rationnelle (et contient un faisceau de coniques), ou bien elle est réglée****).

4) Les derniers théorèmes s'étendent de suite à toute surface qui contient un système ∞^2 de courbes *hyperelliptiques*, dont le genre π est aussi haut que l'on veut†): *Toute surface contenant un système linéaire ∞^2 de courbes hyperelliptiques de genre π, dont la série caractéristique est non-spéciale, peut se transformer birationnellement en un plan, ou bien en une surface réglée dont le genre a une des deux valeurs π, 1.* Au sujet de ce dernier cas, il y a lieu de faire une remarque analogue à la précédente.

Toute surface de l'espace ordinaire dont les sections planes sont des courbes hyperelliptiques est rationnelle (et contient un faisceau de coniques), ou bien elle est réglée.

5) Pour $\pi = 3$, le cas hyperelliptique excepté, on n'a jusqu'à présent que des résultats incomplets††).

---

*) Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve ellittiche*, Rendic. della R. Acc. d. Lincei, 1894; voir aussi Enriques, *Sui sistemi lineari* . . ., n° 5.

**) Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche che contengono una rete* . . ., l. c.; Enriques l. c. n° 8.

***) Enriques, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche* . . ., Rendic. della R. Acc. d. Lincei 1893, Math. Annalen 39.

†) Voir pour ces résultats les Mémoires cités de MM. Castelnuovo et Enriques.

††) Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere 3*, Atti dell' Acc. d. Scienze di Torino, vol. 25, 1890.

40.

Quelques résultats qui se ramènent aux précédents.

Si l'on connaît sur une surface un système linéaire assez ample e courbes, on peut parfois en déduire un autre qui se trouve dans es conditions considérées plus haut, à l'aide d'une méthode qui a été mployée avec succès par M. Del Pezzo*), et qui consiste à imposer e nouveaux points-base (simples, doubles . . .) aux courbes du système. u point de vue projectif, cela revient à considérer la surface de espace S_r (à r dimensions), dont les sections par les S_{r-1} forment le ystème donné, et à projecter la surface par quelques-uns de ses points, e ses plans tangents, etc.

Par ce moyen on voit sur le champ que *toute surface de l'espace* $_r(r \geqq 3)$ *ayant l'ordre* $n = r - 1$, *ou* $n = r$, *est rationnelle, excepté* : *cône elliptique qui peut se présenter dans le second cas;* on peut ême assigner des propriétés projectives intéressantes de ces surfaces**).

Un autre résultat, qu'on a obtenu par la même méthode***), comlète en quelque sorte le théorème cité plus haut, d'après lequel un ystème linéaire de genre $\pi > 1$ sur une surface rationnelle, a la imension $\leqq 3\pi + 5$:

Si un système linéaire de courbes de genre $\pi \geqq 1$ *sur une surface la dimension* $r \geqq 3\pi + 5$, *la surface est rationnelle, ou bien elle peut* : *représenter sur une surface réglée de genre* π, *dont les génératrices ncontrent en un seul point les courbes du système. C'est le second as qui se présente toujours si* $r > 3\pi + 5$ *pour* $\pi > 1$, *ou* $r > 9$ *our* $\pi = 1$.

On pourrait même, à ce qu'il paraît, obtenir des résultats plus xpressifs en relation avec des valeurs inférieures de r.

41.

Méthode des systèmes adjoints successifs.

La méthode que nous venons d'exposer, ne se prête pas, dans la lupart des cas, à examiner si une surface, possédant un système donné e courbes, est rationnelle. L'imposition de nouveaux points-base au ystème amènera d'ordinaire à un nouveau système, dont la dimension ésultera aussi petite que l'on voudra, mais dont le degré et le genre

*) *Sulle superficie di ordine n immerse nello spasio di* $n+1$ *dimensioni* Rendic. Accad. di Napoli, 1885); *Sulle superficie dell'* n^0 *ordine immerse nello xasio di n dimensioni* (Rendic. Circolo Mat. di Palermo t. I, 1887).

**) Del Pezzo, l. c.

***) Enriques, *Sulla massima dimensione . . .*, Atti dell' Acc. d. Scienze i Torino, vol. 29.

seront encore trop grands pour qu'on puisse en tirer quelque conclusion. Or un procédé de *reduction* ne peut nous satisfaire, s'il ne conduit nécessairement à un système de genre ou de degré assez petits, toutes les fois que la surface considérée est rationnelle; car seulement dans ce cas il nous permettra de décider si une surface donnée est rationnelle, ou bien ne l'est pas. Un tel procédé nous est fourni par l'opération *d'adjonction*, que nous avons définie dans un Chapitre précédent.

Soit $|C|$ un système linéaire de courbes sur la surface donnée; formons le système adjoint $|C'|$, ensuite le système $|C''|$ adjoint de celui-ci, que nous appelons le *second adjoint* de $|C|$, et ainsi de suite. Or, par rapport à la succession des systèmes $|C|$, $|C'|$, $|C''|$, ..., deux cas peuvent se présenter.

1) Ou bien la succession a un terme; on parvient donc à un dernier système $|C^{(0)}|$ qui n'admet plus de système adjoint;

2) ou bien la succession est illimitée; chacun des systèmes qui la composent admet le système adjoint.

C'est naturellement le premier cas qui va se presenter, lorsque la surface considérée est rationnelle; on le voit sur le champ, si l'on opère sur des systèmes de courbes planes. Mais on ne peut pas dire inversement que la condition 1) soit toujours *suffisante*, pour affirmer la rationnalité de la surface; car il faut ajouter encore la condition de *régularité* de la surface ($p_g = p_a$). En effet le dernier système $|C^{(0)}|$ aura alors (on le démontre) le genre 0 ou 1, et on pourra appliquer les résultats du n° 39.

En conclusion pour reconnaître le caractère rationnel d'une surface, il faut d'abord vérifier qu'elle est régulière (pour cela il suffit en général d'examiner si la série découpée par $|C'|$ sur la courbe C est complète (n° 28)).

Ensuite il faut vérifier si la succession $|C|$, $|C'|$, $|C''|$ ... a un terme. Ce procédé exige, a ce qu'il paraît, un nombre d'opérations qu'on ne peut pas assigner *a priori*, avant de conduire à une réponse définitive sur la nature de la surface proposée. C'est là un défaut sérieux, que nous tâcherons d'éviter. On y réussit en remarquant que tous les systèmes adjoints peuvent se déduire des deux premiers $|C|$ et $|C'|$ par de simples opérations d'addition et de soustraction; on a en effet (en vertu du théorème fondamental n° 16)

$$|C''| = |2C' - C|, \quad |C'''| = |3C' - 2C|, \text{ etc.}$$

C'est donc la considération des systèmes $|C|$ et $|C'|$ qui suffit pour trancher la question de la rationnalité de la surface. Voici comment il faudra procéder.

a) Il faut d'abord reconnaître que $|C'|$ ne contient pas $|C|$;

b) il faut encore que $|2C'|$ ne contienne pas $|2C|$; cette condition renferme la précédente, mais elle n'en découle pas.

Toute vérification ultérieure est superflue; en effet on démontre que si la dernière condition est remplie, la succession $|C|, |C'|, |C''| \ldots$ a un terme; par suite la surface est rationnelle. On a donc le théorème suivant*):

Sur une surface régulière on suppose connu un système linéaire $|C|$ *de courbes* (du moins ∞^3), *ainsi que son système adjoint* $|C'|$; *pour que la surface soit rationnelle, il faut et il suffit que le système* $|2C'|$ *ne contienne pas le système* $|2C|$.

Nous allons voir tout de suite quelques corollaires de ce théorème; mais remarquons d'abord que la condition nommée est certainement remplie lorsque *le degré n du système* $|C|$ *est supérieur à* $2\pi - 2$ (π *étant le genre de* $|C|$).

42.

Rationnalité dune surface déduite de la connaissance de ses invariants numériques.

La conséquence la plus importante que l'on peut tirer du théorème répond à la question suivante: la classe des surfaces rationnelles sera-t-elle entièrement définie par des valeurs particulières des nombres invariants (p_g, p_a, P_2, $P_3 \ldots$)? Clebsch s'était posé la question analogue pour la classe des courbes rationnelles; il l'a résolue en remarquant qu'une courbe est rationnelle si son genre est nul, et *viceversa*. Nous allons voir que pour les surfaces la réponse est analogue, bien qu'il y ait à envisager plus d'un caractère.

Rappelons d'abord que pour une surface rationnelle on a

$$p_a = p_g = P_2 = P_3 = \cdots = 0;$$

c'est ce qui résulte des définitions de ces caractères. Ces conditions ne sont pourtant pas toutes indépendantes, mais il ne faut penser non plus que l'une d'elle entraine la suite les autres (comme il arrive pour les courbes). En effet les surfaces réglées irrationnelles, par exemple, ont

$$p_g = P_2 = P_3 = \cdots = 0,$$

mais $p_a < 0$; et l'on connaît de même des surfaces non-rationnelles avec $p_a = 0$. On était vraiment porté à croire que les deux conditions $p_a = p_g = 0$ suffisaient à caractériser la classe des surfaces rationnelles; et c'est seulement lorsqu'on a trouvé des exemples contraires, qu'on a vu qu'il en était tout autrement; ce sont les exemples que nous avons déjà cités au n° 30 ($p_a = p_g = 0$, $P_2 > 0$).

C'est le théorème du paragaphe précédent qui nous fournit la

*) Castelnuovo, *Sulle superficiedi genere zero.*

réponse à notre question; car les hypothèses qu'on y fait se traduisent par les relations $p_g = p_n$, $P_2 = 0$ (qui découlent de $p_n = 0$, $P_2 = 0$). On a donc le résultat*):

Afin qu'une surface soit rationnelle, il faut et il suffit que le genre numérique p_n, et le bigenre P_2 s'évanouissent ($p_n = P_2 = 0$).

43.

Détermination des surfaces rationnelles d'un ordre donné.

On peut faire une application du théorème dernier à la détermination de toutes les surfaces rationnelles de l'ordre n dans l'espace ordinaire; cela, du moins, en théorie, car l'exécution pratique exige des notions qu'on ne possède pas pour le moment. La question est réduite à l'analyse des singularités (courbes et points multples), qu'on peut attribuer à une surface de l'ordre n, ayant égard aux conditions: 1) que le genre numérique de la surface soit nul, 2) qu'il n'existe pas de surfaces biadjointes de l'ordre $2(n-4)$, en dehors de celles qui sont formées par la surface donnée avec une autre surface d'ordre $n-8$. Ainsi la difficulté est ramenée à déterminer l'influence exercitée par une singularité connue sur le genre numérique d'une surface, et le comportement d'une surface biadjointe dans la même singularité. C'est ce qu'on peut faire dans les cas les plus simples; ainsi:

Si une surface F de l'ordre n possède une courbe double ayant l'ordre d et le genre π, et possède en outre t points triples, qui sont triples aussi pour la dite courbe (et n'a pas d'autres singularités), les conditions de rationnalité de la surface sont les deux suivantes:

1) *on doit avoir la relation*

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} - (n-4)d + 2t + \pi - 1 = 0,$$

2) *il ne doit pas exister de surfaces d'ordre $2(n-4)$ qui passent doublement par la courbe double de F (en dehors des surfaces qui contiennent la F).*

44.

Surfaces les points desquelles ont des coordonnées qui s'expriment en fonctions rationnelles de deux paramètres.

Le théorème fondamental du n° 41 nous permet aussi de répondre à une question, qui se présente tout d'abord dans l'étude des surfaces rationnelles. La définition que nous avons donnée de ces surfaces, se traduit par les deux conditions suivantes:

*) Castelnuovo, l. c.

1) les coordonnées x, y, z du point général de la surface s'expriment en fonctions rationnelles de deux paramètres α, β (qui peuvent être regardés comme les coordonnées d'un point du plan),

1) $$x = f_1(\alpha, \beta), \quad y = f_2(\alpha, \beta), \quad z = f_3(\alpha, \beta);$$

2) inversement les paramètres α, β s'expriment rationnellement en fonctions de x, y, z,

2) $$\alpha = \varphi_1(x, y, z), \quad \beta = \varphi_2(x, y, z).$$

Or supposons que, pour une surface donnée, la première condition soit remplie, en d'autres termes supposons que les (1) subsistent; et cherchons de déduire les (2) des (1) par des opérations d'élimination. Si l'on peut effectuer le passage, ce qui arrive dans bien de cas, la surface est rationnelle, d'après la définition. Mais il peut arriver, au contraire, qu'on ne puisse pas déduire les (2) des (1), parce qu'à un point (x, y, z) de la surface correspondent $n > 1$ points (α, β) du plan. Est-ce qu'il faudra conclure dans ce cas que la surface n'est pas rationnelle? Ou bien, au contraire, pourra-t-on introduire, au lieu de α et β, deux nouveaux paramètres α', β' (fonctions rationnelles des premiers), de telle façon que x, y, z s'expriment rationnellement à l'aide de α', β', et *viceversa* α', β' s'expriment rationnellement à l'aide de x, y, z? Dans ce dernier cas la surface serait naturellement rationnelle, et la particularité qu'on vient de remarquer à l'égard de α et β, dépendrait seulement du choix spécial des paramètres.

Or on soupçonnait bien qu'il en était ainsi; car dans le même sens avait été résolue, par M. Lüroth, la question analogue qui se rapporte aux courbes. Mais la démonstration de M. Lüroth, à ce qu'il paraît, ne peut pas s'étendre aux surfaces.

Voici comment on réussit à démontrer le théorème.

A tout point (x, y, z) de la surface correspondent (nous l'avons dit) $n > 1$ points (α, β) du plan; à toute courbe algébrique de la surface correspond une courbe algébrique du plan, et à un système linéaire de courbes sur celle-là, un système linéaire de courbes sur celui-ci. Par des propriétés connues de ces derniers systèmes on peut déduire des propriétés des premiers systèmes. Ainsi l'on voit par exemple que sur la surface tout système linéaire complet a la série caractéristique complète, d'où il résulte que les deux genres p_g, p_a de la surface sont égaux. On voit, de plus, que sur la surface existent des systèmes de genre π avec le degré $> 2\pi - 2$, d'où il s'ensuit

$$p_g = P_2 = P_3 = \cdots = 0.$$

Les deux conditions $(p_a = P_2 = 0)$ pour la rationnalité d'une surface sont donc remplies. C'est ce qui affirme le théorème suivant*):

*) Castelnuovo, *Sulla razionalità delle involuzioni piane*, Math. Ann. 44, 1893.

Si les coordonnées du point général d'une surface peuvent s'exprimer rationnellement en fonctions de deux paramètres, la surface est rationnelle.

On peut présenter ce théorème sous une autre forme, pourvu que l'on remarque que les groupes de n points (α, β) correspondants aux points (x, y, z) de notre surface, forment sur le plan une *involution*, c'est-à-dire, un système ∞^2 de groupes, dont chaque groupe est entièrement déterminé par un de ses points:

Toute involution sur le plan est rationnelle.

45.

Rationnalité d'une surface déduite de la connaissance d'une série, pas linéaire, de courbes.

Jusqu'ici nous nous sommes bornés à considérer des systèmes linéaires de courbes. Or il y a des cas, où la connaissance d'une série ∞^1 non-linéaire de courbes sur une surface, série telle que par le point général de la surface il passe plus d'une courbe de la série, peut suffire pour reconnaître la rationnalité de celle-ci. Voici quelques exemples:

a) Un premier exemple regarde le cas où sont rationnelles les courbes de la série, ainsi que la série elle-même (en y considérant la courbe comme élément): on a alors le théorème suivant qui se déduit sur le champ du théorème sur les involutions planes (ainsi que celui-ci s'ensuit de celui-là):

*Toute surface qui contient une série rationnelle de courbes rationnelles, est rationnelle**).

Ce théorème comprend, comme un cas particulier, le théorème de M. Nöther, relatif aux surfaces ayant un système *linéaire* ∞^1 de courbes rationnelles; pour le retrouver il suffit, en effet, de supposer que par tout point de la surface passe une seule courbe de la série.

b) Un second théorème envisage une série dont le degré (nombre des intersections variables de deux courbes) est 1:

Toute surface qui contient une série algébrique de courbes, dont le degré est 1, *et telle que par chaque point de la surface passent* $i > 2$ *courbes de la série, est rationnelle***).

Si, les autres hypothèses restant les mêmes, on suppose $i = 2$, la surface peut se représenter birationnellement sur la variété formée

---

*) Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellitiche*, l. c.

**) Humbert, Comptes Rendus, 1893; *Sur quelques points de la théorie...*, Journal de Mathématiques 4e se, te X; Castelnuovo, *Sulla linearità delle involuzioni . . .*, Atti dell' Acc. d. Sc. di Torino, vol. 28, 1893.

ar les couples de points d'une courbe, dont le genre est égal à celui e la série.

c) Au théorème qui précède se rattache le suivant*):

Qu'il existe sur une surface deux séries algébriques de courbes, telles ue deux courbes générales appartenant à de séries différentes, se encontrent en un seul point variable; alors si par le point général de a surface il passe plus d'une courbe de chacune des séries, la surface est rationnelle, et les courbes des séries sont elles-mêmes rationnelles. li par le point général de la surface passe une seule courbe de la remière série, et plus d'une de la seconde, la surface peut être ransformée birationnellement en une surface réglée; si enfin par le oint passe une seule courbe de chaque série, la surface peut se reésenter sur la variété des couples de points de deux courbes.

46.

urfaces admettant un groupe continu de transformations birationnelles en elles-mêmes.

Pour accomplir, autant que possible, cette revue des résultats btenus au sujet des surfaces rationnelles, il faut que nous disons ncore quelques mots sur les surfaces qui admettent un groupe continu e transformations birationnelles en elles-mêmes, au point de vue de eur caractère rationnel.

M. Picard**) a abordé, le premier, le problème des groupes de ransformations d'une surface en elle-même, et il est parvenu à des ésultats extrêmement remarquables, qui ne trouvent pas ici leur place, ar ils concernent principalement certaines classes de surfaces irrationelles. Pour notre but il suffit en effet d'énoncer les théorèmes uivants, qui donnent l'extension naturelle du résultat bien connu de I. Schwarz relatif aux courbes:

Toute surface qui admet un groupe continu transitif de transformations birationnelles en elle-même, groupe dépendant de deux paramètres, est rationnelle, si les transformations ne sont pas échangeables eux à deux.

*Toute surface qui admet un groupe continu transitif de transformations birationnelles en elle-même, groupe dépendant de plus de deux aramètres, est rationnelle, ou bien peut se transformer en une surface églée elliptique****).

---

*) Castelnuovo, l. c.

**) Voir les Mémoires cités dans l'Introduction.

***) Castelnuovo et Enriques, Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc. 1895; oir aussi dans le même recueil (1895) une Note de M. Painlevé. Au sujet des

47.

Plans doubles du genre un.

Dans le n° 38 nous avons parlé des *plans doubles*, c'est-à-dire des champs algébriques

$$x,\ y,\ \sqrt{f(x, y)},$$

où f désigne un polynôme; nous avons énoncé les résultats de Clebsch et Nöther sur la nature de la courbe de diramation $f(x, y) = 0$, lorsque le plan double est rationnel, et en conséquence $\sqrt{f(x, y)}$ devient une fonction rationnelle de deux nouveaux paramètres, par une substitution rationnelle convenable sur x, y.

Le problème se pose maintenant de classifier les plans doubles supérieurs (d'après leurs courbes de diramation). Les résultats obtenus jusqu'ici sur ce sujet se bornent au cas des plans doubles, dont les genres p_n et P_2 (et par suite $p^{(1)}$, p_g, P_3 ...) ont la valeur 1. On a le théorème*):

Les plans doubles dont les genres (p_n, P_2) *ont la valeur* 1, *se répartissent en quatre classes, selon que leur courbe de diramation peut être ramenée, par une transformation birationnelle du plan, à l'une des courbes suivantes:*

1) *courbe générale de l'ordre* 6;

2) *courbe de l'ordre* 8 *douée de deux points du quatrième ordre;*

3) *courbe de l'ordre* 10 *douée d'un point de l'ordre* 7 *et de deux points triples infiniment prochains à celui-là;*

4) *courbe de l'ordre* 12 *douée d'un point de l'ordre* 9 *et de trois points triples infiniment prochains à celui-là.*

Florence, 13. février 1896.

énoncés que nous rapportons ici, il est bon de remarquer que nous appelons *transitif* (d'après M. Lie) un groupe qui puisse changer un point en un autre point arbitrairement fixé; et que le second théorème dit un peu plus de celui qu'on trouve dans les Comptes Rendus.

*) Enriques, *Sui piani doppi di genere uno*, l. c.

Sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre.

Par

A. Korkine à St. Pétersbourg.

De toutes les parties du calcul intégrale, qui ont été l'objet des travaux systématiques des géomètres, la plus imparfaite est certainement celle, qui s'occupe des équations différentielles.

La grande généralité des questions, qui s'y présentent, les innombrables particularités relatives aux différents cas et principalement le manque des methodes de calcul ne permettent pas encore de faire une théorie générale de quelque classe que ce soit de telles équations.

Les anciens géomètres et surtout l'immortel Euler, en vue de multiplier des matériaux, se sont occupés de rechercher des équations intégrables au moyen des signes mathématiques usités et des signes des quadratures. Ils nous ont laissé des exemples admirables, où l'ingéniosité de l'analyse témoigne assez de la sagacité des auteurs.

Dans ces derniers temps on a essayé d'appliquer aux équations différentielles la théorie des fonctions d'une variable complexe, résultant elle même de l'étude des fonctions algébriques et de leurs intégrales. Mais, avec la grande généralité de ses théorèmes, elle a aussi une imperfection essentielle; à savoir, le défaut des methodes pour le calcul des fonctions inconnues. Or, ce calcul est la véritable intégration d'une équation, et le but définitif de son analyse.

Pour avancer dans l'intégration des équations différentielles la seule théorie des fonctions ne suffira donc pas; à cet effet il faut y associer des considérations, qui lui sont complètement étrangères.

Je pense donc, qu'ayant pour but le calcul des inconnus, nous n'avons jusqu'à présent d'autre moyen que de suivre la marche des anciens géomètres, c'est à dire, en nous bornant à l'étude attentive des équations particulières, rechercher de nouvelles équations intégrables; et cela d'autant plus, que des cas particuliers très simples, traités convenablement, peuvent conduire à des conclusions très générales.

Pour faire un essai dans cette voie, je prends une des plus simples équations différentielles dont Euler s'est occupé; c'est l'équation

$$y\,dy + (P + Qy)\,dx = 0.$$

En étudiant les formes sous lesquelles se présente son intégrale générale, on en trouve une, qui est très remarquable.

En effet dans bien des cas, comme cela résulte des recherches d'Euler, elle est donnée par l'équation

$$(y - v_1)^{m_1}(y - v_2)^{m_2} \ldots (y - v_n)^{m_n} = C, \tag{2}$$

où $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont des constantes données dont aucune n'est égale à zéro, C une constante arbitraire et $v_1, v_2, \ldots, v_n$ des fonctions de x, différentes entre elles.

Je me propose d'abord, en supposant le nombre n de facteurs donné, d'ailleurs quelconque, de trouver toutes les équations différentielles

$$y\,dy + (P + Qy)\,dx = 0,$$

qui admettent une intégrale générale de cette forme et en même temps de déterminer $v_1, v_2, \ldots, v_n$ comme fonctions de x.

Parmi les travaux des autres géomètres relatifs à l'équation d'Euler et lui semblables je citerai celui d'Abel *). Ce géomètre a trouvé plusieurs formes des multiplicateurs et réduit à cette équation une autre

$$(y + s)\,dy + (p + qy + ry^2)\,dx = 0$$

plus générale.

En prenant la fonction

$$-\int Q\,dx$$

pour une nouvelle variable indépendante, que nous continuerons de désigner par x, on réduit l'équation d'Euler à une autre

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{R(x)}{y} \tag{1}$$

plus simple et qui est lui équivalente.

Minding **) dans un mémoire remarquable donne des théorèmes généraux très importants concernant les multiplicateurs de certaines équations, dont celle d'Euler est un cas particulier, et il ajoute plusieurs exemples nouveaux à ceux d'Euler.

L'équation (1) a fait dernièrement le sujet d'une dissertation de M. Koïalovicz ***) en langue russe. Il se propose cette question: étant

*) Abel. Oeuvres complètes. Nouvelle édition. Tome II. page 26.

**) Minding. Beiträge zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung. Mémoires de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg. VII^e série. Tome V. n° 1. 1862.

***) Koïalovicz. Recherches sur l'équation différentielle $ydy - ydx = Rdx$. 1894.

nnée la fonction $R(x)$, reconnaître, si l'équation (1) est intégrable us la forme (2). Il considère principalement le cas, où $R(x)$ est somme d'un nombre fini de termes de la forme ax^λ. Quoique . Koïalovicz ne soit pas parvenu à la solution complète de la question, a trouvé, en se servant des séries, plusieurs résultats intéressants ncernant la fonction $R(x)$, le nombre n de facteurs de l'intégrale nérale et les constantes λ.

Après avoir résolu le problème que je me suis proposé pour quation d'Euler, je passe à l'équation

$$M(y)\,dx + N(y)\,dy = 0,$$

(y) et $N(y)$ étant des fonctions entières de y dont les coëfficients nt des fonctions quelconques de x.

Pour conserver l'analogie avec l'équation d'Euler, je fais les strictions suivantes: je suppose que le degré du polynôme $M(y)$ ne it pas supérieur à celui de $N(y)$ et que l'équation $N(y) = 0$, en y gardant y comme inconnu, n'ait pas de racines multiples.

Je me propose, relativement à l'équation

$$M(y)\,dx + N(y)\,dy = 0,$$

résoudre le même problème, à savoir, de trouver tous les cas, où e est intégrable sous la forme (2).

On pourrait par la même methode traiter cette équation en n'y sant point les restrictions mentionnées, mais je me bornerai pour présent au cas particulier précédent, qui est lui même assez général, me proposant de revenir sur ce sujet dans une autre occasion.

Les résultats trouvés pour l'équation d'Euler reparaissent avec elques modifications dans la recherche sur l'équation

$$M(y)\,dx + N(y)\,dy = 0.$$

, résolution du problème se réduit à l'intégration des systèmes d'équa- ns différentielles simultanées, dont le nombre dépend de n et par nséquent reste indéterminé, quand n est arbitraire.

Je me contente de réduire le calcul des inconnus à la résolution s équations finies et aux éliminations, dont l'analyse appartient à lgèbre.

§ 1.

Soit x la variable indépendante et R une fonction de x; proposons us de trouver toutes les valeurs de R telles que l'équation

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{R}{y}$$

une intégrale générale de la forme

$$P(y - v_1)^{m_1}(y - v_2)^{m_2} \ldots (y - v_n)^{m_n} = C,$$

où P est une fonction de x, la signification des autres lettres ayant été expliquée ci-dessus.

La condition nécessaire et suffisante pour que cela ait lieu consiste dans l'égalité de la valeur de $\frac{dy}{dx}$, qui se déduit de l'équation (2) par la différentiation, à celle, qui est donnée par l'équation (1).

Faisons pour abréger

$$\frac{dP}{dx} = P', \quad \frac{dv_i}{dx} = v_i', \quad \frac{dy}{dx} = y';$$

alors, en prenant les logarithmes des deux termes de l'équation (2), et en différentiant on aura

$$\frac{P'}{P} - \sum \frac{m_i v_i'}{y - v_i} + y' \sum \frac{m_i}{y - v_i} = 0,$$

où les sommes se rapportent à l'indice i, qui parcourt les valeurs $1, 2, 3, \ldots, i$.

En comparant la valeur de y' tirée de cette équation à $1 + \frac{R}{y}$ que donne l'équation (1), on aura la condition mentionnée dans l'égalité

$$(3) \qquad -\frac{P'}{P} + \sum \frac{m_i v_i'}{y - v_i} = \left(1 + \frac{R}{y}\right) \sum \frac{m_i}{y - v_i},$$

qui doit être identique.

Or en la débarrassant des dénominateurs, on voit que le coefficient de y^{n+1} est $-\frac{P'}{P}$ dans le premier terme et zéro dans le second. Donc il faut qu'il soit $P' = 0$ et P une constante.

On peut faire $P = 1$ et les équations (2) et (3) deviennent

$$(2) \qquad (y - v_1)^{m_1} (v - v_2)^{m_2} \ldots (y - v_n)^{m_n} = C,$$

$$(3) \qquad \sum \frac{m_i v_i'}{y - v_i} = \left(1 + \frac{R}{y}\right) \sum \frac{m_i}{y - v_i}.$$

Faisons pour abréger

$$F(y) = (y - v_1)(y - v_2) \cdots (y - v_n)$$
$$= y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \cdots + a_{n-1} y + a_n,$$

de sorte que

$$(4) \quad a_1 = -(v_1 + v_2 + \cdots + v_n),$$
$$a_2 = v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_2 v_3 + \cdots, \quad \cdots a_n = (-1)^n v_1 v_2 \cdots v$$

et posons encore

$$(5) \qquad \sum \frac{m_i}{y - v} = \frac{F_1(y)}{F(y)}.$$

umérateur $F_1(y)$ est une fonction entière de y, n'ayant aucun
ır commun, entier en y, avec le dénominateur $F(y)$.
En multipliant l'équation (3) par $F(y)$ et en ayant égard à
tion (5), dans le premier terme on aura une fonction entière de
le second se présentera sous la forme

$$(y + R)\frac{F_1(y)}{y}.$$

étant supposé différent de zéro, il faut que $F_1(y)$ soit divisible
. Pour qu'elle satisfasse à cette condition il faut et il suffit que
it $F_1(0) = 0$. Cela se réduit en vertu de l'égalité (5) à l'équation

$$\sum \frac{m_i}{v_i} = 0.$$

équation se trouve dans la dissertation de M. Koïalovicz.
faisons abstraction du cas, où R est une constante, car alors
tion proposée (1) est intégrable par la séparation des variables
ntégrale générale ne se présente pas sous la forme (2).
Cela posé, il est évident, que les valeurs de v_1', v_2' . . . v_n' sont
entes de zéro. En effet en supposant $v_i' = 0$, il suit de l'équation
ue $v_i = -R$ et R est une constante, ce qui n'a pas lieu.
plions maintenant l'équation (3) par $y - v_i$ et faisons ensuite
v_i; il viendra

$$v_i' = 1 + \frac{R}{v_i} \cdot \cdot \cdot \quad (i = 1, 2, 3, \cdot \cdot \cdot, n).$$

Ainsi les fonctions $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont des solutions de l'équation
entielle (1), ce qui suit encore de l'intégrale générale (2). Ce
at est un cas particulier de celui qu'a démontré Minding pour les
plicateurs des équations du premier ordre*).
es $n + 1$ équations (6) et (7) peuvent remplacer la condition
t sont par conséquent non seulement nécessaires, mais encore
ntes.
En effet supposons qu'elles soient satisfaites par les valeurs de
, . . ., v_n; alors en faisant

$$F_1(y) = y\varphi(y),$$

it, qu'en vertu de l'équation (6), $\varphi(y)$ sera une fonction entière
Or comme on a

$$\sum \frac{m_i}{y - v_i} = \frac{F_1(y)}{F(y)} = \frac{y\varphi(y)}{F(y)},$$

) Beiträge zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung.
ires de l'Academie des sciences de St. Pétersbourg VII^e série. Tome V.
1862.

on en déduit

$$m_i = \frac{F_1(v_i)}{F'(v_i)} = \frac{v_i \varphi(v_i)}{F'(v_i)}, \tag{8}$$

$F'(v_i)$ étant la valeur de $\frac{\partial F(y)}{\partial y}$ pour $y = v_i$. Ensuite en vertu de cette équation on a

$$\sum \frac{m_i}{v_i(y-v_i)} = \sum \frac{\varphi(v_i)}{F'(v_i)(y-v_i)} = \frac{\varphi(y)}{F(y)} = \frac{1}{y}\sum \frac{m_i}{y-v_i}.$$

Or $v_1, v_2, \ldots, v_n$ satisfaisant aux équations (7), cette égalité donne

$$\sum \frac{m_i v_i'}{y-v_i} = \sum \frac{m_i\left(1+\frac{R}{v_i}\right)}{y-v_i} = \sum \frac{m_i}{y-v_i} + R\sum \frac{m_i}{v_i(y-v_i)}$$
$$= \left(1+\frac{R}{y}\right)\sum \frac{m_i}{y-v_i},$$

ce qui est l'équation (3).

Il est évident d'ailleurs que la fraction

$$\frac{\varphi(y)}{F(y)} = \frac{1}{y}\sum \frac{m_i}{y-v_i} = \frac{1}{y+R}\sum \frac{m_i v_i'}{y-v_i}$$

est un multiplicateur de l'équation (1), car en présentant cette dernière sous la forme

$$y\,dy - (y+R)\,dx = 0$$

et en multipliant par $\frac{\varphi(y)}{F(y)}$, on aura

$$\frac{d}{dx}\sum m_i \log(y-v_i) = 0.$$

De là on obtient l'équation (2).

On peut donc énoncer ce résultat:

Pour que l'équation (1) ait une intégrale générale (2), il faut et il suffit que la fonction

$$F_1(y) = (y-v_1)(y-v_2)\cdots(y-v_n)\sum \frac{m_i}{y-v_i}$$

soit divisible par y et que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ soient des solutions de l'équation (1).

§ 2.

Il suit de la condition

$$\frac{m_1}{v_1} + \frac{m_2}{v_2} + \cdots + \frac{m_{n-1}}{v_{n-1}} + \frac{m_n}{v_n} = 0, \tag{6}$$

que l'une des quantités $v_1, v_2, \ldots, v_n$ est une fonction des autres.

Nous regarderons v_n comme fonction de $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$; sa leur sera donc

)
$$v_n = -\frac{m_n}{\frac{m_1}{v_1}+\frac{m_2}{v_2}+\cdots+\frac{m_{n-1}}{v_{n-1}}}.$$

Or cela impose à R une forme déterminée comme fonction de , $v_2, \ldots, v_{n-1}$.

En effet la valeur (9) de v_n doit satisfaire à l'équation (1).

En différentiant l'équation (6) on aura

$$v_n' = -\frac{v_n^2}{m_n}\left(m_1\frac{v_1'}{v_1^2}+m_2\frac{v_2'}{v_2^2}+\cdots+m_{n-1}\cdot\frac{v_{n-1}'}{v_{n-1}^2}\right).$$

ésignons par k un des nombres $1, 2, 3, \ldots, n-1$; alors des uations (7) on déduit

$$m_k\cdot\frac{v_k'}{v_k^2} = \frac{m_k}{v_k^2}+R\frac{m_k}{v_k^3}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation précédente on aura

$$' = -\frac{v_n^2}{m_n}\left[\frac{m_1}{v_1^2}+\frac{m_2}{v_2^2}+\cdots+\frac{m_{n-1}}{v_{n-1}^2}+R\left(\frac{m_1}{v_1^3}+\frac{m_2}{v_2^3}+\cdots+\frac{m_{n-1}}{v_{n-1}^3}\right)\right],$$

n bien,

$$v_n' = -\frac{v_n^2}{m_n}\left(\sum\frac{m_i}{v_i^2}+R\sum\frac{m_i}{v_i^3}\right)+1+\frac{R}{v_n}.$$

our que v_n satisfasse à l'équation

$$v_n' = 1+\frac{R}{v_n},$$

$v_2, \ldots v_{n-1}$ étant des solutions de l'équation (1), il faut et il suffit il soit

$$\sum\frac{m_i}{v_i^2}+R\sum\frac{m_i}{v_i^3} = 0.$$

déduit de là

)
$$R = -\frac{\sum\frac{m_i}{v_i^2}}{\sum\frac{m_i}{v_i^3}},$$

quantité v_n ayant dans cette formule la valeur (9)*).

*) Je remarque en passant, que si l'on donne la fonction R et le nombre n, uation (9) suffira en général pour trouver $v_1, v_2, \ldots v_n$ comme fonction de x aussi les rapports constants

La question que nous nous sommes proposée consiste donc maintenant dans la recherche des valeurs de $v_1, v_2, \ldots v_{n-1}$. Or $v_1, v_2, \ldots v_{n-1}$ étant des solutions de l'équation (1), qu'on peut présenter sous la forme

$$yy' - y = R$$

et R ayant la valeur (10), tout se réduit à l'integration de ce système d'équations simultanées

$$(11)\quad v_1v_1' - v_1 = v_2v_2' - v_2 = \cdots = v_{n-1}v_{n-1}' - v_{n-1} = -\frac{\sum \frac{m_i}{v_i^3}}{\sum \frac{m_i}{v_i^4}}.$$

Nous allons supposer que le nombre entier n soit donnée, mais d'ailleurs quelconque. Il ne doit seulement pas être inférieur à deux.

Les constantes $m_1, m_2, \ldots m_n$ sont arbitraires; nous les regarderons comme des quantités données.

Cela posé, les équations (11) ont une infinité de solutions, car $v_1, v_2, \ldots v_{n-1}$ dépendent non seulement de x, mais aussi de $n-1$ constantes arbitraires indépendantes.

Pour avoir ces valeurs de $v_1, v_2, \ldots v_{n-1}$, il suffit de trouver un système complet de $n-1$ intégrales indépendantes des équations (11).

Pour une valeur donnée de x on peut assigner arbitrairement les valeurs de $v_1, v_2, \ldots v_{n-1}$. Il s'en suit que toute équation entre elles et x ne contenant pas de constantes arbitraires doit être identique,

---

En effet alors les dérivées $R', R'', \ldots$ sont des fonctions connues. En différentiant donc l'équation (9) un nombre suffisant de fois et en se servant de la formule (δ) du § 4 pour éliminer après chaque différentiation les derivées des sommes $\sum \frac{m_i}{v_i^s}$ on aura les équations

$$(\gamma)\quad \begin{cases} \sum \frac{m_i}{v_i^2} + R \sum \frac{m_i}{v_i^3} = 0, \\ \sum \frac{m_i}{v_i^3} + 5R \sum \frac{m_i}{v_i^4} + 3R^2 \sum \frac{m_i}{v_i^5} - R' \sum \frac{m_i}{v_i^3} = 0 \text{ etc.} \end{cases}$$

En y associant l'équation (6) on définira $v_1, v_2, \ldots v_n$ et les rapports mentionnés comme fonctions de x. Or ces rapports doivent être des constantes. Si quelqu'un d'entre eux ne l'est donc pas, c'est le signe que l'équation (2) n'est point une intégrale générale de l'équation différentielle (1). Si c'est le contraire, qui arrive, on s'assurera si les valeurs trouvées de $v_1, v_2, \ldots v_n$ sont des solutions de l'équation (1), et lorsqu'elles le sont cette intégrale générale est exprimée par l'équation

$$(y - v_1)^{\frac{m_1}{m_n}} (y - v_2)^{\frac{m_2}{m_n}} \cdots (y - v_{n-1})^{\frac{m_{n-1}}{m_n}} (y - v_n) = C.$$

Enfin si parmi les équations (γ) il y en a, qui sont des conséquences des autres et qu'elles ne donnent pas les valeurs de $v_1, v_2, \ldots v_n$ et des rapports mentionnés, leur comparaison avec les résultats énoncés au § 11 résout toujours la question.

ı, ce qui revient au même, une telle équation entre $x, v_1, v_2, \ldots v_{n-1}, v_n$ ːvient identique en vertu de l'équation (6).

S'il arrive cependant pour des valeurs particulières de cas constantes, ıe quelques unes des quantités $v_1, v_2, \ldots v_n$ deviennent égales, le ɔmbre des facteurs dans l'équation (2) sera inférieur à n; par conséquent ɔus faisons abstraction de ce cas, ayant pour but de trouver $v_1, v_2, \ldots v_n$, ıi se rapportent précisement au nombre n.

§ 3.

Passons maintenant à la recherche des intégrales du système (11).

Il y en a une qui est évidente. En effet, si nous présentons ɨquation (5) sous la forme

$$y\,F(y)\sum\frac{m_i v_i'}{y-v_i}=(y+R)\,F(y)\sum\frac{m_i}{y-v_i}=(y+R)\,F_1(y)$$

, que nous comparons les coefficients de y^n dans les deux termes, ous aurons

$$\sum m_i v_i' = \sum m_i$$

t de là il vient

$$\sum m\,v_i = x\sum m_i + C',$$

′ étant une constante arbitraire.

Il existe encore une autre intégrale qu'on déduira directement des ɪuations (7)

En effet, i et k étant deux indices différents, on a

$$v_i' = 1+\frac{R}{v_i}, \qquad v_k' = 1+\frac{R}{v_k}$$

par conséquent

$$v_i' - v_k' = -\frac{R}{v_i v_k}(v_i - v_k).$$

n obtient de là

$$\frac{d}{dx}\log\left[(v_i-v_k)^{m_k}\right] = -\,R\,\frac{m_k}{v_i v_k}.$$

Laissons i invariable et faisons parcourir à k toutes les valeurs $2, 3, \ldots n$ à l'exception de i. Nous aurons $n-1$ équations, qui, ant ajoutées ensemble, donnent

$$\log\left[(v_i-v_1)^{m_1}(v_i-v_2)^{m_2}\cdots(v_i-v_{i-1})^{m_{i-1}}(v_i-v_{i+1})^{m_{i+1}}\cdots(v_i-v_n)^{m_n}\right]$$
$$= -\,R\,\frac{1}{v_i}\left(\frac{m_1}{v_1}+\frac{m_2}{v_1}+\cdots+\frac{m_{i-1}}{v_{i-1}}+\frac{m_{i+1}}{v_{i+1}}+\cdots+\frac{m_n}{v_n}\right).$$

Or en vertu de la condition (6) on a

$$\frac{m_1}{v_1}+\frac{m_2}{v_2}+\cdots+\frac{m_{i-1}}{v_{i-1}}+\frac{m_{i+1}}{v_{i+1}}+\cdots+\frac{m_n}{v_n} = -\frac{m_i}{v_i}$$

et de l'équation (7) il suit

$$R\frac{m_i}{v_i^2} = \frac{m_i v_i'}{v_i} - \frac{m_i}{v_i} = \frac{d\log\left(v_i^{m_i}\right)}{dx} - \frac{m_i}{v_i};$$

donc on obtient

$$\frac{d}{dx}\log[(v_i-v_1)^{m_1}(v_i-v_2)^{m_2}\cdots(v_i-v_{i-1})^{m_{i-1}}(v_i-v_{i+1})^{m_{i+1}}\cdots(v_i-v_n)^{m_n}]$$
$$= \frac{d\log\left(v_i^{m_i}\right)}{dx} - \frac{m_i}{v_i}.$$

Faisons ici successivement $i = 1, 2, 3, \ldots n$ et ajoutons les résultats. Si nous désignons par

$$\Pi(v_i - v_j)^{m_i+m_j}$$

le produit des valeurs $(v_i - v_j)^{m_i+m_j}$ étendu à toutes les $\frac{n(n-1)}{2}$ différentes combinaisons des indices i et j pris de la suite $1, 2, 3, \ldots n$ et que nous ayons égard à l'équation (6), nous aurons

$$\log\left[\frac{\Pi(v_i-v_j)^{m_i+m_j}}{v_1^{m_1}v_2^{m_2}\cdots v_n^{m_n}}\right] = \text{Const.},$$

ou bien

$$\frac{\Pi(v_i-v_j)^{m_i+m_j}}{v_1^{m_1}v_2^{m_2}\cdots v_n^{m_n}} = A, \tag{13}$$

A étant une constante arbitraire.

§ 4.

Les autres intégrales du système (11) dépendent des racines de l'équation

$$\varphi(y) = \frac{1}{y}F_1(y) = \frac{F(y)}{y}\sum\frac{m_i}{y-v_i} = 0.$$

En faisant

$$F_1(y) = b_0y^{n-1} + b_1y^{n-2} + b_2y^{n-3} + \cdots + b_{n-2}y^2 + b_{n-2}y + b_{n-1},$$

on aura facilement

$$(14)\quad \begin{cases} b_0 = \Sigma m_i, \\ b_1 = \Sigma m_i v_i + a_1\Sigma m_i, \\ b_2 = \Sigma m_i v_i^2 + a_1\Sigma m_i v_i + a_2\Sigma m_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n-3} = \Sigma m_i v_i^{n-3} + a_1\Sigma m_i v_i^{n-4} + a_2\Sigma m_i v_i^{n-5} + \cdots + a_{n-3}\Sigma m_i, \\ b_{n-2} = \Sigma m_i v_i^{n-2} + a_1\Sigma m_i v_i^{n-3} + a_2\Sigma m_i v_i^{n-4} + \cdots + a_{n-3}\Sigma m_i v_i + a_{n-2}\Sigma m_i, \\ b_{n-1} = \Sigma m_i v_i^{n-1} + a_1\Sigma m_i v_i^{n-2} + a_2\Sigma m_i v_i^{n-3} + \cdots + a_{n-1}\Sigma m_i. \end{cases}$$

où $a_1, a_2, \ldots a_n$ ont les valeurs (4).

Il est maintenant évident que $F_1(y)$ est divisible par y, car nous avons

$$b_{n-1} = \sum m_i [v_i^{n-1} + a_1 v_i^{n-2} + a_2 v_i^{n-3} + \cdots + a_{n-2} v_i + a_{n-1}]$$
$$= \sum m_i \frac{F(v_i) - a_n}{v_i} = \sum m_i \frac{F(v_i)}{v_i} - a_n \sum \frac{m_i}{v_i}.$$

Or $F(v_i) = 0$ et en vertu de l'équation (6) on a $\sum \frac{m_i}{v_i} = 0$, donc $b_{n-1} = 0$.

La fonction $\varphi(y)$ aura ainsi la valeur

$$\varphi(y) = b_0 y^{n-2} + b_1 y^{n-3} + b_2 y^{n-4} + \cdots + b_{n-3} y + b_{n-2}.$$

Il est facile de voir, que $\varphi(y)$ n'est pas divisible par y, ou, ce qui revient au même, que b_{n-2} est différent de zéro.

En effet, en ayant égard à l'équation (6), on peut donner une autre forme aux coefficients $b_0, b_1, b_2, \ldots b_{n-3}, b_{n-2}$.

Nous avons

$$b_{n-2} = \sum m_i [v_i^{n-2} + a_1 v_i^{n-3} + \cdots + a_{n-3} v_i + a_{n-2}]$$
$$= \sum m_2 \cdot \frac{F(v_i) - a_{n-1} v_i - a_n}{v_i^2}$$
$$= \sum m_i \frac{F(v_i)}{v_i^2} - a_{n-1} \sum \frac{m_i}{v_i} - a_n \sum \frac{m_i}{v_i}$$
$$= - a_n \sum \frac{m_i}{v_i^2},$$

et ainsi de suite.

On aura donc

$$(15) \begin{cases} b_{n-2} = - a_n \sum \frac{m_i}{v_i^2}, \\ b_{n-3} = - a_{n-1} \sum \frac{m_i}{v_i^2} - a_n \sum \frac{m_i}{v_i^3}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_1 = - a_3 \sum \frac{m_i}{v_i^2} - a_4 \sum \frac{m_i}{v_i^3} - \cdots - a_n \sum \frac{m_i}{v_i^{n-1}}, \\ b_0 = \sum m_i = - a_2 \sum \frac{m_i}{v_i^2} - a_3 \sum \frac{m_i}{v_i^3} - \cdots - a_{n-1} \sum \frac{m_i}{v_i^{n-1}} \\ \qquad\qquad - a_n \sum \frac{m_i}{v_i^n}. \end{cases}$$

Si maintenant on suppose $b_{n-2} = 0$, on aura

$$\sum \frac{m_i}{v_i^2} = 0,$$

car $a_n = (-1)^n v_1 v_2 \dots v_n$ est différent de zéro, les quantités $v_2, v_2, \dots v_n$ étant des solutions de l'équation (1).

De l'équation

$$\sum \frac{m_i}{v_i^2} + R \sum \frac{m_i}{v_i^3} = 0,$$

où R diffère de zéro, on obtient encore

$$\sum \frac{m_i}{v_i^3} = 0.$$

Or en multipliant par $m_i v_i^{\alpha-1}$ l'équation

$$v_i' = 1 + \frac{R}{v_i}, \tag{7}$$

faisant ensuite $i = 1, 2, 3, \dots n$ et ajoutant, on aura

$$\sum m_i v_i^{\alpha-1} v_i' = \sum m_i v_i^{\alpha-1} + R \sum m_i v_i^{\alpha-2},$$

ou bien, en supposant que la constante α diffère de -1,

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d}{dx} \sum m_i v_i^{\alpha} = \sum m_i v_i^{\alpha-1} + R \sum m_i v_i^{\alpha-2}. \tag{8}$$

Faisons ici

$$\alpha = -2, -3, -4, \dots;$$

alors en vertu des équations

$$\sum \frac{m_i}{v_i^2} = 0, \quad \sum \frac{m_i}{v_i^3} = 0,$$

on obtiendra

$$\sum \frac{m_i}{v_i^s} = 0,$$

s étant un entier positif quelconque.

Il s'en suit que tous les coefficients

$$b_0, b_1, b_2, \dots b_{n-3}, b_{n-2}$$

s'évanouissent et que $\varphi(y)$ se réduit à zéro quelque soit y.

Or cela est impossible, car on aurait pour toute valeur de y

$$\frac{y\varphi(y)}{F(y)} = \sum \frac{m_i}{y - v_i} = 0$$

et par conséquent l'intégrale générale

$$\sum m_i \log (y - v_i) = \log C$$

de l'équation (1), dont la dérivée par rapport à y est identiquement zéro, ne dépendrait point de y. Donc la fonction $\varphi(y)$ n'est pas divisible par y.

§ 5.

Les racines de l'équation $\varphi(y) = 0$ sont des fonctions complètement déterminées de $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ la fonction v_n dans les coefficients $b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}$ ayant la valeur

$$v_n = -\frac{m_n}{\frac{m_1}{v_1} + \frac{m_2}{v_2} + \cdots + \frac{m_{n-1}}{v_{n-1}}}. \tag{)}$$

On peut démontrer qu'elles sont inégales, si les constantes arbitraires qu'elles contiennent, restent indéterminées. En effet supposons le contraire.

La fonction $\varphi(y)$ étant du degré $n-2$ au plus, il faut que n soit supérieur à trois, pour que l'équation $\varphi(y) = 0$ puisse avoir des racines multiples. Soit donc y une telle racine. Elle satisfaira à deux équations

$$\frac{y\varphi(y)}{F(y)} = \sum \frac{m_i}{y - v_i} = 0, \tag{6)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\sum \frac{m_i}{y - v_i} = -\sum \frac{m_i}{(y - v_i)^2} = 0. \tag{7)}$$

Différentions l'équation (16) par rapport à v_k, l'indice k ayant une des valeurs $1, 2, 3, \ldots, n-1$. Nous aurons

$$\frac{m_k}{(y - v_k)^2} + \frac{m_n}{(y - v_n)^2}\frac{\partial v_n}{\partial v_k} - \frac{\partial y}{\partial v_k}\sum \frac{m_i}{(y - v_i)^2} = 0.$$

Or de l'équation (9) on déduit

$$\frac{\partial v_n}{\partial v_k} = -\frac{m_k v_n^2}{m_n v_k^2};$$

donc, en vertu de l'équation (17), il viendra

$$\frac{m_k}{(y - v_k)^2} - \frac{m_k v_n^2}{v_k^2 (y - v_n)^2} = 0,$$

ou bien

$$\frac{v_k^2}{(y - v_k)^2} = \frac{v_n^2}{(y - v_n)^2}.$$

En attribuant à k les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n-1$, nous aurons

$$\frac{v_n}{y - v_n} = \pm\frac{v_1}{y - v_1} = \pm\frac{v_2}{y - v_2} = \cdots = \pm\frac{v_{n-1}}{y - v_{n-1}}.$$

Or il est évident, qu'on ne peut pas faire

$$\frac{v_1}{y - v_1} = \frac{v_2}{y - v_2},$$

cette équation se réduisant à

$$y(v_1 - v_2) = 0,$$

où y et $v_1 - v_2$ diffèrent de zéro. Il faut donc qu'il soit

$$\frac{v_1}{y - v_1} = -\frac{v_2}{y - v_2}$$

et par la même raison

$$\frac{v_1}{y - v_1} = -\frac{v_3}{y - v_3}.$$

Or de là il résulte l'équation impossible

$$\frac{v_2}{y - v_2} = \frac{v_3}{y - v_3}.$$

Donc l'équation $\varphi(y) = 0$ n'a pas de racines multiples. Pour des valeurs particulières des constantes arbitraires elles sont au contraire possibles.

§ 6.

Toutes les racines de l'équation $\varphi(y) = 0$ sont des solutions de l'équation différentielle

$$y' = 1 + \frac{R}{y}. \tag{1}$$

En effet soit y une d'entre elles. On aura

$$\frac{y\varphi(y)}{F(y)} = \sum \frac{m_i}{y - v_i} = 0. \tag{18}$$

Or y n'étant pas égal à zéro, en vertu de l'équation

$$\sum \frac{m_i v_i'}{y - v_i} = \left(1 + \frac{R}{y}\right) \sum \frac{m_i}{y - v_i}, \tag{3}$$

on obtient

$$\sum \frac{m_i v_i'}{y - v_i} = 0.$$

En ayant égard à cette équation, on déduit de l'équation (18)

$$y' \sum \frac{m_i}{y - v_i} = \sum \frac{m_i(y' - v_i') + m_i v_i'}{y - v_i}$$

$$= \sum \frac{m_i(y' - v_i')}{y - v_i} + \sum \frac{m_i v_i'}{y - v_i} = \sum \frac{m_i(y' - v_i')}{y - v_i} = 0.$$

On obtient de là, en intégrant

$$\sum m_i \log(y - v_i) = \text{Const.} \tag{19}$$

ou bien

$$(y - v_1)^{m_1} (y - v_2)^{m_2} \ldots (y - v_n)^{m_n} = \text{Const.} \tag{20}$$

La racine y est donc une solution particulière de l'équation différentielle (1).

Il est évident que la constante dans le second terme de l'équation (19) est arbitraire. On le voit de ce que le premier terme contient les $n-1$ constantes arbitraires, qui figurent dans $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n$ et par conséquent dans y. D'ailleurs on s'en assure facilement de cette manière:

Supposons que la constante mentionnée soit un nombre déterminé ou une fonction de $m_1, m_2, \ldots, m_n$ qui ne contient aucune constante arbitraire. L'équation (19) devient alors identique en vertu de la valeur (9) de v_n et de l'équation (18).

En regardant v_n et y comme fonctions de $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, différentions l'équation (19) par rapport à v_k; nous aurons

$$-\frac{m_k}{y-v_k}-\frac{m_n}{y-v_n}\frac{\partial v_n}{\partial v_k}+\frac{\partial y}{\partial v_k}\sum\frac{m_i}{y-v_i}=0.$$

Mais

$$\frac{\partial v_n}{\partial v_k}=-\frac{m_k v_n^2}{m_n v_k^2}, \qquad \sum\frac{m_i}{y-v_i}=0,$$

donc

$$-\frac{m_k}{y-v_k}+\frac{m_k v_n^2}{v_k^2(y-v_n)}=0.$$

Il s'en suit

$$y=\frac{v_k v_n}{v_k+v_n}.$$

En donnant à l'indice k deux valeurs, par exemple 1 et 2, on en conclut

$$v_1=v_2,$$

ce qui est inadmissible.

Ainsi chaque racine de l'équation $\varphi(y)=0$, étant substituée dans la formule (20) à la place de y donne une intégrale du système (11). Nous en aurons de cette manière autant que l'équation $\varphi(y)=0$ a des racines.

Dans le cas général, où la constante Σm_i diffère de zéro, le dégré de la fonction $\varphi(y)$ est $n-2$. Il sera $n-3$ lorsque Σm_i est égale à zéro.

Dans la recherche des valeurs générales de $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ on n'a que ces deux cas pour s'en occuper. Cependant pour des valeurs particulières des constantes arbitraires contenues dans $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ le dégre de $\varphi(y)$ peut s'abaisser encore, même jusqu'à zéro. Quoique tous ces cas soient compris dans le cas général, il est plus simple de traiter séparément les modifications des résultats qu'ils exigent. Il faut encore avoir égard aux racines multiples de l'équation $\varphi(y)=0$.

§ 7.

En considérant le cas général, supposons donc que Σm_i n'est pas égale à zéro et soient

$$w_1, w_2, \ldots, w_{n-2}$$

les $n-2$ racines de l'équation $\varphi(y) = 0$.

De l'équation (20) on obtient $n-2$ intégrales

$$(21)\quad (w_k - v_1)^{m_1}(w_k - v_2)^{m_2} \ldots (w_k - v_n)^{m_n} = C_k, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n-2).$$

En y associant les équations (6) et (12) on aura n équations pour déterminer n inconnues $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ et v_n comme fonctions de x et de $n-1$ constantes arbitraires $C', C_1, C_2, \ldots, C_{n-2}$.

Quant à l'intégrale (13) elle est dans tous les cas une fonction des intégrales (21) quelqu'en soit le nombre. Nous en parlerons donc après avoir exposé les résultats, qui se rapportent aux cas particuliers mentionnés ci-dessus. Faisons voir maintenant que les $n-1$ integrales

$$(21)\quad (w_k - v_1)^{m_1}(w_k - v_2)^{m_2} \ldots, (w_k - v_n)^{m_n}, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n-2),$$

$$(12)\qquad m_1 v_1 + m_2 v_2 + \cdots + m_n v_n - x \sum m_i$$

sont indépendentes.

En y regardant $w_1, w_2, \ldots, w_{n-2}$ et v_n comme fonctions de $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ déterminées par les équations $\varphi(y) = 0$ et

$$(9)\qquad v_n = -\frac{m_n}{\frac{m_1}{v_1} + \frac{m_2}{v_2} + \cdots + \frac{m_{n-1}}{v_{n-1}}},$$

on voit que la seule intégrale (12) contient la lettre x et par conséquent ne peut point être une fonction des intégrales (21).

Il nous faut donc démontrer que parmi ces dernières il n'y en a aucune qui soit une fonction des autres.

En ayant égard à ce qu'elles dépendent de $n-1$ variables $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, leur nombre étant $n-2$, il nous reste à prouver, que leurs déterminants fonctionnels, pris par rapport à $n-2$ de ces variables ne sont pas tous ensemble égaux à zéro. Nous allons voir que tous en sont différents.

Il est plus commode de prendre au lieu des intégrales (21) leurs logarithmes. Faisons donc pour abreger

$$\psi_\lambda = \sum m_i \log (w_\lambda - v_i),$$

l'indice λ ayant les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n-2$ et la somme se rapportant à l'indice i.

Soit encore l un indice ayant les mêmes valeurs que λ. Alors la dérivée partielle de ψ_λ par rapport à v_l sera

$$\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial v_l} + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial v_n} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial v_l} + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial w_\lambda} \cdot \frac{\partial w_\lambda}{\partial v_l}$$
$$= -\frac{m_l}{w_\lambda - v_l} - \frac{m_n}{w_\lambda - v_n}\frac{\partial v_n}{\partial v_l} + \frac{\partial w_\lambda}{\partial v_l} \cdot \sum \frac{m_i}{w_\lambda - v_i}.$$

Or on a

$$\frac{\partial v_n}{\partial v_l} = -\frac{m_l v_n^2}{m_n v_l^2}, \qquad \sum \frac{m_i}{w_\lambda - v_i} = 0;$$

donc cette dérivée devient

$$m_l\left(-\frac{1}{w_\lambda - v_l} + \frac{v_n^2}{v_l^2(w_\lambda - v_n)}\right) = \frac{m_l}{v_l^2}\left(\frac{v_l^2}{v_l - w_\lambda} - \frac{v_n^2}{v_n - w_\lambda}\right).$$

Soit D le déterminant fonctionnel

$$\sum \pm \frac{\partial \psi_1}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial v_2} \cdots \frac{\partial \psi_{n-2}}{\partial v_{n-2}}$$

des fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-2}$ par rapport aux variables $v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}$.

Il se décompose en déterminants partiels dont les élements sont des fractions $-\frac{1}{w_\lambda - v_l}$ et $-\frac{1}{w_\lambda - v_n}$.

En effet soit

$$a_{\lambda l} = -\frac{1}{w_\lambda - v_l} = \frac{1}{v_l - w_\lambda},$$

λ désignant l'ordre de la ligne et l celui de la colonne, où se trouve l'élement $a_{\lambda l}$. Faisons

$$D_0 = \sum \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{n-2,n-2}$$

et désignons par D_l le déterminant, qu'on obtient de D_0 en remplaçant la lettre v_l par v_n, les autres lettres

$$v_1, v_2, \ldots, v_{l-1}, \quad v_{l+1}, \ldots, v_n, \quad w_1, w_2, \ldots, w_{n-2}$$

restant sur leurs places. On aura

$$(22) \quad D = m_1 m_2 \ldots m_{n-2} v_n^2 \left(\frac{1}{v_n^2} D_0 - \frac{1}{v_1^2} D_1 - \frac{1}{v_2^2} D_2 - \cdots - \frac{1}{v_{n-2}^2} \cdot D_{n-2}\right).$$

Trouvons d'abord l'expression de D_0, celles des autres déterminants s'en déduiront facilement.

Retranchons dans D_0 les élements de la première colonne de leurs correspondants dans les autres et dans le déterminant ainsi obtenu ceux de la première lignes de leurs correspondants dans les autres; nous aurons cette formule de réduction

$$D_0 = (-1)^{n-3} \frac{(v_1 - v_2)(v_1 - v_3) \dots (v_1 - v_{n-2})}{(v_1 - w_1)(v_1 - w_2) \dots (v_1 - w_{n-2})} \cdot \frac{(w_1 - w_2)(w_1 - w_3) \dots (w_1 - w_{n-2})}{(v_2 - w_1)(v_3 - w_1) \dots (v_{n-2} - w_1)} \cdot D_0^{(1)},$$

où

$$D_0^{(1)} = \sum \pm a_{22} a_{33} \dots a_{n-2,n-2}$$

est le déterminant qu'on obtient de D_0 en y supprimant la première ligne et la première colonne.

En applicant la même réduction à $D_0^{(1)}$ on l'exprimera en un autre déterminant

$$D_0^{(2)} = \sum \pm a_{33} a_{44} \dots a_{n-2,n-2},$$

qui se déduit de D_0 en y supprimant les deux premières lignes et les deux premières colonnes.

En continuant les réductions on parviendra à la valeur de D_0, qu'on peut représenter de cette manière

$$(23) \qquad D_0 = (-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} \left(\sum m_i\right)^{n-2} \cdot \frac{\Pi(v_k - v_{k'}) \cdot \Pi(w_k - w_{k'})}{\varphi(v_1)\varphi(v_2) \dots \varphi(v_n)} \cdot \varphi(v_{n-1})\varphi(v_n);$$

où $\Pi(v_k - v_{k'})$ et $\Pi(w_k - w_{k'})$ sont les produits de toutes les différences $v_k - v_{k'}$ et $w_k - w_{k'}$ dans lesquelles k et k' sont deux indices différents, qui parcourent les valeurs $1, 2, 3, \dots, n-2$ de telle manière qu'on a constamment $k < k'$. La fonction $\varphi(y)$ est comme précédemment

$$\varphi(y) = \sum m_i \,.\, (y - w_1)(y - w_2) \dots (y - w_n).$$

Nous allons transformer l'expression (23) de D_0, en nous servant de l'équation (8)

$$(8) \qquad m_i = \frac{v_i \varphi(v_i)}{F'(v_i)}.$$

On en obtient

$$(24) \quad \begin{cases} \varphi(v_i) = \dfrac{m_i}{v_i} F'(v_i) = \dfrac{m_i}{v_i} (v_i - v_1)(v_i - v_2) \dots \\ \qquad\qquad \dots (v_i - v_{i-1})(v_i - v_{i+1}) \dots (v_i - v_n) \\ \quad = (-1)^{i-1} \dfrac{m_i}{v_i} (v_1 - v_i)(v_2 - v_i) \dots \\ \qquad\qquad \dots (v_{i-1} - v_i)(v_i - v_{i+1})(v_i - v_{i+2}) \dots (v_i - v_n) \end{cases}$$

Par conséquent il vient

$$(25) \quad \varphi(v_1)\varphi(v_2) \dots \varphi(v_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{m_1 m_2 \dots m_n}{v_1 v_2 \dots v_n} \Pi(v_i - v_j)^2;$$

$\Pi(v_i - v_j)$ étant le produit de toutes les différences $v_i - v_j$, qu'on obtient quand les indices i et j différents entre eux parcourent les valeurs 1, 2, 3, . . ., n de telle manière que i reste constamment inférieur à j.

De même on a

$$\varphi(v_{n-1})\,\varphi(v_n) = -\frac{m_{n-1}m_n}{v_{n-1}v_n}(v_1-v_{n-1})(v_2-v_{n-1})\ldots(v_{n-2}-v_{n-1})(v_{n-1}-v_n)\times$$
$$\times(v_1-v_n)(v_2-v_n)\ldots(v_{n-2}-v_n)(v_{n-1}-v_n)$$

et encore

$$\varphi(v_{n-1})\,\varphi(v_n)\,\Pi(v_k - v_{k'}) = -\frac{m_{n-1}m_n}{v_{n-1}v_n}(v_{n-1}-v_n)\,\Pi(v_i - v_j).$$

En substituant cette valeur avec (25) dans l'expression (23) on aura

$$26)\quad D_0 = \Big(\sum m_i\Big)^{n-2}\cdot\frac{v_1v_2\ldots v_n}{m_1m_2\ldots m_n}\cdot\frac{m_{n-1}m_n}{v_{n-1}v_n}\,\frac{\Pi(w_k-w_{k'})}{\Pi(v_i-v_j)}(v_{n-1}-v_n).$$

Pour avoir maintenant D_l il faut remplacer v_l par v_n dans la formule (23). Soit P_l ce que devient $\Pi(v_k - v_{k'})$ après cette substitution. Alors on aura

$$27)\quad D_l = (-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}\Big(\sum m_i\Big)^{n-2}\frac{\Pi(w_k-w_{k'})}{\varphi(v_1)\varphi(v_2)\ldots\varphi(v_n)}P_l\,\varphi(v_{n-1})\,\varphi(v_l).$$

Pour obtenir P_l il faut supprimer dans $\Pi(v_k - v_{k'})$ les facteurs

$$(v_1-v_l)(v_2-v_l)\ldots(v_{l-1}-v_l)(v_l-v_{l+1})(v_l-v_{l+2})\ldots(v_l-v_{n-2}),$$

qui contiennent v_l et les remplacer par les autres

$$(v_1-v_n)(v_2-v_n)\ldots(v_{l-1}-v_n)(v_n-v_{l+1})(v_n-v_{l+2})\ldots(v_n-v_{n-2}) =$$
$$= (-1)^{n-l-2}(v_1-v_n)(v_2-v_n)\ldots(v_{l-1}-v_n)(v_{l+1}-v_n)\ldots(v_{n-2}-v_n).$$

De cette manière il vient

$$P_l = \frac{(-1)^{n-l-2}\Pi(v_k-v_{k'})(v_1-v_n)(v_2-v_n)\ldots(v_{l-1}-v_n)(v_{l+1}-v_n)\ldots(v_{n-2}-v_n)}{(v_1-v_l)(v_2-v_l)\ldots(v_{l-1}-v_l)(v_l-v_{l+1})(v_l-v_{l+2})\ldots(v_l-v_{n-2})}.$$

De l'équation (24) on obtient encore

$$\varphi(v_{n-1})\,\varphi(v_l) = (-1)^{n+l-3}(v_1-v_{n-1})(v_2-v_{n-1})\ldots(v_l-v_{n-1})\ldots$$
$$\ldots(v_{n-2}-v_{n-1})(v_{n-1}-v_n)(v_1-v_l)(v_2-v_l)\ldots(v_{l-1}-v_l)(v_l-v_{l+1})\ldots$$
$$\ldots(v_l-v_{n-2})(v_l-v_{n-1})(v_l-v_n).$$

Donc, après de faciles réductions, il viendra

$$P_l\,\varphi(v_{n-1})\,\varphi(v_l) = \frac{m_lm_{n-1}}{v_lv_{n-1}}(v_{n-1}-v_l)\,\Pi(v_i-v_j).$$

Cette valeur avec (25), étant substituées dans l'expression (27) de D_l, donnent

$$D_l = -\frac{v_1 v_2 \dots v_n}{m_1 m_2 \dots m_n} \cdot \frac{m_l m_{n-1}}{v_l v_{n-1}} \left(\sum m_i\right)^{n-2} \cdot \frac{\Pi(w_k - w_{k'})}{\Pi(v_i - v_j)} (v_{n-1} - v_l).$$

En faisant ici $l = 1, 2, 3, \dots, n-2$ nous aurons les valeurs de $D_1, D_2, \dots, D_{n-2}$. Substituons les avec la valeur (26) de D_0 dans l'équation (22); il viendra

$$D = \frac{(\Sigma m_i)^{n-2}}{m_n} v_1 v_2 \dots v_{n-2} v_n^3 \frac{\Pi(w_k - w_{k'})}{\Pi(v_i - v_j)}$$

$$\cdot \left[\frac{m_n}{v_n^3}(v_{n-1} - v_n) + \frac{m_1}{v_1^3}(v_{n-1} - v_1) + \frac{m_2}{v_2^3}(v_{n-1} - v_2) + \dots + \frac{m_{n-2}}{v_{n-2}^3}(v_{n-1} - v_{n-2})\right]$$

$$= \frac{(\Sigma m_i)^{n-2}}{m_n} v_1 v_2 \dots v_{n-2} v_n^3 \frac{\Pi(w_k - w_{k'})}{\Pi(v_i - v_j)}$$

$$\cdot \left[v_{n-1}\left(\sum \frac{m_i}{v_i^3} - \frac{m_{n-1}}{v_{n-1}^3}\right) - \left(\sum \frac{m_i}{v_i^2} - \frac{m_{n-1}}{v_{n-1}^2}\right)\right]$$

$$= \frac{(\Sigma m_i)^{n-2}}{m_n} v_1 v_2 \dots v_{n-2} v_n^3 \frac{\Pi(w_k - w_{k'})}{\Pi(v_i - v_j)} \left[v_{n-1} \sum \frac{m_i}{v_i^3} - \sum \frac{m_i}{v_i^2}\right].$$

En vertu de l'équation

$$R = -\frac{\sum \frac{m_i}{v_i^2}}{\sum \frac{m_i}{v_i^3}}, \tag{10}$$

nous aurons donc

$$D = \frac{(\Sigma m_i)^{n-2}}{m_n} v_1 v_2 \dots v_{n-2} v_n^3 \frac{\Pi(w_k - w_{k'})}{\Pi(v_i - v_j)} \cdot \sum \frac{m_i}{v_i^3} (v_{n-1} + R).$$

Maintenant si nous supposons $D = 0$, nous devons faire

$$v_{n-1} + R = 0,$$

les autres facteurs étant différents de zéro. Or cela est impossible, car $-R$ n'est point une solution de l'équation (1) et il devrait l'être, étant égal à v_{n-1}.

Ainsi les $n-1$ fonctions (12) et (21) forment un système complet d'intégrales indépendantes des équations (11).

§ 8.

Maintenant occupons nous des cas, où le dégré de $\varphi(y)$ devient inférieur à $n-2$. Il nous sera utile d'introduire la fonction entière de y

$$F(y)\sum \frac{m_i v_i'}{y - v_i},$$

que nous allons désigner par $F_2(y)$. Faisons

$$F_2(y) = c_0 y^{n-1} + c_1 y^{n-2} + c_3 y^{n-3} + \cdots + c_{n-2} y + c_{n-1}$$

et remarquons que $F_2(y)$ s'obtient de la fonction

$$F_1(y) = F(y) \sum \frac{m_i}{y - v_i}$$

lorsqu'on y remplace chaque constante m_i par $m_i v_i'$. On obtiendra donc par cette substitution des équations (14) les valeurs des coëfficients $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-2}, c_{n-1}$, que voici:

$$(28)\quad \begin{cases} c_0 = \Sigma m_i v_i', \\ c_1 = \Sigma m_i v_i v_i' + a_1 \Sigma m_i v_i', \\ c_2 = \Sigma m_i v_i^2 v_i' + a_1 \Sigma m_i v_i v_i' + a_2 \Sigma m_i v_i', \\ \cdots\cdots\cdots\

et encore

$$\sum m_i v_i^2 = 2C'x + C'',$$

C'' étant une nouvelle constante arbitraire.

Ainsi dans le cas, où $\Sigma m_i = 0$ et par conséquent où le dégré de $\varphi(y)$ est $n-3$, l'intégrale (12) sera remplaçée par

$$\sum m_i v_i = C'$$

et au lieu de celle qui manque dans le groupe (21) on aura

$$\sum m_i v_i^2 = 2C'x + C''.$$

Dans la recherche des valeurs générales de $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, où les constantes d'intégration restent arbitraires, il n'y a que ce seul cas particulier à considérer.

Cependant si non seulement on a $\Sigma m_i = 0$, mais encore si la constante C' prend la valeur zéro, les équations (14), (28), (29) montrent qu'on doit avoir

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = C'', \quad c_0 = 0, \quad c_1 = 0,$$
$$c_2 = \sum m_i v_i^2 v_i' = b_2 = C'',$$

donc on aura ces équations

$$\sum m_i v_i = 0, \quad \sum m_i v_i^2 = C'', \quad \sum m_i v_i^3 = 3C''x + C'''.$$

En général, si le degré de $\varphi(y)$ est $p < n-2$, on a d'abord p intégrales

$$(21) \qquad (w_k - v_1)^{m_1} (w_k - v_2)^{m_2} \ldots (w_k - v_n)^{m_n} = C_k, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, p)$$

et encore, comme le font voir les mêmes équations (14), (28), (29), les $n-p-1$ équations

$$(30) \quad \begin{cases} \sum m_i v_i = 0, \quad \sum m_i v_i^2 = 0, \ldots, \sum m_i v_i^{n-p-3} = 0, \\ \sum m_i v_i^{n-p-2} = C^{(n-p-2)}, \\ \sum m_i v_i^{n-p-1} = (n-p-1) C^{(n-p-2)} x + C^{(n-p-1)}, \end{cases}$$

où $C^{(n-p-2)}$ et $C^{(n-p-1)}$ sont des constantes arbitraires.

On a donc toujours $n-1$ équations pour déterminer $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ comme fonctions de x.

Si le degré p de la fonction $\varphi(y)$ se réduit à zéro, le groupe (21) ne contient plus aucune intégrale et il reste seulement le groupe (30). Dans ce cas au lieu de la dernière des équations (30), qui devient

$$\sum m_i v_i^{n-1} = (n-1)\, C^{(n-2)} x + C^{(n-1)},$$

il est plus simple de prendre une autre équation.

En effet on a maintenant $\varphi(y) = b_{n-2}$ et par conséquent $b_{n-3} = 0$. Or d'après les équations (15) nous avons

$$\frac{b_{n-3}}{b_{n-2}} = \frac{\sum \frac{m_i}{v_i^3}}{\sum \frac{m_i}{v_i^2}} + \frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{1}{R} - \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \cdots + \frac{1}{v_n}\right);$$

donc il vient

$$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \cdots + \frac{1}{v_n} = -\frac{1}{R}.$$

Mais des équations (7) on déduit

$$\frac{1}{v_i} = \frac{v_i' - 1}{R} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation précédente on aura

$$v_1' + v_2' + \cdots + v_n' = n - 1$$

et par conséquent

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = (n-1)\, x + C^{(n-1)}. \tag{31}$$

C'est cette équation qu'il est préférable de prendre au lieu de celle, que nous avons mentionnée.

Maintenant pour prendre en considération les racines multiples de l'équation $\varphi(y) = 0$ supposons d'abord que w_1 soit une racine de l'ordre r de multiplicité et que l'on ait

$$w_1 = w_2 = \cdots = w_r;$$

il viendra

$$\varphi'(w_1) = 0, \quad \varphi''(w_1) = 0, \ \ldots, \ \varphi^{(r-1)}(w_1) = 0,$$

les quantités $\varphi'(w_1)$, $\varphi''(w_1)$ ... étant les valeurs des dérivées

$$\frac{\partial \varphi(y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi(y)}{\partial y^2}, \ \ldots$$

pour $y = w_1$. La valeur de $\varphi^{(r)}(w_1)$ reste différente de zéro.

Dans le groupe (21) les r intégrales relatives aux valeurs $1, 2, 3, \ldots, r$ de l'indice k se réduisent à une seule

$$(w_1 - v_1)^{m_1} (w_1 - v_2)^{m_2} \cdots (w_1 - v_n)^{m_n} = C_1,$$

mais en compensation on y placera encore les $r - 1$ équations

$$\varphi'(w_1) = 0, \quad \varphi''(w_1) = 0, \ \cdots, \ \varphi^{(r-1)}(w_1) = 0,$$

de sorte que le groupe (21) conserve encore r équations pour la racine

$$w_1 = w_2 = \cdots = w_r.$$

Soit p le degré de $\varphi(y)$. Représentons p de toutes les manières possibles sous la forme d'une somme des nombres entiers positifs. Pour chaque représentation le groupe (21) a ses équations particulières.

Par exemple, g et h étant deux entiers supérieurs à l'unité, mais dont la somme $g+h$ ne surpasse pas p, nous pouvons faire p égal à $g+h$ plus une somme de $p-g-h$ unités.

Conformément à cette représentation de p, supposons que l'équation $\varphi(y)=0$ ait une racine

$$w_1 = w_2 = \cdots = w_g$$

de l'orde g de multiplicité, une autre

$$w_{g+1} = w_{g+2} = \cdots = w_{g+h}$$

de l'ordre h et $p-g-h$ racines simples

$$w_{g+h+1},\quad w_{g+h+2},\quad \ldots,\quad w_p.$$

D'après ce que nous avons dit, dans le groupe (21) il y aura p équations, distribuées de cette manière: pour la racine w_1 g équations

$$(w_1-v_1)^{m_1}(w_1-v_2)^{m_2}\ldots(w_1-v_n)^{m_n}=C_1,$$
$$\varphi'(w_1)=0,\quad \varphi''(w_1)=0,\ \ldots,\ \varphi^{(g-1)}(w_1)=0;$$

pour la racine w_{g+1} les autres en nombre h

$$(w_{g+1}-v_1)^{m_1}(w_{g+1}-v_2)^{m_2}\ldots(w_{g+1}-v_n)^{m_n}=C_{g+1},$$
$$\varphi'(w_{g+1})=0,\quad \varphi''(w_{g+1})=0,\ \cdots,\ \varphi^{(h-1)}(w_{g+1})=0;$$

et enfin pour les racines simples encore $p-g-h$ équations

$$(w_k-v_1)^{m_1}(w_k-v_2)^{m_2}\ldots(w_k-v_n)^{m_n}=C_k,$$
$$(k=g+h+1,\ g+h+2,\ \cdots,\ p).$$

Pour chaque représentation de p on aura donc un groupe particulier des équations (21). En les prenant toutes, on épuisera tous les cas, où l'équation $\varphi(y)=0$ puisse avoir des racines multiples.

Ainsi pour le degré p de la fonction $\varphi(y)$ il y aura autant de différents cas, qu'il y a de représentations mentionnées du nombre p.

§ 9.

Faisons voir maintenant que l'intégrale (13) est une fonction des intégrales (21).

Supposons donc que p soit le degré de l'équation $\varphi(y)=0$ et que $w_1, w_2, \ldots, w_p$ en soient les racines. Nous aurons

$$\varphi(y)=b_{n-p-2}(y-w_1)(y-w_2)\ldots(y-w_p),$$

b_{n-p-2} étant maintenant une constante $C^{(n-p-2)}$. Faisons, dans l'équation

$$(w_k-v_1)^{m_1}(w_k-v_2)^{m_2}\ldots(w_k-v_n)^{m_n}=C_k,$$

$k = 1, 2, 3, \ldots, p$ et multiplions les résultats. Alors en ayant égard à la valeurs précédente de $\varphi(y)$ on obtient

$$[\varphi(v_1)]^{m_1}\,[\varphi(\varphi_2)]^{m_2}\ldots[\varphi(v_n)]^{m_n} = \text{Const.}$$

En y substituant les valeurs de $\varphi(v_1), \varphi(v_2), \ldots, \varphi(v_n)$ que donne l'équation (24), on aura

$$\frac{\Pi(v_i - v_j)^{m_i + m_j}}{v_1^{m_1} v_2^{m_2} \ldots v_n^{m_n}} = \text{Const.},$$

ce qui ést l'intégrale (13).

§ 10.

Si les constantes $m_1, m_2, \ldots, m_n$ étaient des nombres réels et rationnels on pourrait les remplacer par des nombres entiers. Il suffit pour cela d'élever les deux membres de l'équation (2) à la puissance égale au plus petit dénominateur commun de $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

En supposant donc que $m_1, m_2, \ldots, m_n$ soient des entiers, faisons pour abréger

$$\omega_k = (w_k - v_1)^{m_1}(w_k - v_2)^{m_2}\ldots(w_k - v_n)^{m_n}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, p).$$

On éliminera $w_1, w_2, \ldots, w_p$ dans le groupe (21) en prenant au lieu des intégrales de ce groupe leurs fonctions symétriques, par exemple,

$$\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_p = A_1,$$

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \cdots + \omega_p^2 = A_2, \ \cdots, \ \omega_1^p + \omega_2^p + \cdots + \omega_p^p = A_p,$$

$A_1, A_2 \ldots A_p$ étant des constantes arbitraires.

Les premiers termes de ces équations, étant des fonctions symétriques rationnelles de $w_1, w_2, \ldots, w_p$, s'exprimeront rationnellement en $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}$ et par conséquent se présenteront comme fonctions rationnelles de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

En associant à ces équations celles du groupe (30) on détermine $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ comme fonctions algébriques de x.

Or il est facile de s'assurer, qu'il n'existe point de valeurs de $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, qui ne soient pas comprises dans les formules (21) et (30). Cela revient à ce que les équations différentielles (11) n'ont pas de solutions singulières.

Donc dans le cas où $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont des nombres rationnels les inconnues $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ sont des fonctions algébriques de x. Les fonctions v_n et R, qui en dépendent sont également algébriques. La supposition de l'existence des racines multiples de l'équation $\varphi(y) = 0$ n'infirme en rien cette conclusion.

§ 11.

En récapitulant les résultats trouvés nous pouvons les énoncer de cette manière:

Soit proposé le système d'équations simultanées

$$(11)\qquad v_1\frac{dv_1}{dx}-v_1=v_2\frac{dv_2}{dx}-v_2=\cdots=v_{n-1}\frac{dv_{n-1}}{dx}-v_{n-1}$$
$$=-\frac{\frac{m_1}{v_1^2}+\frac{m_2}{v_2^2}+\cdots+\frac{m_{n-1}}{v_{n-1}^2}+\frac{m_n}{v_n^2}}{\frac{m_1}{v_1^3}+\frac{m_2}{v_2^3}+\cdots+\frac{m_{n-1}}{v_{n-1}^3}+\frac{m_n}{v_n^3}},$$

où $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont des constantes données et v_n a la valeur

$$(9)\qquad v_n=-\frac{m_n}{\frac{m_1}{v_1}+\frac{m_2}{v_2}+\cdots+\frac{m_{n-1}}{v_{n-1}}}.$$

Pour les intégrer considérons l'équation algébrique

$$\varphi(y)=\frac{1}{y}(y-v_1)(y-v_2)\cdots(y-v_n)\sum\frac{m_i}{y-v_i}=0.$$

Soit p son degré et $w_1, w_2, \ldots, w_p$ ses racines. On aura d'abord p intégrales

$$(21)\qquad (w_k-v_1)^{m_1}(w_k-v_2)^{m_2}\ldots(w_k-v_n)^{m_n}=C_k,$$
$$(k=1,2,3,\ldots,p)$$

et ensuite $n-p-1$ équations

$$(30)\quad \sum m_i v_i=0,\quad \sum m_i v_i^2=0,\ \ldots,\ \sum m_i v_i^{n-p-2}=C^{(n-p-2)},$$
$$\sum m_i v_i^{n-p-1}=(n-p-1)C^{(n-p-2)}x+C^{(n-p-1)}.$$

Les valeurs générales de $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ correspondent aux cas $p=n-2$ et $p=n-3$.

Dans le premier, le groupe (30) a une seule équation

$$(12)\qquad \sum m_i v_i=x\sum m_i+C'$$

et dans le second, deux

$$\sum m_i v_i=C',\quad \sum m_i v_i^2=C'x+C''.$$

Pour avoir toutes les valeurs possibles de $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ il faut faire successivement

$$p=n-2,\ n-3,\ \ldots,\ 2,\ 1,\ 0,$$

et pour chaque nombre p avoir égard aux racines multiples de l'équation $\varphi(y)=0$, comme cela est expliqué au § 8.

En substituant ces valeurs dans l'expression

$$R = -\frac{\sum \frac{m_i}{v_i^2}}{\sum \frac{m_i}{v_i^3}} \tag{10}$$

on aura toutes les valeurs de R telles que l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{R}{y} \tag{1}$$

se présente sous la forme

$$(y - v_1)^{m_1} (y - v_2)^{m_2} \dots (y - v_n)^{m_n} = C, \tag{2}$$

à n facteurs et avec les valeurs données des rapports

$$\frac{m_1}{m_n}, \frac{m_2}{m_n}, \dots, \frac{m_{n-1}}{m_n}.$$

§ 12.

Considérons les cas les plus simples, en commençant par celui, où $n = 2$.

Pour $n = 2$ la fonction $\varphi(y)$ ne dépend pas de y et se réduit à la constante Σm_i.

Les intégrales (21) n'existent pas et pour déterminer v_1 et v_2 on a deux équations

$$\frac{m_1}{v_1} + \frac{m_2}{v_2} = 0, \tag{6}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)(x - x_0), \tag{12}$$

x_0 étant une constante arbitraire, qu'on a introduite au lieu de C', en faisant

$$C' = -(m_1 + m_2) x_0.$$

Des équations (6) et (12) on obtient

$$v_1 = \frac{m_1}{m_1 - m_2}(x - x_0), \qquad v_2 = -\frac{m_2}{m_1 - m_2}(x - x_0),$$

$$R = -\frac{\frac{m_1}{v_1^2} + \frac{m_2}{v_2^2}}{\frac{m_1}{v_1^3} + \frac{m_2}{v_2^3}} = \frac{m_1 m_2}{(m_1 - m_2)^2}(x - x_0).$$

Ainsi l'équation

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{m_1 m_2}{(m_1 - m_2)^2} \cdot \frac{x - x_0}{y}$$

est la seule de forme (1) dont l'intégrale générale

$$\left[y - \frac{m_1}{m_1 - m_2}(x - x_0)\right]^{m_1} \left[y + \frac{m_2}{m_1 - m_2}(x - x_0)\right]^{m_2} = C$$

est composée de deux facteurs.

Remarquons que l'équation (13) subsiste encore, quoiqu'il n'y ait plus d'intégrales (21). En effet pour $n = 2$ elle est

$$\frac{(v_1 - v_2)^{m_1+m_2}}{v_1^{m_1} v_2^{m_2}} = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^{1} \left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right)^{m_2} = A.$$

Or d'après les valeurs de v_1 et v_2 cela revient à l'égalité

$$\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)^{m_1} \left(-\frac{m_1}{m_2} - 1\right)^{m_2} = A.$$

Seulement A n'est plus une constante arbitraire.

§ 13.

Le cas $n = 3$ ne demande pas non plus qu'on ait recours aux équations (21). Pour déterminer v_1, v_2, v_3 il suffit de prendre les équations (6), (12) et (13).

En considérant d'abord le cas général où la somme $m_1 + m_2 + m_3$ diffère de zéro, faisons

$$C' = -(m_1 + m_2 + m_3)\, x_0.$$

Nous aurons

$$(6) \qquad \frac{m_1}{v_1} + \frac{m_2}{v_2} + \frac{m_3}{v_3} = 0,$$

$$(12) \qquad m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 = (m_1 + m_2 + m_3)(x - x_0),$$

$$(13) \qquad (v_2 - v_3)^{m_2+m_3} (v_3 - v_1)^{m_3+m_1} (v_1 - v_2)^{m_1+m_2} = A\, v_1^{m_1} v_2^{m_2} v_3^{m_3}.$$

L'équation (13) peut être remplacée par une autre plus simple, qui lui est équivalente.

En effet maintenant nous avons

$$\varphi(y) = (m_1 + m_2 + m_3)\, y$$
$$+ [m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 - (m_1 + m_2 + m_3)(v_1 + v_2 + v_3)];$$

donc en vertu de l'équation (12) on obtient

$$\varphi(y) = (m_1 + m_2 + m_3)[y - (v_1 + v_2 + v_3 - x + x_0)].$$

L'équation $\varphi(y) = 0$ a donc une seule racine

$$y = w_1 = v_1 + v_2 + v_3 - (x - x_0)$$

et nous avons dans le groupe (21) une seule intégrale

$$(w_1 - v_1)^{m_1} (w_1 - v_2)^{m_2} (w_1 - v_3)^{m_3} = C_1$$

ou bien

$$(21) \qquad [v_2 + v_3 - (x - x_0)]^{m_1} [v_3 + v_1 - (x - x_0)]^{m_2} [v_1 + v_2 - (x - x_0)]^{m_3} = C_1.$$

Cette équation peut remplacer (13).

Supposons maintenant

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0,$$

ou bien

$$m_3 = -m_1 - m_2.$$

La fonction $\varphi(y)$ se réduira à

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 = C'$$

et son degré sera zéro. Pour déterminer v_1, v_2, v_3 on peut prendre les équations

$$m_1\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right) + m_2\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_3}\right) = 0, \tag{6}$$

$$m_1(v_1 - v_3) + m_2(v_2 - v_3) = C', \tag{12}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 = 2x + C''. \tag{31}$$

Après avoir trouvé v_1, v_2, v_3 comme fonctions de x, on déterminera R par son expression (10), ou bien par l'une des équations

$$R = v_1 \frac{dv_1}{dx} - v_1 = v_2 \frac{dv_2}{dx} - v_2 = v_3 \frac{dv_3}{dx} - v_3.$$

§ 14.

Considérons maintenant le cas $n = 4$. En faisant pour abréger

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4, \quad C' = -mx_0,$$

nous aurons

$$\varphi(y) = my^2 + \left(\sum m_i v_i + m a_1\right) y + \sum m_i v_i^2 + a_1 \sum m_i v_i + m a_2,$$

l'indice i ayant les valeurs 1, 2, 3, 4. Comme on a

$$a_1 = -(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = -\sum v_i,$$

$$a_2 = v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_1 v_4 + v_2 v_3 + v_2 v_4 + v_3 v_4 = \sum v_i v_j$$

il viendra aussi

$$\varphi(y) = my^2 - y \sum (m - m_i) v_i + \sum (m - m_i - m_j) v_i v_j,$$

dans la dernière somme la paire i, j désignant les six combinaisons 12, 13, 14, 23, 24, 34.

Faisons pour abrèger

$$s = \sqrt{\left[\sum (m - m_i) v_i\right]^2 - 4m \sum (m - m_i - m_j) v_i v_j};$$

alors les deux racines w_1 et w_2 de l'équation $\varphi(y) = 0$ s'exprimeront de cette manière

$$w_1 = \frac{1}{2m}\left(\sum (m - m_i) v_i - s\right), \quad w_2 = \frac{1}{2m}\left(\sum (m - m_i) v_i + s\right).$$

La constante m dans le cas général étant différente de zéro, on aura pour déterminer v_1, v_2, v_3, v_4 les équations (6), (12) et les deux intégrales (21). Au lieu de celles-ci on peut prendre une d'entre elles avec l'intégrale (13).

Ces quatre équations seront donc

$$(6) \qquad \frac{m_1}{v_1}+\frac{m_2}{v_2}+\frac{m_3}{v_3}+\frac{m_4}{v_4}=0,$$

$$(12) \qquad m_1v_1+m_2v_2+m_3v_3+m_4v_4=m(x-x_0),$$

$$(13) \quad (v_1-v_2)^{m_1+m_2}(v_1-v_3)^{m_1+m_3}(v_1-v_4)^{m_1+m_4}(v_2-v_3)^{m_2+m_3}(v_2-v_4)^{m_2+m_4}(v_3-v_4)^{m_3+m_4} = A v_1^{m_1}v_2^{m_2}v_3^{m_3}v_4^{m_4},$$

$$(21) \qquad (w_1-v_1)^{m_1}(w_1-v_2)^{m_2}(w_1-v_3)^{m_3}(w_1-v_4)^{m_4}=C_1.$$

On substituera dans la dernière équation la valeur précédente de w_1.

Si nous avons $m=0$, ou bien $m_4=-m_1-m_2-m_3$, mais Σm_iv_i, qui maintenant se réduit à C' est différente de zéro, la fonction

$$\varphi(y)=y\sum m_iv_i-\sum(m_i+m_j)v_iv_j$$

est du premier degré et nous avons une seule racine de l'équation $\varphi(y)=0$, savoir,

$$w_1=\frac{\Sigma(m_i+m_j)v_iv_j}{\Sigma m_iv_i}=\frac{1}{C'}\sum(m_i+m_j)v_iv_j.$$

On en déduit

$$(32) \qquad C'(w_1-v_k)=\sum(m_i+m_j)v_iv_j-v_k\sum m_iv_i \qquad (k=1,2,3,4).$$

Les quatre équations qui déterminent v_1, v_2, v_3, v_4 sont

$$(6) \qquad m_1\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_4}\right)+m_2\left(\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_4}\right)+m_3\left(\frac{1}{v_3}-\frac{1}{v_4}\right)=0,$$

$$(12) \qquad m_1(v_1-v_4)+m_2(v_2-v_4)+m_3(v_3-v_4)=C',$$

$$(30) \qquad m_1(v_1^2-v_4^2)+m_2(v_2^2-v_4^2)+m_3(v_3^2-v_4)^2=2C'x+C'',$$

$$(21) \qquad (w_1-v_1)^{m_1}(w_1-v_2)^{m_2}(w_1-v_3)^{m_3}(w_1-v_4)^{m_4}=C_1.$$

Dans l'équation (21) il faut remplacer les différences w_1-v_k par leurs valeurs données par l'équation (32).

Ensuite, si nous avons simultanément $m=0$ et $C'=0$ il y aura ces équations

$$(6) \qquad m_1\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_4}\right)+m_2\left(\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_4}\right)+m_3\left(\frac{1}{v_3}-\frac{1}{v_4}\right)=0,$$

$$(30) \qquad \begin{cases} m_1(v_1-v_4)+m_2(v_2-v_4)+m_3(v_3-v_4)=0, \\ m_1(v_1^2-v_4^2)+m_2(v_2^2-v_4^2)+m_3(v_3^2-v_4^2)=C'', \end{cases}$$

$$(31) \qquad v_1+v_2+v_3+v_4=3x+C''.$$

Enfin, si les deux racines de l'équation $\varphi(y)=0$ sont égales, on a $s=0$ et $w_1=w_2$.

Donc pour déterminer les valeurs de v_1, v_2, v_3, v_4 on aura les équations

$$\frac{m_1}{v_1}+\frac{m_2}{v_2}+\frac{m_3}{v_3}+\frac{m_4}{v_4}=0, \tag{6}$$

$$m_1v_1+m_2v_2+m_3v_3+m_4v_4=m(x-x_0), \tag{12}$$

$$\begin{cases}\left[\sum(m-m_i)v_i\right]^2-4m\sum(m-m_i-m_j)v_iv_j=0,\\ (w_1-v_1)^{m_1}(w_1-v_2)^{m_2}(w_1-v_3)^{m_3}(w_1-v_4)^{m_4}=C_1.\end{cases} \tag{21}$$

Dans la dernière w_1 doit être remplacé par sa valeur actuelle

$$w_1=\frac{1}{2m}[(m-m_1)v_1+(m-m_2)v_2+(m-m_3)v_3+(m-m_4)v_4].$$

§ 15.

Appliquons maintenant à une équation plus générale les principes, que nous avons employés pour intégrer l'équation d'Euler sous la forme

$$P(y-v_1)^{m_1}(y-v_2)^{m_2}\dots(y-v_n)^{m_n}=C.$$

Soit donc proposé l'équation

$$M(y)\,dx+N(y)\,dy=0, \tag{33}$$

$M(y)$ et $N(y)$ étant des fonctions entières de y, dont les coëfficients sont des fonctions quelconques de x.

Pour avoir un cas déterminé nous allons faire quelques restrictions.

D'abord il est permis de supposer, que $M(y)$ et $N(y)$ n'ont point de facteurs communs, qui soient des fonctions entières de y.

Ensuite nous allons supposer que le degré de $M(y)$ n'est pas supérieur à celui de $N(y)$ et que l'équation $N(y)=0$ n'a pas de racines multiples, en y regardant y comme inconnu.

En désignant par ϱ le degré de $N(y)$ nous pouvons donc faire

$$M(y)=p_0y^\varrho+p_1y^{\varrho-1}+p_2y^{\varrho-2}+\dots+p_{\varrho-1}y+p_\varrho,$$
$$N(y)=\quad y^\varrho+q_1y^{\varrho-1}+q_2y^{\varrho-2}+\dots+q_{\varrho-1}y+q_\varrho.$$

Soient encore $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\varrho$ les racines de l'équation $N(y)=0$. On aura alors

$$N(y)=(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)\dots(y-\alpha_\varrho),$$
$$q_1=-(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\varrho),\quad q_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3+\dots,$$
$$q_\varrho=(-1)^\varrho\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_\varrho.$$

Comme pour l'équation d'Euler cherchons $M(y)$ et $N(y)$ sous la condition que l'équation (33) admet pour intégrale générale l'équation

$$P(y-v_1)^{m_1}(y-v_2)^{m_2}\dots(y-v_n)^{m_n}=C,$$

où comme précédemment $P, v_1, v_2, \dots, v_n$ sont des fonctions de x, $m_1, m_2, \dots, m_n$ des constantes données dont aucune n'est pas égale à zéro et C une constante arbitraire.

Nous supposons aussi que le nombre n de facteurs différents soit donné. Il s'en suit que parmi les fonctions $v_1, v_2, \ldots, v_n$ il n'y a pas d'égales entre elles, car dans le cas contraire ce nombre serait inférieur à n.

De l'équation précédente on obtient

$$\log P + m_1 \log(y-v_1) + m_2 \log(y-v_2) + \cdots + m_n \log(y-v_n) = \log C.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (33) ait cette intégrale générale consiste dans l'égalité identique à $-\frac{M(y)}{N(y)}$ de la valeur de y' qu'on en déduit par la différentiation.

Donc cette condition se réduit à l'équation

$$\frac{1}{M(y)}\left(\frac{P'}{P} - \sum \frac{m_i v_i'}{y-v_i}\right) = \frac{1}{N(y)} \sum \frac{m_i}{y-v_i},$$

l'indice i parcourant les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$.

En la débarassant de dénominateurs, on voit que dans le premier terme le coëfficient de $y^{n+\varrho}$ est $\frac{P'}{P}$ et dans le second zéro. Ainsi il faut qu'on ait $P' = 0$ et par conséquent que P, soit une constante.

On peut faire $P = 1$ et on aura

$$(y-v_1)^{m_1}(y-v_2)^{m_2}\ldots(y-v_n)^{m_n} = C, \tag{34}$$

$$-\frac{1}{M(y)}\sum \frac{m_i v_i'}{y-v_i} = \frac{1}{N(y)}\sum \frac{m_i}{y-v_i}. \tag{35}$$

Nous rencontrons ici précisement les mêmes fonctions $F(y)$, $F_1(y)$, $F_2(y)$ qui s'étaient présentées dans la recherche sur l'équation d'Euler. Faisons donc comme auparavant

$$F(y) = (y-v_1)(y-v_2)\ldots(y-v_n) = y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \cdots + a_{n-1} y + a_n,$$

$$F_1(y) = F(y)\sum \frac{m_i}{y-v_i} = b_0 y^{n-1} + b_1 y^{n-2} + b_2 y^{n-3} + \cdots + b_{n-2} y + b_{n-1},$$

$$F_2(y) = F(y)\sum \frac{m_i v_i'}{y-v_i} = c_0 y^{n-1} + c_1 y^{n-2} + c_2 y^{n-3} + \cdots + c_{n-2} y + c_{n-1}.$$

Les coëfficients

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,\ b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}, b_{n-1},\ c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-2}, c_{n-1}$$

sont donnés comme fonctions de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ par les équations (4), (14) et (28).

Il est évident d'abord, que $F_1(y)$ n'a point de facteurs

$$y - v_1,\ y - v_2, \ldots, y - v_n.$$

Ensuite, si nous supposons que v_i soit une constante et par conséquent $v_i' = 0$, la fonction $F_2(y)$ a le facteur $y - v_i$.

De l'équation (35), qu'on peut présenter sous la forme

$$-N(y)F_2(y) = M(y)F_1(y)$$

on voit encore que $F_1(y)$ est divisible par $N(y)$ les fonctions $M(y)$ et $N(y)$ n'ayant point de facteurs communs. Nous pouvons donc faire

$$F_1(y) = N(y) \cdot \varphi(y),$$

où $\varphi(y)$ est une fonction entière de y.

Il suit de là que les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ sont différentes de $v_1, v_2, \ldots, v_n$, car $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$, étant les racines de l'équation $N(y) = 0$, sont aussi celles de $F_1(y) = 0$ et aucune des quantités $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ne peut y satisfaire.

Il est évident aussi, que si v_i est égale à une constante, le facteur $y - v_i$ appartient à $M(y)$ comme à $F_2(y)$.

La divisibilité du polynome $F_1(y)$ par $N(y)$ établit ϱ équations entre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ et $v_1, v_2, \ldots, v_n$. En effet on a

$$\frac{F_1(\alpha_k)}{F(\alpha_k)} = 0,$$

pour toute racine α_k de l'équation $N(y) = 0$, ou bien

$$\sum \frac{m_i}{\alpha_k - v_i} = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, \varrho). \tag{36}$$

Quant aux quantités $v_1, v_2, \ldots, v_n$ elles sont évidemment des solutions de l'équation (33). En supposant, que v_i ne soit pas une constante, de l'équation (35) on obtient

$$v_i' = -\frac{M(v_i)}{N(v_i)} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{37}$$

Si v_i est une constante, comme on a $M(v_i) = 0$, elle satisfait aussi à l'équation (37).

Les $n + \varrho$ équations (36) et (37) sont donc nécessaires.

Il est facile de démontrer qu'elles sont aussi suffisantes.

En effet supposons qu'elles soient satisfaites. Nous aurons en vertu des équations (37)

$$-\frac{1}{M(y)} \sum \frac{m_i v_i'}{y - v_i} = \frac{1}{M(y)} \sum \frac{m_i M(v_i)}{N(v_i)(y - v_i)}. \tag{a}$$

Or en vertu des équations (36) la fonction $F_1(y)$ est divisible par $N(y)$. On aura donc

$$F_1(y) = N(y)\varphi(y),$$

$\varphi(y)$ étant une fonction entière de y. Par conséquent l'équation

$$\frac{F_1(y)}{F(y)} = \sum \frac{m_i}{y - v_i}$$

devient

$$\frac{N(y)\,\varphi(y)}{F(y)} = \sum \frac{m_i}{y - v_i}.$$

On en déduit

$$m_i = \frac{N(v_i)\,\varphi(v_i)}{F'(v_i)}. \tag{38}$$

En substituant cette valeur de m_i dans l'équation (a), il viendra

$$-\frac{1}{M(y)} \sum \frac{m_i v_i'}{y - v_i} = \frac{1}{M(y)} \sum \frac{\varphi(v_i) M(v_i)}{F'(v_i)(y - v_i)} = \frac{1}{M(y)} \cdot \frac{\varphi(y) M(y)}{F(y)}$$

$$= \frac{\varphi(y)}{F(y)} = \frac{1}{N(y)} \cdot \frac{F_1(y)}{F(y)} = \frac{1}{N(y)} \sum \frac{m_i}{y - v_i}.$$

C'est l'équation (35) et les conditions (36) et (37) sont suffisantes. Il est évident, que la fonction

$$\frac{\varphi(y)}{F(y)} = -\frac{1}{M(y)} \sum \frac{m_i v_i'}{y - v_i} = \frac{1}{N(y)} \sum \frac{m_i}{y - v_i}$$

est un multiplicateur de l'équation (33). En effet en faisant la multiplication on aura

$$-dx \sum \frac{m_i v_i'}{y - v_i} + dy \sum \frac{m_i}{y - v_i} = 0,$$

ou bien

$$d \sum m_i \log (y - v_i) = 0.$$

De là on obtient l'équation (34).

On peut donc énoncer ce résultat:

Pour que l'équation

$$M(y)\,dx + N(y)\,dy = 0$$

ait une intégrale générale

$$(y - v_1)^{m_1} (y - v_2)^{m_2} \ldots (y - v_n)^{m_n} = C$$

il faut et il suffit que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ soient ses solutions et que la fonction

$$(y - v_1)(y - v_2) \ldots (y - v_n) \sum \frac{m_i}{y - v_i}$$

soit divisible par $N(y)$, les fonctions $M(y)$ et $N(y)$ étant définies ci-dessus.

§ 16.

Pour satisfaire aux $n + \varrho$ équations (36) et (37) nous avons les n fonctions $v_1, v_2, \ldots, v_n$ et les $2\varrho + 1$ coëfficients des polynômes $M(y)$ et $N(y)$, en tout $n + 2\varrho + 1$ quantités.

Il en reste donc $\varrho + 1$ arbitraires. Suivant leur choix on peut arranger les calculs de plusieurs manières.

Le premier procédé, qui se présente, est celui qui suit.

La fonction $F_1(y)$ étant divisible par $N(y)$, il est évident que son dégré n'est pas inférieur à ϱ. Prenons pour $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ ϱ racines quelconques de l'équation $F_1(y) = 0$, ou bien de celle-ci

$$\sum \frac{m_i}{y - v_i} = 0,$$

qui sont des fonctions déterminées de $v_1, v_2, \ldots, v_n$, et les équations (36) seront satisfaites identiquement.

Il nous reste maintenant de satisfaire aux équations

$$(37) \qquad v_1' = -\frac{M(v_1)}{N(v_1)}, \quad v_2' = -\frac{M(v_2)}{N(v_2)}, \cdots, v_n' = -\frac{M(v_n)}{N(v_n)}.$$

D'abord on déterminera $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_\varrho$, en résolvant $\varrho + 1$ d'entre elles, par exemple, les équations

$$(39) \quad v_{n-\varrho}' = -\frac{M(v_{n-\varrho})}{N(v_{n-\varrho})}, \quad v_{n-\varrho+1}' = -\frac{M(v_{n-\varrho+1})}{N(v_{n-\varrho+1})}, \cdots, v_n' = -\frac{M(v_n)}{N(v_n)}$$

par rapport à ces coëfficients. On en obtiendra les valeurs de $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_\varrho$ comme fonctions déterminées de

$$v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n-\varrho}', v_{n-\varrho+1}', \ldots v_n'.$$

En les substituant dans les equations

$$(40) \quad v_1' = -\frac{M(v_1)}{N(v_1)}, \quad v_2' = -\frac{M(v_2)}{N(v_2)}, \cdots, v_{n-\varrho-1}' = -\frac{M(v_{n-\varrho-1})}{N(v_{n-\varrho-1})}$$

on aura dans les seconds membres de celles-ci les fonctions déterminées de

$$v_1, v_2, \ldots v_n, v_{n-\varrho}', v_{n-\varrho+1}', \ldots, v_n'.$$

On peut regarder les $\varrho + 1$ quantités $v_{n-\varrho}, v_{n-\varrho+1}, \ldots, v_n$ comme fonctions arbitraires de x est alors il restera de trouver les $n - \varrho - 1$ intégrales indépendantes du système (40) pour satisfaire à toutes les conditions (36) et (37) et pour déterminer $v_1, v_2, \ldots, v_{n-\varrho-1}$ et les polynômes $M(y)$, $N(y)$. Les valeurs de $v_1, v_2, \ldots, v_{n-\varrho-1}$ et celles des coëfficients de $M(y)$ et $N(y)$ s'exprimerons en fonctions de x et de $n - \varrho - 1$ constantes arbitraires, supposant que $v_{n-\varrho}, v_{n-\varrho+1}, \ldots, v_n$ soient donnés comme fonctions de x. Il faut bien entendu les donner conformément aux conditions du problème et par conséquent inégales.

Le second procédé est plus analogue à celui que nous avons employé pour l'équation d'Euler.

Supposons que les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ de l'équation $N(y) = 0$, inégales entre elles, soient données à priori comme fonctions de x. Alors des ϱ équations

$$(36) \qquad \sum \frac{m_i}{\alpha_k - v_i} = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, \varrho)$$

on obtiendra ϱ des quantités $v_1, v_2, \ldots, v_n$, par exemple, $v_{n-\varrho+1}, v_{n-\varrho+2}, \ldots, v_n$ en fonctions de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ et de $v_1, v_2, \ldots, v_{n-\varrho}$, ou bien, comme fonctions de x et de $v_1, v_2, \ldots, v_{n-\varrho}$.

Les équations (36) donnent des conditions pour les coëfficients $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_\varrho$. En effet pour que les valeurs de $v_{n-\varrho+1}, v_{n-\varrho+2}, \ldots, v_n$ qu'on en a tirées, soient des solutions des équations (37) il faut et il suffit que les ϱ équations

$$-\alpha_k' \sum \frac{m_i}{(\alpha_k - v_i)^2} + \sum \frac{m_i v_i'}{(\alpha_k - v_i)^2} = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, \varrho)$$

qu'on en obtient par la différentiation, fussent satisfaites par les valeurs de $v_1', v_2', \ldots, v_n'$ données par les équations (37). Or en y substituant ces valeurs, il vient

$$\alpha_k' \sum \frac{m_i}{(\alpha_k - v_i)^2} + \sum \frac{m_i M(v_i)}{N(v_i)(\alpha_k - v_i)^2} = 0,$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots, \varrho)$$

ou bien, en vertu de la valeur de $M(y)$,

$$(41) \quad \alpha_k' \sum \frac{m_i}{(\alpha_k - v_i)^2} + p_0 \sum \frac{m v_i^\varrho}{N(v_i)(\alpha_k - v_i)^2} + p_1 \sum \frac{m_i v_i^{\varrho-1}}{N(v_i)(\alpha_k - v_i)^2} + \cdots + p_\varrho \sum \frac{m_i}{N(v_i)(\alpha_k - v_i)^2} = 0.$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots, \varrho).$$

De ces ϱ équations on aura ϱ des coëfficients, par exemple, $p_1, p_2, \ldots, p_\varrho$ en fonctions de x et de $p_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Le coëfficient p_0 reste arbitraire. On peut le donner arbitrairement en fonction de x.

Substituons maintenant les valeurs mentionnées de

$$v_{n-\varrho+1}, v_{n-\varrho+2}, \ldots, v_n$$

avec celles de $p_1, p_2, \ldots, p_\varrho$ dans les équations

$$(42) \quad v_1' = -\frac{M(v_1)}{N(v_1)}, \quad v_2' = -\frac{M(v_2)}{N(v_2)}, \ldots, v_{n-\varrho}' = -\frac{M(v_{n-\varrho})}{N(v_{n-\varrho})}.$$

Les seconds membres seront des fonctions déterminées de x et de $v_1, v_2, \ldots, v_{n-\varrho}$. Il restera de trouver les $n-\varrho$ intégrales indépendantes de ce système d'équations pour déterminer $v_1, v_2, \ldots, v_{n-\varrho}$ en fonctions de x et de $n-\varrho$ constantes arbitraires. Avec $v_1, v_2, \ldots, v_{n-\varrho}$ on trouvera aussi $v_{n-\varrho+1}, v_{n-\varrho+2}, \ldots, v_n, p_1, p_2, \ldots, p_\varrho$ et l'équation différentielle (33) sera déterminée.

Il est évident, que ce second procédé diffère du premier seulement par le choix de $\varrho + 1$ quantités arbitraires dont nous avons fait mention

au commencement de ce §. Il suffit donc d'intégrer le système (40) pour en déduire les intégrales des équations (42), ou réciproquement.

Remarquons, que si n est égal à $\varrho+1$, il n'y aura point d'équation (40). Le degré de $F_1(y)$ sera $n-1=\varrho$ et par conséquent Σm_i sera différente de zéro. Le polynôme $N(y)$ aura la valeur

$$N(y)=\frac{1}{\Sigma m_i}F_1(y)=\frac{1}{\Sigma m_i}F(y)\sum\frac{m_i}{y-v_i}$$

et on obtiendra les valeurs de $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_\varrho$ de $\varrho+1=n$ équations

$$v_i'=-\frac{M(v_i)}{N(v_i)},\quad (i=1,2,3,\ldots,n) \tag{37}$$

Les conditions (36) et (37) étant satisfaites nous voyons que l'équation différentielle

$$M(y)\,dx+\frac{dy}{\Sigma m_i}F(y)\sum\frac{m_i}{y-v_i}=0$$

où les coëfficients du polynôme $M(y)$ sont déduits des équations (37) a pour intégrale générale

$$(y-v_1)^{m_1}(y-v_2)^{m_2}\ldots(y-v_n)^{m_n}=C$$

quelles que soient les fonctions $v_1, v_2, \ldots, v_n$ et les constantes $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Cela d'ailleurs est évident, quand on a égard à la valeur de $M(y)$

$$M(y)=-\frac{N(y)\,F_2(y)}{F_1(y)}=-\frac{1}{\Sigma m_i}F(y)\sum\frac{m_i v_i'}{y-v_i}.$$

§ 17.

Comme pour l'équation d'Euler il y a deux intégrales des équations (37), qui s'en déduisent directement.

D'abord en comparant les coëfficients de $y^{n+\varrho-1}$ dans les deux membres de l'identité

$$-N(y)\,F_2(y)=M(y)\,F_1(y)$$

on aura

$$c_0=-b_0p_0,$$

ou bien

$$\sum m_i v_i'=-p_0\sum m_i.$$

On en obtient

$$\sum m_i v_i=-\sum m_i\cdot\int p_0\,dx+C', \tag{43}$$

où C' est une constante arbitraire.

Dans le second procédé, où p_0 est donné comme fonction de x, cette équation donne une intégrale du système (42).

Ensuite faisons

$$\frac{M(y)}{N(y)} = p_0 + \frac{\beta_1}{y-\alpha_1} + \frac{\beta_2}{y-\alpha_2} + \cdots + \frac{\beta_\varrho}{y-\alpha_\varrho},$$

où $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varrho$ sont des fonctions de x, qui résultent de la formule

$$\beta_k = \frac{M(\alpha_k)}{N'(\alpha_k)}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, \varrho)$$

$N'(\alpha_k)$ étant la valeur de la dérivée $\frac{\partial N(y)}{\partial y}$ pour $y = \alpha_k$.

Cela posé, les équations (37) se représenterons sous la forme

$$(37) \quad v_i' = -p_0 - \frac{\beta_1}{v_i-\alpha_1} - \frac{\beta_2}{v_i-\alpha_2} - \cdots - \frac{\beta_\varrho}{v_i-\alpha_\varrho}. \quad (i = 1,2,3,\ldots,n)$$

Soit v_j une des quantités $v_1, v_2, \ldots, v_n$ différente de v_i; on aura

$$(44) \qquad v_j' = -p_0 - \frac{\beta_1}{v_j-\alpha_1} - \frac{\beta_2}{v_j-\alpha_2} - \cdots - \frac{\beta_\varrho}{v_j-\alpha_\varrho},$$

et par conséquent

$$v_i' - v_j' = (v_i - v_j)\left[\frac{\beta_1}{(v_i-\alpha_1)(v_j-\alpha_1)} + \frac{\beta_2}{(v_i-\alpha_2)(v_j-\alpha_2)} + \cdots + \frac{\beta_\varrho}{(v_i-\alpha_\varrho)(v_j-\alpha_\varrho)}\right].$$

On en déduit

$$\frac{d}{dx}\log\left[(v_i-v_j)^{m_i}\right] = \frac{\beta_1}{v_j-\alpha_1}\cdot\frac{m_i}{v_i-\alpha_1} + \frac{\beta_2}{v_j-\alpha_2}\cdot\frac{m_i}{v_i-\alpha_2} + \cdots + \frac{\beta_\varrho}{v_j-\alpha_\varrho}\cdot\frac{m_i}{v_i-\alpha_\varrho}.$$

Attribuons à l'indice i toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$ à l'exception de j et faisons la somme des résultats obtenus. Alors en remarquant que les équations (36) donnent

$$\frac{m_1}{v_1-\alpha_k} + \frac{m_2}{v_2-\alpha_k} + \cdots + \frac{m_{j-1}}{v_{j-1}-\alpha_k} + \frac{m_{j+1}}{v_{j+1}-\alpha_k} + \cdots + \frac{m_n}{v_n-\alpha_k} = -\frac{m_j}{v_j-\alpha_k}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, \varrho)$$

nous aurons

$$(45)\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\log\left[(v_1-v_j)^{m_1}(v_2-v_j)^{m_2}\ldots(v_{j-1}-v_j)^{m_{j-1}}(v_{j+1}-v_j)^{m_{j+1}}\ldots(v_n-v_j)^{m_n}\right] \\ \quad = -\beta_1\dfrac{m_j}{(v_j-\alpha_1)^2} - \beta_2\cdot\dfrac{m_j}{(v_j-\alpha_2)^2} - \cdots - \beta_\varrho\dfrac{m_j}{(v_j-\alpha_\varrho)^2}. \end{cases}$$

Or de l'équation (44) on obtient

$$\frac{d}{dx}\log(v_j-\alpha_k) = -\frac{p_0+\alpha_k'}{v_j-\alpha_k} - \frac{\beta_1}{(v_j-\alpha_1)(v_j-\alpha_k)} - \frac{\beta_2}{(v_j-\alpha_2)(v_j-\alpha_k)} - \cdots$$
$$\cdots - \frac{\beta_k}{(v_j-\alpha_k)^2} - \cdots - \frac{\beta_\varrho}{(v_j-\alpha_\varrho)(v_j-\alpha_k)},$$

ou bien,

$$\frac{d}{dx}\log[(v_j-\alpha_k)^{m_j}] = -(p_0+\alpha_k')\frac{m_j}{v_j-\alpha_k}$$
$$+\frac{\beta_1}{\alpha_k-\alpha_1}\left(\frac{m_j}{v_j-\alpha_1}-\frac{m_j}{v_j-\alpha_k}\right)$$
$$+\frac{\beta_2}{\alpha_k-\alpha_2}\left(\frac{m_j}{v_j-\alpha_2}-\frac{m_j}{v_j-\alpha_k}\right)+\cdots$$
$$\cdots-\beta_k\cdot\frac{m_j}{(v_j-\alpha_k)^2}+\cdots+\frac{\beta_\varrho}{\alpha_k-\alpha_\varrho}\left(\frac{m_j}{v_j-\alpha_\varrho}-\frac{m_j}{v_j-\alpha_k}\right).$$

Attribuons ici à j les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$ et faisons la somme des résultats obtenus. Alors en vertu des équations (36) nous aurons

$$\frac{d}{dx}\log[(v_1-\alpha_k)^{m_1}(v_2-\alpha_k)^{m_2}\ldots(v_n-\alpha_k)^{m_n}]$$
$$= -\beta_k\sum\frac{m_j}{(v_j-\alpha_k)^2}, \quad (k=1,2,3,\ldots,\varrho) \tag{46}$$

Faisons maintenant $j=1, 2, 3, \ldots n$ dans l'équation (45) et ajoutons les résultats; alors nous aurons en vertu des équations (46) et de la valeur

$$N(y) = (y-\alpha_1)(y-\alpha_2)\ldots(y-\alpha_\varrho)$$

cette équation

$$\frac{d}{dx}\log\prod(v_i-v_j)^{m_i+m_j} = \frac{d}{dx}\log\{[N(v_1)]^{m_1}[N(v_2)]^{m_2}\ldots[N(v_n)]^{m_n}\}.$$

Il en résulte

$$\prod(v_i-v_j)^{m_i+m_j} = A[N(v_1)]^{m_1}[N(v_2)]^{m_2}\ldots[N(v_n)]^{m_n}, \tag{47}$$

A étant une constante arbitraire.

On doit prendre dans le produit au premier membre toutes les $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons différentes des indices i et j.

L'équation (47) représente une intégrale du système (42).

Il est évident, que la démonstration précédente se rapporte tout aussi bien au premier comme au second procédé, et par conséquent l'équation (47) donne aussi une intégrale du système (40).

§ 18.

Les autres intégrales des équations (40) et (42) dépendent des racines de l'équation $\varphi(y) = 0$.

La fonction $\varphi(y) = \frac{F_1(y)}{N(y)}$ sera obtenue sous la forme d'un polynôme entier par la division de

$$F_1(y) = b_0 y^{n-1} + b_1 y^{n-2} + \cdots + b_{n-2} y + b_{n-1}$$

par

$$N(y) = y^\varrho + q_1 y^{\varrho-1} + q_2 y^{\varrho-2} + \cdots + q_{\varrho-1} y + q_\varrho .$$

Le quotient est $\varphi(y)$ et le reste du degré $\varrho - 1$ est identiquement égal à zéro en vertu des équations (36).

Remarquons d'abord que les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ diffèrent des racines de l'équation $\varphi(y) = 0$.

En effet si nous supposons que le facteur $y - \alpha_k$, appartenant à la fonction $N(y)$, divise aussi $\varphi(y)$, α_k sera une racine multiple de l'équation $F_1(y) = N(y)\varphi(y) = 0$, ou bien, de l'équation

$$\sum \frac{m_i}{y - v_i} = 0.$$

On doit donc avoir identiquement

$$\sum \frac{m_i}{(\alpha_k - v_i)^2} = 0.$$

Or l'équation (46) montre, qu'alors le produit

$$(\alpha_k - v_1)^{m_1} (\alpha_k - v_2)^{m_2} \ldots (\alpha_k - v_n)^{m_n}$$

se réduit à une constante et que α_k est une solution de l'équation (33). Mais évidemment cela n'a pas lieu, quand α_k est une fonction de x. Si au contraire la valeur de α_k est une constante, pour qu'elle en soit la solution, il faudrait que le facteur $y - \alpha_k$ divisât $M(y)$, ce qui ne peut pas avoir lieu non plus, $M(y)$ et $N(y)$ étant des polynômes, qui n'ont pas de facteurs communs.

Ensuite on demontrera facilement, que l'équation $\varphi(y) = 0$ n'a pas de racines multiples, tant que les constantes d'intégration, contenues dans $v_1, v_2, v_3, \ldots$ restent arbitraires.

En effet supposons que y soit une telle racine et que les calculs soient disposés conformément au premier procédé.

Elle satisfaira aux équations

$$\sum \frac{m_i}{y - v_i} = 0, \tag{48}$$

$$\sum \frac{m_i}{(y - v_i)^2} = 0. \tag{49}$$

Or y étant une fonction de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ contient implicitement les $n - \varrho - 1$ constantes arbitraires indépendantes qui figurent dans $v_1, v_2, \ldots, v_{n-\varrho-1}$. Les valeurs de $v_1, v_2, \ldots, v_{n-\varrho-1}$ sont indépendantes entre elles, à savoir, toute équation entre elles et la variable x, qui ne contient aucune constante d'intégration en dehors d'elles, doit être indentique. En différentiant donc l'équation (48) par rapport à v_k, v_k étant une des quantités $v_1, v_2, \ldots, v_{n-\varrho-1}$, on aura

$$\frac{m_k}{(y-v_k)^2} + \frac{\partial y}{\partial v_k} \sum \frac{m_i}{(y-v_i)^2} = 0,$$

ce qui se réduit en vertu de l'égalité (49) à l'équation impossible

$$\frac{m_k}{(y-v_k)^2} = 0.$$

Pour des valeurs particulières des constantes arbitraires les racines multiples de l'équation $\varphi(y) = 0$ sont possibles et il faut y avoir égard.

§ 19.

Maintenant nous allons démontrer, que les racines de l'équation $\varphi(y) = 0$ sont des solutions de l'équation différentielle (33).

Elles satisfont à l'équation

$$\sum \frac{m_i}{y-v_i} = 0, \tag{50}$$

qui peut être représentée de cette manière

$$y' \sum \frac{m_i}{y-v_i} = \sum \frac{m_i(y'-v_i')}{y-v_i} + \sum \frac{m_i v_i'}{y-v_i} = 0.$$

Or l'équation (50) avec l'identité

$$-\frac{1}{M(y)} \sum \frac{m_i v_i'}{y-v_i} = \frac{1}{N(y)} \sum \frac{m_i}{y-v_i}, \tag{35}$$

dans laquelle $N(y)$ diffère de zéro, donne

$$\sum \frac{m_i v_i'}{y-v_i} = 0.$$

Donc on aura

$$\sum \frac{m_i(y'-v_i')}{y-v_i} = 0.$$

Il s'ensuit

$$\sum m_i \lg (y-v_i) = \text{Const.},$$

ou bien,

$$(y-v_1)^{m_1} (y-v_2)^{m_2} \ldots (y-v_n)^{m_n} = \text{Const.}$$

La racine y est donc une solution particulière de l'équation (33).

La constante dans le second membre est arbitraire.

Nous avons de cette manière autant d'intégrales des systèmes (40) et (42), qu'il y a des racines différentes de l'équation $\varphi(y) = 0$.

Considérons d'abord le cas général où la somme Σm_i ne s'évanouit point et où les constantes d'intégration restent complètement arbitraires. Dans ce cas la fonction $\varphi(y)$ est du degré $n - \varrho - 1$. Désignons donc les $n - \varrho - 1$ racines de l'équation $\varphi(y) = 0$ par $w_1, w_2, \ldots, w_{n-\varrho-1}$ et soit w_k l'une d'elles.

Nous aurons $n - \varrho - 1$ intégrales des systèmes (40) et (42) dans ces équations

$$(51) \qquad (w_k - v_1)^{m_1} (w_k - v_2)^{m_2} \ldots (w_k - v_n)^{m_n} = C_k$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots, n - \varrho - 1).$$

Pour les équations (40) c'est un système complet, c'est à dire, ces intégrales sont indépendantes.

Considérons en effet le premier procédé et faisons pour abréger

$$\psi_k = m_1 \log (w_k - v_1) + m_2 \log (w_k - v_2) + \cdots + m_n \log (w_k - v_n).$$

Le déterminant fonctionnel

$$\sum \pm \frac{\partial \psi_1}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial v_2} \cdots \frac{\partial \psi_{n-\varrho-1}}{\partial v_{n-\varrho-1}}$$

se transforme en produit au moyen de la formule de réduction donnée au § 7. Comme aucun des facteurs ne peut s'annuler, ce déterminant n'est point égal à zéro et les intégrales (51) sont indépendantes.

Dans le cas où la constante donnée Σm_i est zéro, l'équation (43) donne

$$\sum m_i v_i = C'.$$

Cette équation avec les intégrales (51), dont le nombre est maintenant $n - \varrho - 2$, font encore un système complet pour les équations (40).

Quant au système (42) d'équations simultanées, dans le cas général, où la somme Σm_i est différent de zéro et où on n'attribue point aux constantes d'intégration des valeurs particulières, on obtient un système complet d'intégrales, en associant l'équation (43) aux équations (51).

Le cas où on a $\Sigma m_i = 0$ sera considéré dans le § suivant.

§ 20.

Occupons nous maintenant des cas particuliers, qui demandent quelques modifications des résultats obtenus pour le cas général.

Comparons les coëfficients des mêmes puissances de y dans l'égalité

$$-N(y) F_2(y) = M(y) F_1(y)$$

en commençant par $y^{n+\varrho-1}$ et en finissant à y^ϱ; alors nous aurons cette suite d'équations:

$$
\left\{\begin{aligned}
-c_0 &= b_0 p_0,\\
-(c_1 + q_1 c_0) &= b_1 p_0 + b_0 p_1,\\
-(c_2 + q_1 c_1 + q_2 c_0) &= b_2 p_0 + b_1 p_1 + b_0 p_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
-(c_\varrho + q_1 c_{\varrho-1} + q_2 c_{\varrho-2} + \cdots + q_\varrho c_0) &= b_\varrho p_0 + b_{\varrho-1} p_1 + b_{\varrho-2} p_2 + \cdots + b_0 p_\varrho,\\
-(c_{\varrho+1} + q_1 c_\varrho + q_2 c_{\varrho-1} + \cdots + q_\varrho c_1) &= b_{\varrho+1} p_0 + b_\varrho p_1 + b_{\varrho-1} p_2 + \cdots + b_1 p_\varrho,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
-(c_{n-1} + q_1 c_{n-2} + q_2 c_{n-3} + \cdots + q_\varrho c_{n-\varrho-1}) &= b_{n-1} p_0 + b_{n-2} p_1 + b_{n-3} p_2 + \cdots\\
&\quad \cdots + b_{n-\varrho-1} p_\varrho.
\end{aligned}\right.
$$

Dans le cas où le degré de $F_1(y)$ se réduit à $p < n-1$, on aura

$$b_0 = 0,\ b_1 = 0,\ b_2 = 0, \ldots, b_{n-p-2} = 0.$$

D'après les valeurs (14) des coëfficients $b_0, b_1, b_2, \ldots$ cela revient aux équations

$$(53)\qquad \sum m_i = 0,\ \sum m_i v_i = 0,\ \sum m_i v_i^2 = 0, \ldots, \sum m_i v_i^{n-p-2} = 0$$

Les équations (52) montrent qu'on aura alors

$$c_0 = 0,\ c_1 = 0,\ c_2 = 0, \ldots, c_{n-p-2} = 0,\ c_{n-p-1} = -b_{n-p-1} \cdot p_0,$$

ce qui en vertu des valeurs (28) des coefficients $c_0, c_1, c_2, \ldots$ se réduit aux équations

$$(54)\qquad \sum m_i v_i' = 0,\ \sum m_i v_i v_i' = 0,\ \sum m_i v_i^2 v_i' = 0, \ldots$$
$$\ldots, \sum m_i v_i^{n-p-2} v_i' = 0,$$

$$(55)\qquad \sum m_i v_i^{n-p-1} v_i' = -b_{n-p-1} p_0.$$

En intégrant les équations (54) on obtient

$$(56)\qquad \sum m_i v_i = C',\ \sum m_i v_i^2 = C'', \ldots, \sum m_i v_i^{n-p-2} = C^{(n-p-2)},$$
$$\sum m_i v_i^{n-p-1} = C^{(n-p-1)},$$

$C', C'', \ldots, C^{(n-p-2)}, C^{(n-p-1)}$ étant des constantes arbitraires.

En vertu des équations (53) on aura

$$C' = 0,\ C'' = 0, \ldots, C^{(n-p-2)} = 0$$

et d'après les équations (14) b_{n-p-1} se réduit maintenant à

$$\sum m_i v_i^{n-p-1},$$

qui est une constante $C^{(n-p-1)}$ en vertu des équations (56); donc l'équation (55) devient

$$\sum m_i v_i^{n-p-1} v_i' = -C^{(n-p-1)} p_0.$$

Dans le second procédé p_0 est une fonction donnée de x; par conséquent l'intégration donne

$$\sum m_i v_i^{n-p} = -(n-p)\,C^{(n-p-1)}\int p_0\,dx + C^{(n-p)}, \tag{57}$$

Donc dans le cas où le degré de la fonction $F_1(y)$ est $p < n-1$, on aura $p-\varrho$ équations

$$(w_k - v_1)^{m_1}(w_k - v_2)^{m_2}\ldots(w_k - v_n)^{m_n} = C_k \tag{51}$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots, p-\varrho)$$

et encore $n-p-1$ équations

$$\sum m_i v_i = 0,\ \sum m_i v_i^2 = 0, \ldots, \sum m_i v_i^{n-p-2} = 0, \tag{58}$$
$$\sum m_i v_i^{n-p-1} = C^{(n-p-1)}.$$

Les $n-\varrho-1$ équations (51), (58) détermineront les inconnus $v_1, v_2, \ldots, v_{n-\varrho-1}$ des équations différentielles (40).

La fonction $\varphi(y)$ est maintenant du degré $p-\varrho$ et $w_1, w_2, \ldots, w_{p-\varrho}$ sont les racines de l'équation $\varphi(y) = 0$.

Pour le système (42) d'équations simultanées il faut prendre les équations (51), (58) et (57) qui déterminent les $n-\varrho$ inconnus $v_1, v_2, \ldots, v_{n-\varrho}$ de ce système.

Ainsi dans le cas mentionné à la fin du § 19, où $\Sigma m_i = 0$, mais les constantes d'intégration restent complètement arbitraires il faut faire $p = n-2$. On aura donc alors les $p-\varrho = n-\varrho-2$ équations (51), l'équation (58), qui reste seule dans le groupe, à savoir,

$$\sum m_i v_i = C',$$

et l'équation (57)

$$\sum m_i v_i^2 = -2C'\int p_0\,dx + C''.$$

Les valeurs de $v_1, v_2, \ldots, v_{n-\varrho}$ contiendront les $n-\varrho$ constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_{n-\varrho-2}, C', C''$, comme cela doit être effectivement.

La plus petite valeur de p est évidemment ϱ, car $F_1(y)$ étant divisible par $N(y)$, son degré p ne peut pas être inférieur au degré ϱ de $N(y)$.

Quand on a $p = \varrho$ le groupe (51) ne contient aucune équation. Toutes les équations intégrales pour le système (40) sont contenues dans le groupe (58) et pour le système (42) dans ce groupe et dans l'équation (57)

$$\sum m_i v_i^{n-\varrho} = -(n-\varrho)\,C^{(n-\varrho-1)}\int p_0\,dx + C^{(n-\varrho)}$$

On aura égard aux racines multiples de l'équation $\varphi(y) = 0$ pour chaque valeur de p précisément de la même manière qu'au § 8.

Il faut représenter le degré $p - \varrho$ de la fonction $\varphi(y)$ de toutes les manières possibles sous la forme d'une somme de nombres entiers positifs. Pour chaque représentation le groupe (51) a ses équations particulières. Prenons une de ces représentations et soit r un des termes de la somme correspondante. On supposera l'existence d'une racine de l'ordre r de multiplicité. Soit w_1 cette racine. Alors dans le groupe (51) on aura pour w_1 une seule équation

$$(w_1 - v_1)^{m_1}(w_1 - v_2)^{m_2} \ldots (w_1 - w_n)^{m_n} = C_1,$$

mais on y mettra encore les $r - 1$ suivantes

$$\varphi'(w_1) = 0,\ \varphi''(w_1) = 0, \ldots,\ \varphi^{(r-1)}(w_1) = 0,$$

de sorte que pour la racine w_1 il y aura r équations, comme pour r racines différentes.

En prenant toutes les représentations on épuisera tous les cas, où l'on puisse avoir des racines multiples.

Il est évident, que pour les valeurs $p = \varrho$ et $p = \varrho + 1$ elles n'existent point.

Enfin dans le second procédé p_0 étant une fonction arbitraire de x, on peut supposer $p_0 = 0$. Cela donne un cas particulier, où l'intégrale (57) devient

$$\sum m_i v_i^{n-p} = C^{(n-p)},$$

sans que la constante $C^{(n-p-1)}$ soit égale à zéro.

Toutes les solutions des systèmes (40) et (42) sont contenues dans les formules établies pour le cas général au § 19 et pour les cas particuliers au § présent. En prenant toutes les valeurs de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ qui résultent de ces formules et en ayant égard aux équations (36) et (41) pour le système (42) et aux équations (39) pour le système (40), on aura toutes les équations différentielles

$$M(y)\,dx + N(y)\,dy = 0, \tag{33}$$

dont l'intégrale générale se présente sous la forme

$$(y - v_1)^{m_1}(y - v_2)^{m_2} \ldots (y - v_n)^{m_n} = C \tag{33}$$

à n facteurs et avec les rapports donnés

$$\frac{m_1}{m_n},\ \frac{m_2}{m_n},\ \ldots,\ \frac{m_{n-1}}{m_n}$$

des exposants.

§ 21.

Remarquons maintenant qu'on peut toujours, au moyen des transformations des variables, réduire le coëfficient p_0 à l'unité.

Nous supposons qu'il s'agit du second procédé.

Si p_0 est différent de zéro, on faira

$$\int p_0\,dx = \xi$$

et on prendra ξ pour une nouvelle variable indépendante. L'équation (33) deviendra

$$\left(y^\varrho + \frac{p_1}{p_0}\,y^{\varrho-1} + \frac{p_2}{p_0}\,y^{\varrho-2} + \cdots + \frac{p_\varrho}{p_0}\right) d\xi + N(y)\,dy = 0.$$

On supposera que les coëfficients $\frac{p_1}{p_0}$, $\frac{p_2}{p_0}$, $\ldots$, $\frac{p_\varrho}{p_0}$ et ceux de $N(y)$ soient des fonctions de ξ et on aura une nouvelle équation différentielle, où les coëfficients de y^ϱ dans les deux polynômes sont égaux à l'unité.

Lorsqu'on a $p_0 = 0$, on faira $z = z + \omega$, ω étant une fonction arbitraire de x et z une nouvelle fonction inconnue, qui doit remplacer y.

Cette transformation réduit l'équation (33) à la suivante

$$M_1(z)\,dx + N_1(z)\,dz = 0,$$

où

$$M_1(z) = M(z+\omega) + \omega' N(z+\omega), \quad N_1(z) = N(z+\omega).$$

En prenant ω pour une variable indépendante, on réduira à l'unité le coefficient de z^ϱ dans $M_1(z)$.

Faisons donc $p_0 = 1$ et supposons que les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ de l'équation $N(y) = 0$ et par conséquent aussi les coefficients $q_1, q_2, \ldots, q_\varrho$ soient des fonctions algébriques de x.

Si les exposants $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont des nombres réels et rationnels, on démontrera comme au § 10, que les valeurs des quantités

$$v_1, v_2, \ldots, v_n, \; p_1, p_2, \ldots, p_\varrho$$

seront des fonctions algébriques de x. Telle sera aussi la valeur de y dans l'équation (34).

Nous allons démontrer enfin que l'équation (47) est une conséquence des intégrales (51).

Leur produit donne l'équation

$$[\varphi(v_1)]^{m_1}\,[\varphi(v_2)]^{m_2} \ldots [\varphi(v_n)]^{m_n} = \text{Const.}$$

Or de l'équation (38) on déduit

$$\varphi(v_i) = \frac{m_i}{N(v_i)}\,F'(v_i) = \frac{m_i}{N(v_i)}\,(v_i - v_1)\,(v_i - v_2)\,.\,.$$
$$.\,.\,(v_i - v_{i-1})\,(v_i - v_{i+1}) \ldots (v_i - v_n).$$

En faisant ici $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ et en substituant dans l'équation précédente les valeurs de $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)$, $\ldots$, $\varphi(v_n)$, ainsi obtenues, on aura

$$\prod (v_i - v_j)^{m_i+m_j} = A[N(v_1)]^{m_1}[N(v_2)]^{m_2}\ldots[N(v_n)]^{m_n}$$

ce qui est bien l'équation (47), où A est une constante arbitraire.

Ainsi le problème, concernant l'équation différentielle (33), que nous nous sommes proposé, est complètement résolu.

§ 22.

Les résultats que nous venons de trouver peuvent être énoncés de la manière suivante:

Considérons une équation différentielle

$$M(y)\,dx + N(y)\,dy = 0 \tag{1}$$

dans laquelle $M(y)$ et $N(y)$ sont des fonctions entières de y, dont les coefficients sont des fonctions quelconques de x.

On suppose que $M(y)$ et $N(y)$ n'aient pas de facteurs communs qui soient des fonctions entières de y, que le degré de $M(y)$ ne surpasse pas celui de $N(y)$ et que l'équation $N(y) = 0$, en y regardant y comme inconnue, n'ait pas de racines multiples.

Proposons nous de trouver toutes les équations (1) dont l'intégrale générale se présente sous la forme

$$(y - v_1)^{m_1}(y - v_2)^{m_2}\cdots(y - v_n)^{m_n} = C, \tag{2}$$

où $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont des constantes données dont aucune n'est égale à zéro; $v_1, v_2, \ldots, v_n$ des fonctions de x différentes entre elles; n un entier donné et C une constante arbitraire.

On demande aussi qu'on trouve toutes les valeurs de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ en fonction de x.

Les polynomes $M(y)$ et $N(y)$ peuvent être représentés ainsi

$$M(y) = p_0 y^{\varrho_1} + p_1 y^{\varrho-1} + \cdots + p_\varrho,$$
$$N(y) = (y - \alpha_1)(y - \alpha_2)\ldots(y - \alpha_\varrho).$$

Prenons arbitrairement $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ et p_0 comme fonctions de x, pourvu que parmi les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ il n'y ait point d'égales entre elles, et considérons la fonction entière de y,

$$F_1(y) = (y - v_1)(y = v_2)\cdots(y - v_n)\sum \frac{m_i}{y - v_i},$$

l'indice i ayant les valeurs 1, 2, 3, ..., n. On posera d'abord les ϱ équations

$$F_1(\alpha_1) = 0,\quad F_1(\alpha_2) = 0,\ \cdots,\ F_1(\alpha_\varrho) = 0. \tag{3}$$

Soit, pour abréger, $\frac{F_1(y)}{N(y)} = \varphi(y)$ et désignons par $\varphi'(y), \varphi''(y), \ldots$ les dérivées partielles de $\varphi(y)$ prises par rapport à y. Soit aussi $w_1, w_2, \ldots, w_{n-\varrho-1}$ les racines de l'équation $\varphi(y) = 0$, lorsqu'on y regardent y comme inconnu. Ce sont autant de fonctions implicites de $v_1, v_2, \ldots, v_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$. Désignons encore par $C_1, C_2, \ldots,$

C', C'', . . . des constantes arbitraires. Cela posé on aura $n-\varrho$ équations

$$(4)\quad (w_k-v_1)^{m_1}(w_k-v_2)^{m_2}\dots(w_k-v_n)^{m_n}=C_k,\quad (k=1,2,3,\dots,n-\varrho-1),$$

$$(5)\quad \sum m_i v_i = -\sum m_i \int p_0\,dx + C'.$$

Dans le cas général, où Σm_i diffère de zéro, les n équations (3), (4) et (5) déterminent $v_1, v_2, \dots, v_n$ comme fonctions de x, $C_1, C_2, \dots, C_{n-\varrho-1}, C'$.

Les coëfficients $p_1, p_2, \dots, p_\varrho$ de $M(y)$ seront déterminés par ces ϱ équations

$$\alpha_k' \sum \frac{m_i}{(\alpha_k-v_i)^2} + p_0 \sum \frac{m_i v_i^{\varrho}}{N(v_i)\,(\alpha_k-v_i)^2} + p_1 \sum \frac{m_i v_i^{\varrho-1}}{N(v_i)\,(\alpha_k-v_i)^2} + \dots + p_\varrho \sum \frac{m_i}{N(v_i)\,(\alpha_k-v_i)^2} = 0,$$

$$(k=1,2,3,\dots,\varrho).$$

Lorsqu'on a $\Sigma m_i = 0$, le degré de $F_1(y)$ est inférieur à $n-1$. Supposons, en général, qu'il soit p. Alors celui de $\varphi(y)$ sera $p-\varrho$ et, dans le groupe (4), il n'y aura que $p-\varrho$ équations. En revanche, on aura d'abord $n-p-1$ équations

$$\sum m_i v_i = 0,\quad \sum m_i v_i^2 = 0,\ \dots,\ \sum v_i^{n-p-1} = C^{(n-p-1)},$$

et, au lieu de l'équation (5), cette autre

$$\sum m_i v_i^{n-p} = -(n-p)\,C^{(n-p-1)} \cdot \int p_0\,dx + C^{(n-p)}.$$

Pour chaque valeur de p plus grande que $\varrho+1$, il faut encore avoir égard aux cas où l'équation $\varphi(y)=0$ a des racines multiples. A cet effet on représentera $p-\varrho$ de toutes les manières possibles sous la forme d'une somme de nombres entiers positifs. Pour chaque représentation le groupe (4) aura ces équations particulières. Prenons une de ces représentations et soit r un des termes d'une somme correspondante. On supposera l'existence d'une racine, par exemple, w_1, de l'ordre r de multiplicité. Alors, dans le groupe (4), on aura pour w_1, une seule équation, mais on y mettra encore les $r-1$ suivantes:

$$\varphi'(w_1)=0,\quad \varphi''(w_1)=0,\ \dots,\ \varphi^{(r-1)}(w_1)=0,$$

et ce groupe contiendra toujours $p-\varrho$ équations. En donnant à p les valeurs ϱ, $\varrho+1$, $\varrho+2$, . . ., $n-1$ et en ayant égard aux racines multiples pour chaque valeur de $p>\varrho+1$, on aura toutes les équations (1), qui ont une intégrale générale (2).

Beiträge zu Riemann's Integrationsmethode für hyperbolische Differentialgleichungen, und deren Anwendungen auf Schwingungsprobleme.

Von

W. Wirtinger in Innsbruck.

In den Artikeln 8 und 9 der Abhandlung „Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite" (1860, p. 156—175 der Ges. Werke, II. Aufl.) giebt Riemann ein Verfahren zur Integration hyperbolischer Differentialgleichungen, welches für die Zwecke der mathematischen Physik hervorragend geeignet ist, da es nicht nur erlaubt sehr allgemeine Anfangsbedingungen explicite einzuführen, sondern auch das Gebiet ihrer Wirksamkeit sofort zu übersehen.

Es liegt diesem Verfahren der Gedanke zu Grunde, die Differentialgleichung als ein System linearer Gleichungen zwischen den Werthen der gesuchten Function an benachbarten Stellen aufzufassen, so dass die Anfangswerthe mit den späteren durch Ketten solcher Gleichungen zusammenhängen. Auf dieses System linearer Gleichungen lässt sich dann die Bézout'sche Methode in der Weise übertragen, dass an Stelle des unbestimmten Multiplicators der einzelnen Gleichung eine Function der Stelle tritt, für welche die Differentialgleichung gebildet ist, und an Stelle der Summation eine Integration ausgeführt wird. Diese Hülfsfunction lässt sich dann so bestimmen, dass die Integration direct das Integral der Differentialgleichung liefert.

Das einzelne dieses Verfahrens ist seither wiederholt auseinandergesetzt worden*), insbesondere hat Darboux einen Existenzbeweis für die Hilfsfunction skizzirt, unter der Voraussetzung analytischer Coefficienten der Differentialgleichung und Picard hat einen solchen für allgemeinere

*) P. Du Bois-Reymond, Studien zur Interpret. der linearen part. Diffgl. k^{ter} Ordnung, ferner Crelle 104. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces t. II, pag. 71 ff.

Coefficienten in der Umgebung einer Stelle gegeben. Les Roux*) hat neuerdings die Singularitäten der Integrale einer solchen Differentialgleichung untersucht, Delassus**) die Riemann'sche Methode auf mehrere Variable ausgedehnt. Die folgenden Zeilen beschäftigen sich nur mit dem speciellen Fall der sogenannten harmonischen Gleichungen. Zuerst werden zur bessern Uebersicht kurz die Formeln für die hier benutzte Form der Differentialgleichung abgeleitet. Es kann dann der Existenzbeweis Picard's unmittelbar unter sehr allgemeinen Voraussetzungen auf den ganzen Bereich ausgedehnt werden. Hieran schliessen sich einige Anwendungen — insbesondere auf die schwingende Saite von variabler Dichte — und eine genauere Discussion des Riemann'schen Integralausdrucks. Dann folgt eine Erörterung der Beziehung der hier geübten Integrationsmethode zu den Reihenentwicklungen von Sturm und Liouville. Die Frage ob ein Grenzübergang zu unendlicher Erstreckung des Gebietes von diesen Reihen zu Integralausdrücken führt, giebt Anlass zur Untersuchung der Normalfunctionen in einem solchen Fall. Es zeigt sich, dass ein solcher Integralausdruck im allgemeinen nicht zu erwarten ist, da die entsprechende Schwingungsform bei Auflösung in einfache harmonische Schwingungen einem „Bandenspectrum" entsprechen würde.

§ 1.

Die Differentialgleichung.

Wir setzen die Differentialgleichung in der Form voraus

$$g(t)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - h(x)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0. \tag{1}$$

Die Charakteristiken derselben sind dann

$$\begin{aligned} \xi &= \int\sqrt{h(x)}\,dx + \int\sqrt{g(t)}\,dt, \\ \eta &= -\int\sqrt{h(x)}\,dx + \int\sqrt{g(t)}\,dt. \end{aligned} \tag{2}$$

Dabei sind $g(t)$, $h(x)$ eindeutige, endliche, stetige Functionen, welche in dem betrachteten Gebiet durchaus positiv sind. Des folgenden wegen nehmen wir hier gleich an, dass sie auch erste und zweite Derivirte haben, welche durchaus endlich, und eine endliche Anzahl von Stellen ausgenommen, auch stetige Functionen sein sollen.

Bei Einführung von ξ und η als neuen Variablen erhält man zunächst

*) Annales de l'école normale, ser. III, tom XII.

**) Ibid. Supplement.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{h(x)}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta}\right),$$

(3)

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \sqrt{g(t)}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)$$

und

(4) $$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{8} h'(x) h(x)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) + \frac{1}{8} g'(t) g(t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = 0.$$

Setzt man hier

(4a) $$z = \zeta h(x)^{-\frac{1}{4}} g(t)^{-\frac{1}{4}}$$

so erhält man unter Berücksichtigung des Umstandes, dass x und t als Functionen von ξ und η aufzufassen sind, wo x nur von $\xi - \eta$, t nur von $\xi + \eta$ abhängt, eine Gleichung von der Form

(5) $$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta} = [\mu(\xi - \eta) + \nu(\xi + \eta)] \cdot \zeta.$$

Dabei gehen in die Ausdrücke der μ und ν durch $g(t)$ nnd $h(x)$ auch die zweiten Derivirten dieser Functionen ein, und dies ist der Grund für die obigen Voraussetzungen über dieselben. Die obigen Transformationen sind bereits von Darboux angegeben (l. c. p. 193). Dort ist auch die Transformation der allgemeineren Gleichung

$$P\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + Q\frac{\partial z}{\partial x} + Rz = P_1\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + Q_1\frac{\partial z}{\partial y} + R_1 z$$

wo P, Q, R nur von x, P_1, Q_1, R_1 nur von y abhängen, in die Form (5) gegeben.

§ 2.

Auseinandersetzung des Riemann'schen Verfahrens.

Wir knüpfen die weitere Auseinandersetzung zunächst an die Form (5) der Differentialgleichung, wobei wir zur Abkürzung

$$\mu(\xi - \eta) + \nu(\xi + \eta) = \varphi(\xi, \eta)$$

setzen.

Interpretiren wir in der ursprünglichen Differentialgleichung (1) x als Abscisse und t als Ordinate eines rechtwinkligen Systems, so sind durch die Gleichungen $\xi = C_1$, $\eta = C_2$ zwei Curvensysteme gegeben, wobei unter den gemachten Voraussetzungen jede Curve des einen Systems nur einmal jede des andern Systems trifft. Einem bestimmten Werthsystem ξ, η möge so ein Punkt A der Ebene entsprechen. Die beiden von A ausgehenden Charakteristiken theilen die Ebene dann

in 4 Quadranten. Es sei ferner in der Ebene eine Curve BC derart gegeben, dass sie jede Charakteristik nur einmal schneidet. Längs dieser Curve seien nun die Werthe von s und seiner ersten Derivirten vorgeschrieben. Die Curve soll ferner so beschaffen sein, dass sie überall eine bestimmte Tangente hat.

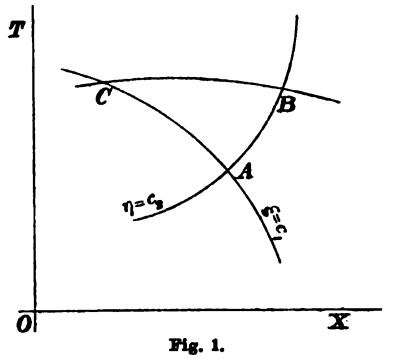


Fig. 1.

Wir stellen uns nun die Aufgabe aus den Werthen von s, resp. ζ und seiner Derivirten längs BC den Werth von s in A zu ermitteln.

Sei nun $v(\xi, \eta; \xi', \eta')$ eine Function von 4 Argumenten, so ist unter den bekannten Stetigkeitsbedingungen für v und ζ', wo ζ' den Werth von ζ an der Stelle $\xi'\eta'$ bedeutet,

$$(6)\qquad 2\iint\left(v\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi'\partial\eta'}-\zeta\frac{\partial^2 v}{\partial\xi'\partial\eta'}\right)d\xi'\,d\eta'$$
$$=\int\left(v\frac{\partial\zeta'}{\partial\xi'}-\zeta'\frac{\partial v}{\partial\xi'}\right)\cdot d\xi'-\left(\frac{\partial\zeta'}{\partial\eta'}-\zeta'\frac{\partial v}{\partial\eta'}\right)d\eta',$$

wobei links über das Innere der Fläche ABC, rechts über die Begrenzung im positiven Sinne integrirt ist.

Genügt nun v ebenso wie ζ' der Differentialgleichung

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial\xi'\partial\eta'}=\varphi(\xi'\eta')\,v,$$

so verschwindet das Integral links, während das Integral rechts aus drei Bestandtheilen, je über AB, BC, CA zusammengesetzt ist.

Die Integration über BC enthält, wenn v bekannt ist, nur mehr bekannte Elemente, die Integrale über AB und CA müssen noch weiter umgeformt werden.

Da

$$\int_A^B v\frac{\partial\zeta'}{\partial\xi'}d\xi'=-(\zeta v)_A+(\zeta v)_B-\int_A^B\zeta'\frac{\partial v}{\partial\xi'}d\xi',$$

$$-\int_C^A v\frac{\partial\zeta'}{\partial\eta'}d\eta'=-(\zeta v)_A+(\zeta v)_C+\int_C^A\zeta'\frac{\partial v}{\partial\eta'}d\eta'$$

so wird schliesslich

$$(8)\qquad 2(v\zeta')_A=(v\zeta')_B+(v\zeta')_C$$
$$+\int_B^C\left(v\frac{\partial\zeta'}{\partial\xi'}-\zeta'\frac{\partial v}{\partial\xi'}\right)d\xi'-\left(v\frac{\partial\zeta'}{\partial\eta'}-\zeta'\frac{\partial v}{\partial\eta'}\right)d\eta'$$

wenn noch die Function v folgenden Begingungen unterworfen wird:

1) Sie genügt der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi' \partial \eta'} = \varphi(\xi' \eta') v$,

2) für $\eta = \eta'$ ist $\frac{\partial v}{\partial \xi'} = 0$ und $\xi = \xi'$ ist $\frac{\partial v}{\partial \eta'} = 0$.

Fügt man noch die Bedingung hinzu, dass $v(\xi, \eta, \xi', \eta')$ für $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$ den Werth 1 haben soll, und beachtet, dass damit auch $v_B = v_C = 1$ wird, so folgt endlich

$$\zeta(\xi, \eta) = \tfrac{1}{2}(\zeta_B + \zeta_C) \tag{9}$$
$$+ \tfrac{1}{2} \int_B^C \left(v \frac{\partial \zeta'}{\partial \xi'} - \zeta' \frac{\partial v}{\partial \xi'} \right) d\xi' - \left(v \frac{\partial \zeta'}{\partial \eta'} - \zeta' \frac{\partial v}{\partial \eta'} \right) d\eta'.$$

Dabei ist zu bemerken, dass die Formel keine Aenderung erleidet, wenn die Curve BC in einem anderen Quadranten verläuft, sobald nur immer das Integral in dem Sinne genommen wird, welcher durch die positive Umlaufung der Dreiecke ABC vorgeschrieben ist.

Führt man hier wieder die Variablen x, t resp. x', t' ein, so erhält man

$$\zeta(\xi, \eta) = \tfrac{1}{2}(\zeta_B + \zeta_C) + \tfrac{1}{2} \int_B^C \sqrt{h(x')\, g(t')} \Big[dx' \cdot g(t')^{-1} \left(v \frac{\partial \zeta'}{\partial t'} - \zeta' \frac{\partial v}{\partial t'} \right) \tag{10}$$
$$+ dt' \, h(x')^{-1} \left(v \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} - \zeta' \frac{\partial v}{\partial x'} \right) \Big]$$

aus welcher man nach (4a) auch s bestimmt.

§ 3.

Vervollständigung der vorhergehenden Betrachtung.

Die vorige Ableitung der Formeln (8), (10) unterliegt jedoch noch zwei Bedenken. Erstens nämlich steht die Existenz einer Function wie v nicht von vornherein fest, und zweitens bleibt es fraglich ob v und s diejenigen Stetigkeitsbedingungen erfüllen, welche zur Umwandlung des Doppelintegrals in ein Begrenzungsintegral hinreichend sind.

Wir beseitigen diese Bedenken dadurch, dass wir einen directen Beweis für die Existenz einer Function v führen und sodann die Formel (9) unmittelbar verificiren.

Der Existenzbeweis beruht auf einer Methode Picard's*), die hier etwas allgemeiner und einfacher zum Ziele führt, als dessen eigne Ent-

*) Picard: Bulletin de la société mathématique de France. t. XXII. 1894.

wicklungen, welche sich jedoch ihrerseits auf allgemeinere Differentialgleichungen beziehen.

Es genügt nämlich in der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta} = \varphi(\xi, \eta)\zeta \tag{7}$$

φ als endlich und integrirbar vorauszusetzen.

In der That, bilden wir der Reihe nach

$$\begin{aligned} u_0 &= 1, \quad u_1(\xi, \eta; \xi', \eta') = \int_{\xi'}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta'}^{\eta} d\eta_1 \, \varphi(\xi_1, \eta_1), \\ u_2 &= \int_{\xi'}^{\xi} d\xi_2 \int_{\eta'}^{\eta} d\eta_2 \, u_1(\xi_2, \eta_2; \xi', \eta') \, \varphi(\xi_2, \eta_2), \\ u_n &= \int_{\xi'}^{\xi} d\xi_n \int_{\eta'}^{\eta} d\eta_n \, \varphi(\xi_n, \eta_n) \, u_{n-1}(\xi_n, \eta_n; \xi', \eta'), \end{aligned} \tag{11}$$

so erkennt man sogleich, dass die Summe

$$v(\xi, \eta; \xi', \eta') = \sum_0^\infty u_n \tag{12}$$

formell der Differentialgleichung (7) genügt, und auch, dass

$$\frac{\partial v(\xi, \eta; \xi, \eta')}{\partial \eta} = \frac{\partial v(\xi, \eta; \xi', \eta)}{\partial \xi} = 0,$$

sowie

$$v(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1,$$

wenn gliedweise Differentiation der Reihe (12) und ihrer ersten und zweiten Derivirten gestattet ist.

Dieses letztere ist aber leicht nachzuweisen. Bleiben nämlich, ξ, ξ', η, η' in einem Gebiet, in welchem $\varphi(\xi, \eta) < M$ und $|\xi - \xi'| < A$, $|\eta - \eta'| < B$, so ist, wie man bei successiver Substitution der Ausdrücke für $u_{n-1}, u_{n-2} \ldots$ etc. in die Formel für u_n unmittelbar sieht:

$$\begin{aligned} |u_n| &< \frac{M^n A^n B^n}{(n!)^2}, \\ \left|\frac{\partial u_n(\xi, \eta; \xi', \eta')}{\partial \xi}\right| &< \frac{M^n A^{n-1} B^n}{n!\,(n-1)!}, \\ \left|\frac{\partial u_n(\xi, \eta; \xi', \eta')}{\partial \eta}\right| &< \frac{M^n A^n B^{n-1}}{n!\,(n-1)!}, \\ \left|\frac{\partial^2 u_n(\xi, \eta; \xi', \eta')}{\partial \xi \partial \eta}\right| &< \frac{M^n A^{n-1} B^{n-1}}{(n-1)!\,(n-1)!} \end{aligned} \tag{13}$$

Hieraus erhellt unmittelbar die gleichmässige Convergenz aller in Betracht kommenden Reihen und damit auch die Berechtigung der vorgenommenen Operationen.

Aus der Reihenform von v erhellt auch die Richtigkeit der Gleichung

$$v(\xi, \eta; \xi', \eta') = v(\xi', \eta'; \xi, \eta),$$

so dass also v von beiden Punkten symmetrisch abhängt.

Aus der Reihe (12) für v ergiebt sich endlich noch leicht

$$(14) \qquad \left(\frac{\partial^2 v(\xi,\eta;\xi',\eta')}{\partial\eta\,\partial\xi'}\right)_{\xi=\xi'} = \left(\frac{\partial^2 v(\xi,\eta;\xi',\eta')}{\partial\xi\,\partial\eta'}\right)_{\eta=\eta'} = -\varphi(\xi,\eta).$$

Hievon werden wir sogleich Gebrauch machen.

Nachdem so die Existenz von v festgestellt ist, verificiren wir die Formel (9) direct unter der Annahme, dass sowohl die Curve BC als auch die längs derselben vorgeschriebenen Werthe von ξ' und seinen ersten Derivirten so beschaffen sind, dass Differentiation unter dem Integral in (9) gestattet ist. Dabei ist zu beachten, dass B nur von η, C hingegen nur von ξ abhängig ist.

Bezeichnen wir noch mit ds das Bogenelement der Curve BC, so erhalten wir

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\zeta'}{ds}\cdot\frac{ds}{d\xi'}\right)_C + \frac{1}{2}\Big[v\left(\frac{\partial\zeta'}{\partial\xi'}\cdot\frac{d\xi'}{ds} - \frac{\partial\zeta'}{\partial\eta'}\cdot\frac{d\eta'}{ds}\right) - \zeta'\left(\frac{\partial v}{\partial\xi'}\cdot\frac{d\xi'}{ds} - \frac{\partial v}{\partial\eta'}\cdot\frac{d\eta'}{ds}\right)\Big]_C\left(\frac{ds}{d\xi'}\right)_C$$
$$+ \frac{1}{2}\int_B^C \frac{\partial v}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\zeta'}{\partial\xi'}d\xi' - \frac{\partial\xi'}{\partial\eta'}d\eta'\right) - \zeta'\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\,\partial\xi'}\cdot d\xi' - \frac{\partial^2 v}{\partial\xi\,\partial\eta'}\cdot d\eta'\right)_C.$$

Nun ist an der Stelle C: $v = 1$, $\left(\frac{\partial v}{\partial\eta'}\right)_C = 0$, ferner überhaupt

$$\frac{\partial\zeta'}{\partial\xi'}\cdot\frac{d\xi'}{ds} + \frac{\partial\zeta'}{\partial\eta'}\cdot\frac{d\eta'}{ds} = \frac{d\zeta'}{ds}.$$

Damit erhält man schliesslich

$$(15) \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial\xi} = \left(\frac{\partial\zeta'}{\partial\xi'}\right)_C - \frac{1}{2}\zeta_C\left(\frac{\partial v}{\partial\xi'}\right)_C + \frac{1}{2}\int_B^C \frac{\partial v}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\zeta'}{\partial\xi'}d\xi' - \frac{\partial\zeta'}{\partial\eta'}d\eta'\right) - \zeta'\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\,\partial\xi'}d\xi' - \frac{\partial^2 v}{\partial\xi\,\partial\eta'}d\eta'\right).$$

Eine analoge Formel würde man für $\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}$ erhalten.

Rückt nun der Punkt ξ, η auf die gegebene Curve, so fällt B mit C zusammen, das Integral fällt weg und da für $\eta = \eta'$ auch $\left(\frac{\partial v}{\partial\xi'}\right)_C = 0$ ist, so nehmen sowohl ζ als $\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}$ und damit auch $\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}$ auf der Curve die vorgeschriebenen Werthe an.

Durch Differentiation nach η erhält man aus (15)

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{1}{2}\zeta_C\left(\frac{\partial v}{\partial \eta\, \partial \xi'}\right)_C - \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial v}{\partial \xi}\Big(\frac{\partial \zeta'}{\partial \xi'}\cdot\frac{d\xi'}{ds} - \frac{\partial \zeta'}{\partial \eta'}\cdot\frac{d\eta'}{ds}\Big) + \zeta\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \xi'}\cdot\frac{d\xi'}{ds} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \eta'}\cdot\frac{d\eta'}{ds}\Big)\Big]_{\eta=\eta'}\Big(\frac{ds}{d\eta'}\Big)_s + \frac{1}{2}\int_B^C \frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \eta}\Big(\frac{\partial \zeta'}{\partial \xi'}\,d\xi' - \frac{\partial \zeta'}{\partial \eta'}\,d\eta'\Big) - \zeta\Big(\frac{\partial^3 v}{\partial \xi\, \partial \xi'\, \partial \eta}\,d\xi' - \frac{\partial^3 v}{\partial \xi\, \partial \eta\, \partial \eta'}\,d\eta'\Big).$$

Mit Rücksicht darauf, dass für $\eta = \eta'$, $\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \xi'} = 0$, ferner dass

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \eta} = \varphi(\xi,\eta)v, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \xi'\, \partial \eta} = \varphi(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial v}{\partial \xi'}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \eta\, \partial \eta'} = \varphi(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial v}{\partial \eta'}$$

und endlich unter Beachtung der Gleichung (14) erhält man so

$$(16)\quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi\, \partial \eta} = \varphi(\xi,\eta)\Big[\frac{1}{2}(\zeta_B+\zeta_C) + \frac{1}{2}\int_B^C v\Big(\frac{\partial \zeta'}{\partial \xi'}\,d\xi' - \frac{\partial \zeta'}{\partial \eta'}\,d\eta'\Big) - \zeta\Big(\frac{\partial v}{\partial \xi'}\,d\xi' - \frac{\partial v}{\partial \eta'}\,d\eta'\Big)\Big] = \varphi(\xi,\eta)\zeta.$$

Die Formel (9) *liefert also in der That unter den gemachten Voraussetzungen ein Integral der Differentialgleichung, welches den gestellten Bedingungen genügt.*

Es möge noch bemerkt werden, dass für $\varphi(\xi,\eta) = c$ die Reihe (12) unmittelbar v als die Bessel'sche Function des Argumentes $\sqrt{i(\xi-\xi')(\eta-\eta')}$ erkennen lässt.

§ 4.

Einige Anwendungen.

Die Formel (9) und die aus ihr durch Transformation hervorgegangene (10) gestatten bereits eine bemerkenswerthe Anwendung auch dann, wenn die Function v nicht bereits berechnet ist. Da nämlich die Formel zeigt, dass der Werth des Integrals in A nur von den Werthen von z und seinen ersten Derivirten zwischen B und C abhängt, so folgt hieraus, dass wenn längs einer beliebigen, die Charakteristiken nur einmal schneidenden Curve s und $\frac{\partial z}{\partial x}$ Null sind, mit Ausnahme eines endlichen Stückes von B' bis C', dass dann auch z nur in dem in der Figur schraffirten, von den Charakteristiken durch B' und C' begrenzten Bereich z von Null verschieden sein kann, weil nur in diesen Gebieten Charakteristiken

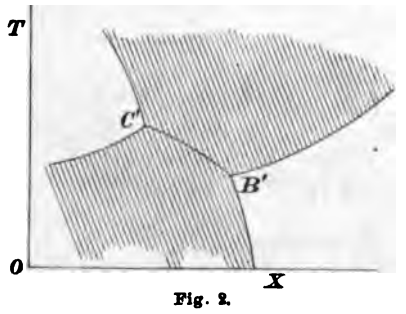


Fig. 2.

verlaufen, welche $B'C'$ treffen. Dieses genügt z. B. um bei einer Saite von veränderlicher Dichte mit dem Dichtigkeitsgesetz $\varrho(x)$ und der Spannung S zu erkennen, dass eine anfänglich auf ein kurzes Stück beschränkte Störung der Gleichgewichtslage sich nach und nach rechts und links über eine Strecke ausbreitet, deren Endpunkte nach rechts und links mit der Geschwindigkeit $\sqrt{S\varrho^{-1}(x)}$ fortschreiten. Dieses Resultat war hier übrigens vorauszusehen.

Um einen etwas complicirteren Fall zu behandeln, betrachten wir die kleinen Transversalschwingungen eines biegsamen, schweren, homogenen Fadens, der an einem Punkte aufgehängt und mit einem Gewichte am anderen Ende belastet ist.

Die Differentialgleichung lautet dann

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{1}{m}\left(Mg + mg(l-x)\right)\frac{\partial z^2}{\partial x^2} - g\frac{\partial z}{\partial x} \tag{17}$$

(vgl. etwa Kraft, Sammlung von Problemen der analytischen Mechanik, II, pag. 600 ff.).

Hier bedeutet M die angehängte Masse, m die Längendichte, l die Länge des Fadens und g die Beschleunigung der Schwere.

Setzt man

$$z = \zeta\left(Mg + mg(l-x)\right)^{-\frac{1}{2}},$$

so kommt

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{1}{m}\left(Mg + mg(l-x)\right)\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}: \tag{18}$$

Die Gleichungen der Charakteristiken werden

$$\begin{aligned} \xi &= \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{m}{Mg+mg(l-x)}}\cdot dx + t, \\ \eta &= -\int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{m}{Mg+mg(l-x)}} + t. \end{aligned} \tag{19}$$

Da nun der Zustand des Fadens zur Zeit t durch das Verhalten von ξ auf einer im Abstand t zur Abscissenaxe gezogenen Parallelen angegeben wird, so ist unmittelbar zu sehen, dass sich eine anfänglich auf ein kleines Gebiet beschränkte Störung mit der Zeit auf ein grösseres Gebiet ausbreiten wird, dessen Grenzen mit einer Geschwindigkeit c fortschreiten werden, welche nach oben durch die Gleichung

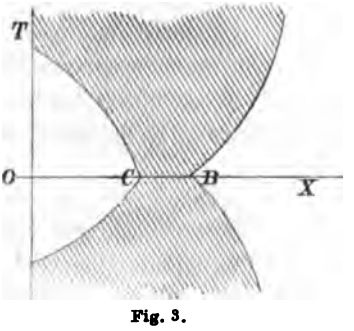


Fig. 3.

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}c + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$$

gegeben ist. Hieraus folgt

$$c = -\sqrt{\frac{Mg + mg(l-x)}{m}};$$

ist $M = 0$, so ist

$$c = -\sqrt{g(l-x)},$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{dc}{dx} \cdot c = -\frac{g}{2}. \tag{20}$$

Die Ausbreitung geschieht also nach oben gleichförmig beschleunigt, und analog nach unten gleichförmig verzögert. Die Beschleunigung ist gleich der halben Fallbeschleunigung.

Dieses Resultat wurde aus den fertigen Integralen auf complicirtem Wege bereits von Poisson im Journal de l'école polytechnique tome VII gefunden.

Die Formeln (9) und (10) können überhaupt als Verallgemeinerungen des Alembert'schen Integrals für die homogene, schwingende Saite angesehen werden. Es wird für diesen Fall in (10) $g(t) = a^2$, $h(x) = 1$, $v = 1$ und man erhält für die Anfangsbedingungen $s = \varphi(x)$, $\frac{\partial s}{\partial t} = \psi(x)$ für $t = 0$ aus (10) genau die bekannte*) Formel

$$s = \frac{1}{2}\big(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\big) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\lambda)\, d\lambda.$$

§ 5.

Anwendung auf die schwingende Saite von variabler Dichte und begrenzter Länge.

Die Formel (10) gestattet auch die Behandlung solcher Aufgaben, welche bisher mit Vorliebe durch Reihenentwicklungen erledigt wurden. Da uns nun die Reihe (12) die Function v unter sehr weiten Voraussetzungen liefert, und diese Reihe etwa so stark convergirt, wie diejenige für die Bessel'sche Transcendente $J_0(x)$, so kann dies unter Umständen auch practischen Werth haben, namentlich da auch die gewöhnlichen Reihenentwicklungen meist langwierige Rechnungen erfordern.

Wir führen dies an dem Beispiel der Differentialgleichung der Transversalschwingungen einer Saite von variabler Dichte durch, unter den Bedingungen, dass der Anfangs- und Endpunkt fest ist und die Dichte eine solche Function $\varrho(x)$ der Abscisse ist, dass die Voraus-

*) Vgl. Riemann, partielle Differentialgleichungen herausgeg. von Hattendorf pag. 113, III.

setzungen des § 1 über die Beschaffenheit von $h(x)$ erfüllt werden. Ist die Spannung der Saite S, so lautet die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\varrho(x)}{S} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \tag{21}$$

Es soll ferner für $t = 0$ und $0 < x < l$ $z = \varphi(x)$, $\frac{\partial z}{\partial t} = \psi(x)$ vorgegeben sein. Die Formel (10) liefert dann für x als Function von x und t:

$$z \sqrt[4]{\frac{\varrho(x)}{S}} = \frac{1}{2}\left(\varphi(x_1)\sqrt[4]{\frac{\varrho(x_1)}{S}} + \varphi(x_2)\sqrt[4]{\frac{\varrho(x_2)}{S}}\right) + \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} \sqrt[4]{\frac{\varrho(x')^3}{S^3}}\left((v)_{t'=0}\psi(x') - \varphi(x')\left(\frac{\partial v}{\partial t'}\right)_{t'=0}\right) dx'. \tag{22}$$

Dabei sind x_1 und x_2 durch die Gleichungen bestimmt

$$-\int_x^{x_1} \sqrt{\frac{\varrho(x)}{S}}\, dx = t, \quad \int_x^{x_2} \sqrt{\frac{\varrho(x)}{S}}\, dx = t. \tag{23}$$

Die Bestimmung von v, sowie überhaupt die Anwendung dieser Formel begegnet jedoch der Schwierigkeit, dass Anfangszustand und Dichte nur innerhalb eines begrenzten Intervalles gegeben sind. Man genügt jedoch allen Bedingungen der Aufgabe, wenn man die Functionen $\varrho(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ in der Weise über das Intervall $0, l$ hinaus fortsetzt, dass $\varrho(x)$ eine gerade, $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ aber ungerade Functionen mit der Periode $2l$ werden. Wenn man nämlich v als Function der Coordinaten x, t, x', t' mit $v(x, t; x', t')$ bezeichnet, so folgt aus den Voraussetzungen über die Fortsetzungen von $\varrho(x)$

$$v(x, t; x', t') = v(-x, t; -x', t'),$$
$$v(x+2l, t; x'+2l, t') = v(x, t; x', t')$$

und damit auch

$$v(x+l, t; x'+l, t') = v(x-l, t; x'-l, t') = v(l-x, t; l-x', t').$$

Nun ist zu zeigen, dass bei den gemachten Annahmen über die Fortsetzung von ϱ, φ, ψ für $x = 0$ und $x = l$ immer $z = 0$ ist.

Da aber $\sqrt{\frac{\varrho(x)}{S}}$ immer positiv ist, so kann man das Integral $\int_0^x \sqrt{\frac{\varrho(x)}{S}}\, dx$ eindeutig umkehren. Für $x = 0$ folgt damit aus

$$\int_0^{x_1} \sqrt{\frac{\varrho(x)}{S}}\, dx = t, \quad \int_0^{x_2} \sqrt{\frac{\varrho(x)}{S}}\, dx = -t$$

$x_1 = -x_2$.

Damit aber zeigt Formel (22) sofort, dass $z(0, t) = 0$, da φ ungerade ist und das Integral über eine ungerade Function zwischen entgegengesetzten Grenzen genommen ist.

Für $x = l$ folgt ebenso

$$x_1 = 2l - x_2$$

und nach Einführung der neuen Integrationsvariablen $u = x' - l$ hat man wieder unter Berücksichtigung der Periodicität von φ, ψ, ϱ die nämlichen Verhältnisse wie für $x = 0$.

In derselben Weise kann auch das Problem der Transversalschwingungen einer homogenen Saite in einem widerstehenden Mittel behandelt werden. Die Differentialgleichung, welche übrigens von der sogenannten Telegraphistengleichung*) nicht wesentlich verschieden ist, lautet hier

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\gamma \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Nach Einführung der neuen Variablen $\tau = e^{\gamma t} z$ kommt

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = \frac{a^2}{4\gamma^2 \tau^2} \cdot \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}.$$

Setzt man nach Vorschrift des § 1

$$\xi = x + \frac{a}{2\gamma} l(\tau) = x - at,$$

$$\eta = -x + \frac{a}{2\gamma} l(\tau) = -x - at,$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{a}{2\gamma}}\, \tau,$$

so kommt

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\gamma^2}{4a^2} \zeta.$$

In der Reihe (12) wird hier

$$u_0 = 1, \quad u_1 = \frac{\gamma^2}{4a^2} (\xi - \xi')(\eta - \eta'), \quad u_2 = \frac{\gamma^4}{4^2 a^4} \frac{(\xi - \xi')^2}{2} \cdot \frac{(\eta - \eta')^2}{2},$$

$$u_n = \frac{\gamma^{2n}}{4^n a^{2n}} \frac{(\xi - \xi')^n}{n!} \frac{(\eta - \eta')^n}{n!}$$

und daher

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^{2n}}{4^n a^{2n}} \frac{(\xi - \xi')^n}{n!} \frac{(\eta - \eta')^n}{n!} = J_0\left(\frac{\gamma}{a} \sqrt{(\xi - \xi')(\eta - \eta')}\right),$$

wenn J_0 die Bessel'sche Transcendente J_1 bedeutet. Führt man wieder die ursprünglichen Variablen x und t ein, so erhält man

*) Vgl. Poincaré, Comptes Rendus 1885. I. vom 26. Oct. Picard ebenda 1886. vom 8. Jan.

unter den Bedingungen $z = \varphi(x)$, $\frac{\partial z}{\partial t} = \psi(x)$ für $t = 0$ schliesslich die fertige Formel:

$$z = \frac{1}{2} e^{-\gamma t} \Bigg[\varphi(x+at) + \varphi(x-at) + \frac{1}{a} \int_{x-at}^{x+at} \Bigg[\Big(\psi(x') + \gamma \varphi(x')\Big) J\Big(\frac{\gamma}{a} \sqrt{(x-x'+at)(x-x'-at)}\Big) + \gamma a t \varphi(x') \cdot \frac{J'\Big(\frac{\gamma}{a}\sqrt{(x-x'+at)(x-x'-at)}\Big)}{\sqrt{(x-x'-at)(x-x'+at)}} \Bigg] dx' \Bigg].$$

Für den Fall einer begrenzten Saite hat man ebenso wie oben φ und ψ als ungerade periodische Functionen mit der Periode $2l$ fortzusetzen.

Für $\gamma = 0$ geht diese Formel in diejenige Form des d'Alembert'schen Integrales über, welche am Ende des vorigen Paragraphen angeführt wurden.

§ 6.

Ueber Riemann's bestimmtes Integral für v.

Im Artikel 9 der Eingangs erwähnten Abhandlung giebt Riemann*) für die von ihm behandelte Differentialgleichung auch eine Formel, in welcher v durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt wird. Da seine Gleichung aus der Gleichung (21) durch Transformation erhalten wird, so wollen wir zunächst die Formel entwickeln und dann einer eingehenderen Discussion unterziehen.

Setzen wir in der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = h(x) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \tag{21}$$

$$z = y(x, \lambda) e^{2\pi i \lambda t},$$

so folgt, dass y der gewöhnlichen Differentialgleichung genügen muss:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4\pi^2 \lambda^2 h(x) y = 0 \tag{24}$$

wenn z ein Integral von (21) sein soll. Wir versuchen nun die Differentialgleichung (21) zu integriren unter den Bedingungen, dass für $x = x'$ und jeden Werth von t sein soll $z = 0$ $\frac{\partial z}{\partial x} = \psi(t)$.

Verstehen wir nun unter $y(x, x', \lambda)$ dasjenige Integral von (24)

*) Man sehe hierzu auch die Anmerkung in der zweiten Ausgabe von Riemann's Werken pag. 179—181.

welches für $x = x'$ verschwindet, während $\frac{dy}{dx}$ den Werth 1 annimmt, so können wir für s den Ansatz machen

$$s = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) y(x, x', \lambda) e^{2\pi i \lambda t} d\lambda,$$

wo $F(\lambda)$ eine noch zu bestimmende Function ist. Nach den Voraussetzungen über y und den zu erfüllenden Grenzbedingungen ergiebt sich zur Bestimmung von $F(\lambda)$ die Gleichung

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{2\pi i \lambda t} d\lambda.$$

Nach dem Cauchy'schen Reciprocitätsgesetz der Fourier'schen Integrale*) folgt hieraus

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t') e^{-2\pi i \lambda t'} dt'$$

und damit wird endlich

$$s = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \psi(t') y(x, x', \lambda) e^{2\pi i \lambda (t - t')}. \tag{25}$$

Nun liefert aber Formel (10) unter den gemachten Annahmen

$$s = \frac{1}{2\sqrt[4]{h(x) h(x_1)}} \int_{t_1}^{t_2} \psi(t') . v(x, t; x', t') dt'. \tag{26}$$

Dabei sind t_1, t_2 bestimmt durch die Formeln

$$\begin{aligned} t_1 &= t - \int_x^{x'} \sqrt{h(x)}\, dx, \\ t_2 &= t + \int_x^{x'} \sqrt{h(x)}\, dx. \end{aligned} \tag{27}$$

Um nun durch Vergleich von (25) und (26) v zu ermitteln, ist es nothwendig, die verschiedenen Lagen der Stelle x', t' in Bezug auf die beiden Charakteristiken durch x, t zu unterscheiden.

---

*) Vgl. Kronecker, Vorlesungen über Integrale hrsg. v. Netto, pag. 68.

Ist nämlich $x' > x$, so kann man $\psi(t')$ überall gleich Null annehmen ausser ein beliebig kleines Stück zwischen t_1 und t_2, wo es constant genommen werden mag. Der Vergleich von (26) und (27) giebt dann für $x' > x$, $t_1 < t' < t_2$

(28) $$v(x, t; x', t') = -2\sqrt[4]{h(x)\,h(x')}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, y(x, x', \lambda)\, e^{2\pi i\lambda(t-t')}.$$

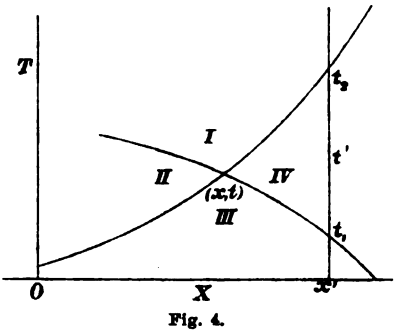


Fig. 4.

Ist dagegen $x' < x$, so ist auch $t_2 < t_1$, die Integration nach t' in (26) ist dann dem Sinne nach entgegengesetzt zur Integration nach t' in (25) und man findet für $t_2 < t' < t_1$ und $x' < x$

(29) $$v(x, t; x', t') = -2\sqrt[4]{h(x)\,h(x')}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, y(x, x', \lambda)\, e^{2\pi i\lambda(t-t')}.$$

Nimmt man endlich $\psi(t')$ gleich Null an zwischen t_1 und t_2, so ergiebt sich aus der Gleichstellung von (25) und (26) für $x < x'$

(30a) $$\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{t_1} dt'\, \psi(t')\, y(x, x', \lambda)\, e^{2\pi i\lambda(t-t')}$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{t_2}^{\infty} dt'\, \psi(t')\, y(x, x', \lambda)\, e^{2\pi i\lambda(t-t')} = 0$$

während für $x > x'$ in dieser Formel t_1 und t_2 zu vertauschen sind. Setzt man hier wieder $\psi(t')$ ausserhalb eines beliebig klein zu nehmenden Intervalles gleich Null, innerhalb desselben aber constant, so erhält man schliesslich für $x' > x$, $t' > t_2$ oder $< t_1$, ebenso wie für $x' < x$, $t' < t_1$, oder $< t_2$ die Gleichung

(30) $$\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, y(x, x', \lambda)\, e^{2\pi i\lambda(t-t')} = 0.$$

Bezeichnet man also die Quadranten, in welche die Ebene durch die beiden Charakteristiken zerfällt, welche sich in x, t schneiden wie in Figur 4 als ersten, zweiten, dritten und vierten, so kann man das Ergebniss zusammenfassen in folgender Weise:

Liegt x', t' im k^{ten} Quadranten, so gilt die Gleichung

(31) $$\cos\frac{k\pi}{2}\, v(x, t; x', t') = 4\sqrt[4]{h(x)\,h(x')}\int_{0}^{\infty} y(x, x', \lambda)\cos 2\pi\lambda(t-t')\, d\lambda.$$

Denn, wie man sich leicht überzeugt, ist $y(x, x', \lambda)$ eine gerade Function von λ.

Im ersten und dritten Quadranten kann also das bestimmte Integral zur Ermittelung von v nicht verwendet werden.

Wir können übrigens die Formel (31) auch auffassen als Ermittelung des bestimmten Integrals, wenn wir v durch die Reihe (12) als gegeben ansehen. Die so entstehende Relation dürfte auf directem Wege schwer zu beweisen sein.

Durch directe Umformung kann man die hier erhaltenen Resultate für das in (31) auftretende bestimmte Integral in dem am Schlusse des § 5 angeführten Beispiele bestätigen, wenn man vorher noch x und t vertauscht; doch gehen wir hierauf nicht näher ein, da die Rechnung langwierig und ohne besonderes Interesse ist.

Das in (31) auftretende Integral wird von Riemann l. c. nur als Durchgangsformel zur Ermittelung einer analytischen Function für v benutzt. In der That würde es z. B. schon bei der wichtigsten Aufgabe für die schwingende Saite versagen, sobald nämlich als Anfangsbedingungen Lage und Geschwindigkeit der einzelnen Punkte gegeben sind.

Man kann aber auch das Integral auf der rechten Seite von (31) als Integral der Differentialgleichung betrachten. Dasselbe stellt dann eine Art Hauptlösung dar, insofern als für $t = t'$, $x = x'$ eine Unstetigkeit auftritt und sonst nirgends.

Allein diese Hauptlösung ist nicht brauchbar um allgemeinere Integrale in der gewöhnlichen Weise durch Superposition daraus herzuleiten. Im weiteren Verlauf der Bewegung kommt nämlich zu Folge des eben erörterten Verhaltens von v ein immer grösserer Theil der Saite zur Ruhe, während eine brauchbare Hauptlösung gerade umgekehrt die Ausbreitung einer von einem Punkt ausgehenden Störung darstellen müsste.

Dagegen erweist sich das Integral als brauchbare Hauptlösung für die Integration der Differentialgleichung unter den Bedingungen, dass etwa für $x = x'$ die Grössen s und $\frac{\partial s}{\partial x}$ als Functionen von t gegeben sind.

§ 7.

Ueber die Darstellung von v durch Normalfunctionen.

So wie oben die Integration der Differentialgleichung mit Hülfe Fourier'scher Integrale die Bestimmung von v innerhalb eines von Charakteristiken begrenzten Gebietes ermöglichte, ist es auch möglich die Reihenentwicklungen nach Normalfunctionen unter gewissen Voraussetzungen heranzuziehen, und zwar auch dann, wenn die Differentialgleichung in der allgemeineren Form

1) $$g(t)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = h(x)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

gegeben ist, wo $g(t)$ und $h(x)$ wenigstens innerhalb gewisser Intervalle etwa für $0 \leqq x \leqq a$; $0 \leqq t \leqq b$ den Voraussetzungen des § 1 genügen.

Setzt man zunächst

32) $$z = y(x) \cdot \eta(t),$$

so erhält man zur Bestimmung von y und η die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

33a) $$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda^2 h(x) y = 0,$$

33b) $$\frac{d^2 \eta}{dt^2} + \lambda^2 g(t) \eta = 0$$

wo λ^2 eine willkürliche Grösse bedeutet, welche wir positiv annehmen.

Bezeichnen wir nun mit $y(x, x', \lambda)$ dasjenige Integral von (33a), welches an der Stelle $x = x'$ Null wird, während $\frac{dy}{dx}$ für $x = x'$ den Werth 1 annehmen soll, und gebrauchen wir die analoge Bezeichnung $\eta(t, t', \lambda)$, so hat nach den bekannten Sätzen von Sturm und Liouville die Gleichung

$$y(a, 0, \lambda) = 0$$

unendlich viele reelle Wurzeln für λ, unter denen sich keine mehrfachen befinden, und welche im Endlichen keine Häufungsstelle haben. Seien diese Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, dann setzen wir der Kürze halber

$$y(x, 0, \lambda_n) = y_n(x).$$

Ebenso bezeichnen wir die Wurzeln von

$$\eta(b, 0, \lambda) = 0$$

mit $\mu_1 \ldots \mu_n$ und setzen

$$\eta(t, 0, \mu_n) = \eta_n(t).$$

Ist nun $\psi(x)$ eine im Intervall $0 \ldots a$ endliche und stetige Function mit abtheilungsweise stetigen ersten und zweiten Derivirten, welche ausserdem für $x = 0$ und $x = a$ verschwindet, so gilt die Reihenentwickelung*)

---

*) Für die Gültigkeitsbedingung der Reihenentwickelung vgl. Radaković, Wiener Monatshefte für Math. und Phys. Jahrg. V, wo auch für die y brauchbare Reihenentwickelungen gegeben sind. Dieselben ergeben sich zwar auch aus dem von Fuchs, Annali di Matematica, ser. II. tom. 4 aufgestellten allgemeinen Formeln, werden aber von Radaković aus der Vorstellung hergeleitet, dass die Saite von variabler Dichte aus einer Saite, welche aus einer Anzahl homogener Theile besteht, durch Vermehrung dieser Theile ins Unendliche als Grenzfall hervorgeht.

$$(34) \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^a \psi(x')\, y_n(x')\, h(x')\, dx}{\int_0^a \psi(x')\, y_n^2(x')\, dx'} \cdot y_n(x)$$

im Intervall $0 < x < a$, und es ist

$$(35) \qquad s(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^a \psi(x') \cdot y_n(x') h(x')\, dx'}{\int_0^a h(x')\, y_n^2(x')\, dx'} y_n(x)\, \eta(t, t', \lambda_n)$$

ein Integral der Differentialgleichung (1) welches für $t = t'$ verschwindet, während dann $\frac{\partial s}{\partial t} = \psi(x)$ wird, gültig, so lange x im Intervalle von 0 bis a bleibt.

Ebenso würde man durch die Formel

$$(36) \qquad s_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^b \varphi(t') \cdot \eta_n(t') \cdot g(t')\, dt'}{\int_0^b g(t')\, \eta_n^2(t')\, dt'} \eta_n(t)\, y(x, x', \mu_n)$$

ein Integral der Differentialgleichung (1) erhalten, gültig, so lange t zwischen 0 und b bleibt, welches für $x = x'$ verschwindet, und dessen erste Derivirte nach x ebenda den Werth $\varphi(t)$ annimmt.

Da nun andererseits nach Formel (10)

$$s(x,t) = \tfrac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{1}{h(x)\, g(t)\, g(t')}} \int_{x_1}^{x_2} \psi(x') \cdot v(x, t;\, x', t')\, h(x')^{\frac{3}{4}}\, dx'$$

ist, wo x_1 und x_2 aus den Gleichungen

$$\int_t^{t'} \sqrt{g(t)}\, dt = -\int_x^{x_1} \sqrt{h(x)}\, dx; \qquad \int_t^{t'} \sqrt{g(t)}\, dt = \int_x^{x_2} \sqrt{h(x)}\, dx$$

zu bestimmen sind, so kann man dies mit (35) vergleichen. Unter der Voraussetzung, dass in (35) Integration und Summation vertauscht werden dürfen (wie es z. B. für gewöhnliche Fourier'sche Reihen zutrifft) kann man schreiben

$$(37) \quad \tfrac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{1}{h(x)\, g(t)\, g(t')}} \int_{x_1}^{x_2} \psi(x')\, v(x, t;\, x', t')\, h(x')^{\frac{3}{4}} \cdot dx'$$

$$= \int_0^a dx' \cdot \psi(x') \sum_0^{\infty} \frac{y_n(x')\, y_n(x) \cdot h(x')}{\int_0^a h(u)\, y_n^2(u)\, du}\, \eta(t, t', \lambda_n).$$

Hier ist nun wieder zu unterscheiden ob x_1 und x_2 in das Intervall $(0, a)$ hineinfallen oder nicht, und im ersteren Falle ob $t > t'$ oder $t < t'$. Fallen x_1 und x_2 nicht beide in das Intervall $(0, a)$, so ist über die Reihe rechts nichts bekannt. Ist im ersteren Fall $t > t'$, so ist auch $x_2 < x_1$, die Integration rechts ist dann dem Sinne nach entgegengesetzt zu der links und es ergiebt sich

$$(38a)\quad v(x,t;x',t') = -2\sqrt[4]{h(x)h(x')g(t)g(t')}\sum_0^\infty \frac{y_n(x')\,y_n(x)\,\eta(t,t',\lambda_n)}{\int_0^a h(u)\,y_n^2(u)\,du},$$

so lange $x_2 < x < x_1$, dagegen verschwindet die Summe links für ein x, welches ausserhalb dieses Intervalles $(x_2 \ldots x_1)$, aber im Intervall $(0, a)$ liegt. Ebenso findet man für $t < t'$ $x_1 < x < x_2$

$$(38b)\quad v(x,t;x',t') = 2\sqrt[4]{h(x)h(x')g(t)g(t')}\sum_0^\infty \frac{y_n(x')\,y_n(x)\,\eta(t,t',\lambda_n)}{\int_0^a h(u)\,y_n^2(u)\,du},$$

dagegen wieder Null für die Summe rechts, wenn x ausserhalb des Intervalles (x_1, x_2) liegt.

Die nämlichen Ueberlegungen kann man an Formel (36) knüpfen.

Um die erlangten Resultate deutlich zu übersehen, stellen wir die Formel und ihr Giltigkeitsgebiet zusammen.

Sei in Fig. 5 A der Punkt (x, t), dann ist

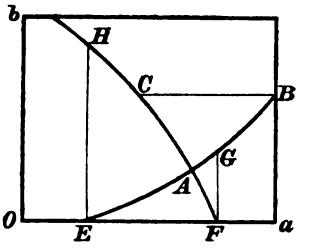


Fig. 5.

$$(39)\quad 2\sqrt[4]{h(x)h(x')g(t)g(t')}\sum_0^\infty \frac{y_n(x')y_n(x)\,\eta(t,t',\lambda_n)}{\int_0^a h(u)\,y_n^2(u)\,du}$$

$$= v(xt;\,x't') \text{ im Gebiete } ABC$$
$$= -v(xt;\,x't') \text{ im Gebiete } AEF$$
$$= 0 \text{ in den Gebieten } AFG,\ AEH.$$

Ferner

$$(40)\quad 2\sqrt[4]{h(x)h(x')g(t)g(t')}\sum_0^\infty \frac{\eta_n(t')\,\eta_n(t)\,y(x,x',\mu_n)}{\int_0^b g(u)\,\eta_n^2(u)\,du}$$

$$= v(xt;\,x't') \text{ im Gebiet } AFG$$
$$= -v(xt;\,x't') \text{ im Gebiet } AEH$$
$$= 0 \text{ in den Gebieten } ABC,\ AEF,$$

wo EAB und FAC die beiden durch A gehenden Charakteristiken η, resp. ξ sind. Denkt man sich $v(xt; x't')$ durch die Reihe (12) ermittelt, so kann man diese Formeln auch als Summation der Reihen links in (39) und (40) auffassen.

Wenn nun die Functionen $g(t)$, $h(x)$ die angeführte Beschaffenheit für beliebiges a und b haben, und ferner die Vertauschung von Integration und Differentiation in (37) für jedes Gebiet zulässig ist, welches von einem Rechteck begrenzt ist, dessen Seiten den Coordinatenaxen parallel sind, dann kann man auch innerhalb eines vorgegebenen endlichen Gebietes für die beiden Punkte (x, t), (x', t') die Function v mit Hilfe der Reihen (39) und (40) darstellen.

Man schliesse nämlich zunächst das gegebene Gebiet in ein von Charakteristiken begrenztes Viereck $ABCD$ ein (Fig. 6). Zieht man durch A die Parallelen zu den Coordinatenaxen, so schneiden diese die beiden Charakteristiken durch C resp. in den Punkten A_1, A_2, A_1', A_2'. Verfährt man nun ebenso mit B, C, D, so erhält man im Ganzen 16 Punkte.

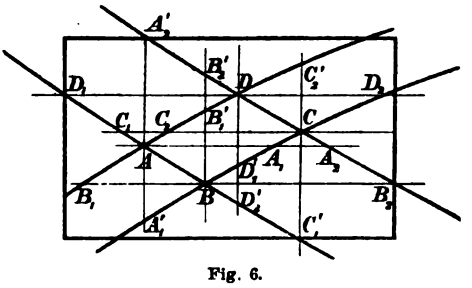


Fig. 6.

Dasjenige Rechteck $OLMN$ nun, welches alle diese Punkte im Innern oder auf der Grenze enthält, kann dann als Bereich zu Grunde gelegt werden für die Entwicklung nach Normalfunctionen, und man erkennt unmittelbar aus der Figur, dass dann, wenn x, t; x', t' innerhalb des Charakteristikenvierecks $ABCD$ liegt, immer eine der Formeln (39) oder (40) die Berechnung von $v(xt, x't')$ gestattet, da der Bereich, innerhalb dessen unter diesen Umständen $v(xt, x't')$ dargestellt wird, immer über $ABCD$ hinausgreift.

§ 8.

Nähere Ausführung für die Differentialgleichung der schwingenden Saite.

Die im Vorigen für gewisse Gebiete ermittelten Beziehungen zwischen der Function v und nach Normalfunctionen fortschreitenden Reihen lassen sich noch etwas weiter ausführen für die bereits öfter herangezogene Aufgabe der Integration der Differentialgleichung der schwingenden Saite von variabler Dichte und endlicher Länge l.

In diesem Fall hat man, wie früher bemerkt, die Dichte als gerade periodische Function von der Periode $2l$ fortzusetzen, während Anfangslage und Geschwindigkeit durch ungerade Functionen von der nämlichen Periode gegeben sind. In unserer Differentialgleichung wird

$g(t) = 1$ und man sieht sogleich, dass die im vorigen Paragraphen mit $y_n(x)$ bezeichneten Functionen selbst ungerade periodisch mit der Periode $2l$ werden.

Die im Vorigen mit $\eta(t, t', \lambda_n)$ bezeichnete Function wird hier

$$\eta(t, t', \lambda_n) = \frac{\sin \lambda_n (t - t')}{\lambda_n}.$$

Die Gleichung (37) nimmt daher die Gestalt an

$$(41) \qquad \frac{1}{2} h(x)^{-\frac{1}{4}} \int_{x_1}^{x_2} dx' \frac{\psi(x')\, v(x, t; x'; t')}{\sqrt[4]{h^3(x')}}$$

$$= \int_0^l dx' \, \psi(x') \sum_0^\infty \frac{y_n(x)\, y_n(x')\, h(x')}{\int_0^l h(u)\, y_n^2(u)\, du} \frac{\sin \lambda_n (t - t')}{\lambda_n}.$$

Bei der nunmehr vorausgesetzten Beschaffenheit von $h(x')$, $\psi(x')$ kann man aber jetzt nicht mehr die Coefficienten der willkürlichen Function auf beiden Seiten ohne Weiteres vergleichen, wenn das Intervall $x_1 \ldots x_2$ ganz oder theilweise über das Intervall $0 \ldots l$ hinausgreift. Eine willkürliche Annahme über $\psi(x')$ an einer Stelle des Intervalles bestimmt nämlich jetzt bereits auch die Werthe an den Stellen

$$z_{2k} = x' + 2kl$$

und an den Stellen

$$(2k + 1)\, l - x = z_{2k+1}$$

innerhalb des Intervalls, wenn k eine ganze Zahl bedeutet, und zwar ist

$$\psi(z_{2k}) = \psi(x'), \quad \psi(z_{2k+1}) = -\psi(x').$$

Zieht man nun durch den Punkt x', t' eine Parallele zur Abscissenaxe, so schneidet diese die Charakteristiken durch x, t in den Punkten x_1, x_2 und man hat alle Punkte z_{2k} auf dieser Strecke positiv, alle Punkte z_{2k+1} dagegen negativ in Rechnung zu ziehen, wenn $x_1 < x_2$ also $t > t'$ ist. Ist $t < t'$, so hat man die Zeichen entgegengesetzt zu nehmen. Man erhält so für $t > t'$

$$(42) \quad \frac{1}{2} h(x)^{-\frac{1}{4}} \Big(\sum v(x, t; z_{2k}, t')\, h^{\frac{3}{4}}(z_{2k}) - \sum v(x, t; z_{2k+1} t')\, h^{\frac{3}{4}}(z_{2k+1}) \Big)$$

$$= \sum_0^\infty \frac{y_n(x)\, y_n(x')\, h(x')}{\int_0^n h(u)\, y_n^2(u)\, du} \frac{\sin \lambda_n (t - t')}{\lambda_n}.$$

Dabei ist die erste Summe über alle z_{2k}, die zweite über alle z_{2k+1} des Intervalles $x_1 x_2$ zu erstrecken. Die Summe links ist Null, wenn kein

Punkt z_{2k} oder z_{2k+1} im Intervall x_1, x_2 liegt. Für $t < t'$ ist die linke Seite negativ zu nehmen. Um den Sachverhalt völlig klar zu stellen, sind in der untenstehenden Figur 7 diejenigen Gebiete für x', t' bezeichnet, in denen die Summe rechts in (42) durch die nämliche Formel links dargestellt wird, wenn sowohl x als x' auf das Intervall $0 \ldots l$ beschränkt werden, und A den Punkt x, t bezeichnet. Diese Gebiete sind von Charakteristikencurven begrenzt und die eingesetzte

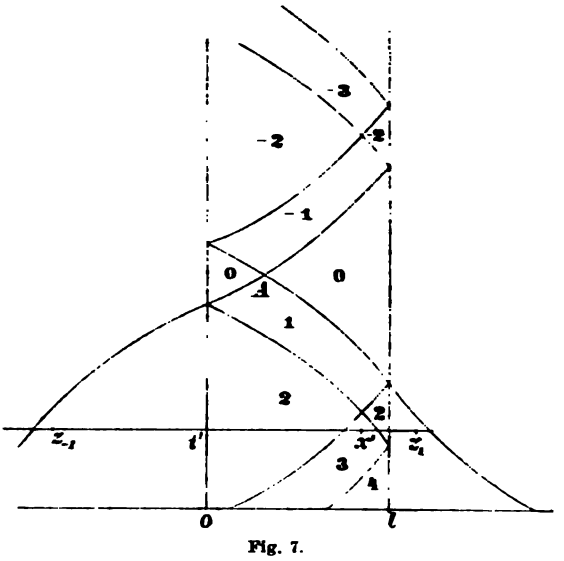


Fig. 7.

Zahl giebt an, wie viele Glieder insgesammt links in (42) auftreten. In dem mit $+1$ bezeichneten Bereich liefert nach Absonderung des Factors $h(x')$ die Summe rechts in (42) den positiven, in dem mit -1 bezeichneten Bereich den negativen Werth von $\frac{1}{2}\sqrt[4]{h(x)\,h(x')}\,v(x,t;x't')$, in den mit 0 bezeichneten Feldern verschwindet sie. Ausserdem sind noch für einen Punkt x', t' die Punkte z_{2k}, z_{2k+1} eingezeichnet, wobei x' selbst als z_0 zu bezeichnen wäre. Man bestätigt dieses Verhalten durch directe Summation, wenn $h(x) = 1$ ist, weil dann die Summe rechts in (42) wird

$$\frac{1}{\pi}\sum_{0}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x'}{l}\sin\frac{n\pi(t-t')}{l}}{n}$$

und in den ungeraden Feldern verschwindet, in den geraden abwechselnd die Werthe $\pm\frac{1}{2}$ annimmt.

§ 9.

Ueber die Schwingungen einer unendlich langen Saite von variabler Dichte.

Die vorigen Entwicklungen zeigen merkwürdige Beziehungen zwischen der Function v und den Normalfunctionen passend gewählter Gebiete, und diese letzteren können unter Umständen, die am Ende des § 7 besprochen sind, beliebig gross sein, wenn sie nur endlich sind. Es wäre nun zu erwarten, dass bei Ausdehnung der Gebiete in's Unendliche ebenso wie bei der Fourier'schen Reihe brauchbare Integraldarstellungen aus den Reihen hervorgehen. Allein der Durchführung dieser Grenzübergänge stellen sich mannigfache Schwierigkeiten entgegen, von denen wir die wesentlichste nun erörtern wollen, da das Resultat auch an und für sich ein gewisses Interesse hat.

Soll aus der Reihe beim Grenzübergang ein brauchbares Integral werden, so müssen die λ_n die ganze Strecke von 0 bis ∞ immer dichter und dichter erfüllen je grösser l wird, und zwar so, dass in jedem Theil dieses Gebietes bei genügend grossen l beliebig viele λ liegen. Dies ist aber im Allgemeinen durchaus nicht der Fall, sondern bei beständiger Ausdehnung des Gebietes l werden im Allgemeinen die λ_n nur gewisse nicht zusammenhängende Gebiete immer dichter erfüllen, und diese getrennten Gebiete sind in unendlicher Anzahl vorhanden. Nur unter ganz speciellen Bedingungen schliessen sich diese getrennte Gebiete zu einem zusammen. In der Ausdrucksweise der Optik würde also die Schwingung einer unendlich langen Saite im Allgemeinen einen Bandenspectrum entsprechen. Um diese Behauptungen näher zu begründen, betrachten wir eine nach beiden Seiten unbegrenzte Saite von variabler Dichte, deren Dichtigkeitsgesetz eine gerade periodische Function der Abscisse mit der Periode $2l$ ist.

Die Differentialgleichung für die Normalfunctionen wird dann

$$y'' + \lambda^2 h(x) \cdot y = 0. \tag{43}$$

Sei nun $y_1(x, \lambda)$ dasjenige Integral der Differentialgleichung, welches für $x = 0$ verschwindet, während die erste Derivirte den Werth 1 annimmt, $y_2(x, \lambda)$ dagegen dasjenige Integral, welches für $x = 0$ den Werth 1 annimmt und dessen Derivirte verschwindet. Es ist dann y_1 eine ungerade Function von x, y_1 aber eine gerade Function. Ferner ist

$$y_2(x, \lambda)\, y_1'(x, \lambda) - y_1(x, \lambda)\, y_2'(x, \lambda) = 1$$

für jedes x.

Sind y_1 und y_2 von 0 bis l bekannt, so lassen sich aus diesen Werthen diejenigen für ein beliebiges x zusammensetzen.

Ist nämlich $Y(x, \lambda)$ irgend ein Integral von (43), so ist auch

$Y(x+2l, \lambda)$ ein solches, und beide sind dann nothwendig durch y_1 und y_2 homogen und linear darstellbar. Setzt man daher

$$Y(x, \lambda) = \alpha y_1(x, \lambda) + \beta y_2(x, \lambda),$$

so bestehen 2 Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} (44)\quad & \alpha y_1(x+2l, \lambda) + \beta y_2(x+2l, \lambda) = \alpha' y_1(x, \lambda) + \beta' y_2(x, \lambda), \\ & \alpha y_1'(x+2l, \lambda) + \beta y_2'(x+2l, \lambda) = \alpha' y_1'(x, \lambda) + \beta' y_2'(x, \lambda). \end{aligned}$$

Wir wollen nun α und β so bestimmen, dass $\alpha' = \varrho\alpha$, $\beta' = \varrho\beta$ wird, also

$$Y(x+2l, \lambda) = \varrho Y(x, \lambda).$$

Setzen wir in (44) die angenommenen Werthe für α', β' ein und dann $x = -l$, so erhalten wir mit Rücksicht darauf, dass y_1, y_2' ungerade Functionen, y_2, y_1' gerade Functionen von x sind:

$$\begin{aligned} & \alpha y_1(l, \lambda) + \beta y_2(l, \lambda) = \varrho\big(-\alpha y_1(l, \lambda) + \beta y_2(l, \lambda)\big), \\ & \alpha y_1'(l, \lambda) + \beta y_2'(l, \lambda) = \varrho\big(\alpha y_1'(l, \lambda) - \beta y_2'(l, \lambda)\big) \end{aligned}$$

und hieraus zur Bestimmung von ϱ, α, β die Gleichungen

$$\begin{aligned} & \alpha(1+\varrho) y_1(l, \lambda) + \beta(1-\varrho) y_2(l, \lambda) = 0, \\ & \alpha(1-\varrho) y_1'(l, \lambda) + \beta(1+\varrho) y_2'(l, \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Sollen diese Gleichungen möglich sein, so hat man mit Rücksicht auf den Werth von $y_2 y_1' - y_1 y_2' = 1$

$$\begin{aligned} (45)\quad & \begin{vmatrix} (1+\varrho) y_1(l, \lambda) & (1-\varrho) y_2(l, \lambda) \\ (1-\varrho) y_1'(l, \lambda) & (1+\varrho) y_2'(l, \lambda) \end{vmatrix} \\ & = \varrho^2 - 2\varrho[y_1(l, \lambda) y_2'(l, \lambda) + y_1'(l, \lambda) y_2(l, \lambda)] + 1 = 0. \end{aligned}$$

Man erhält also zwei Werthe von ϱ

$$\left.\begin{matrix} \varrho_1 \\ \varrho_2 \end{matrix}\right\} = y_1(l, \lambda) y_2'(l, \lambda) + y_1'(l, \lambda) y_2(l, \lambda) \pm 2\sqrt{y_1(l, \lambda) y_1'(l, \lambda) y_2(l, \lambda) y_2'(l, \lambda)},$$

wo der Ausdruck unter der Quadratwurzel wieder mit Hilfe von

$$y_2 y_1' - y_1 y_2' = 1$$

umgeformt ist. Ferner ist $\varrho_1 \varrho_2 = 1$.

Den beiden Werthen von ϱ_1, ϱ_2 entsprechen dann zwei partikuläre Integrale $Y_1(x, \lambda)$, $Y_2(x, \lambda)$, für welche die Gleichungen bestehen

$$\begin{aligned} (46)\quad & Y_1(x+2kl, \lambda) = \varrho_1^k Y_1(x, \lambda), \\ & Y_2(x+2kl, \lambda) = \varrho_2^k Y_2(x, \lambda), \end{aligned}$$

wo k irgend eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

Aus den Integralen Y_1 und Y_2 können wir aber wieder alle andern linear zusammensetzen.

Soll nun

$$a\,Y_1(x, \lambda) + b\,Y_2(x, l)$$

ne Normalfunction des Stückes der Saite sein, welches sich von $-kl$ s $+kl$ erstreckt, so müssen die Gleichungen bestehen

$$a\,Y_1(-kl, \lambda) + b\,Y_2(-kl, \lambda) = 0,$$
$$a\,Y_1(\;\;kl, \lambda) + b\,Y_2(\;\;kl, \lambda) = 0,$$

id in Folge der Gleichungen (46) nimmt die zweite die Form an

$$a\,\varrho_1{}^k\,Y_1(-kl, \lambda) + b\,\varrho_2{}^k\,Y_2(-kl, \lambda) = 0.$$

a nun aY_1 und bY_2 nicht gleichzeitig Null sein können, so folgt eraus $\varrho_1{}^k = \varrho_2{}^k$ oder wegen $\varrho_1\varrho_2 = 1$

7) $$\varrho_1{}^{2k} = \varrho_2{}^{2k} = 1.$$

Mit Rücksicht auf die Werthe von ϱ_1 und ϱ_2 folgt hiermit:

Es können, wie immer die ganze Zahl k gewählt werden mag, nur lche Werthe λ auftreten, für welche das Product

$$y_1(l, \lambda)\,y_2(l, \lambda)\,y_1'(l, \lambda)\,y_2'(l, \lambda)$$

nen negativen Werth annimmt oder verschwindet.

Diejenigen Werthe von λ, welche das obige Product zu Null achen, scheiden daher, wenn sie einfache Wurzeln desselben sind, s Gebiet der Variablen λ in Theile, in welchen abwechselnd zu ormalfunctionen gehörige λ enthalten sein können oder nicht.

Es ist aber leicht zu sehen, dass in der Nähe solcher λ Werthe, r welche das obige Product negativ wird in der That sich immer ehr und mehr λ, welche zu Normalfunctionen gehören, finden müssen. a nämlich ein complexes ϱ_1 dem absoluten Betrag nach immer gleich ins ist, so giebt es in jeder Nähe von ϱ_1 Einheitswurzeln, und da ϱ_1 ne stetige Function von λ ist, so wird ϱ_1 in einem Intervall für λ, o es complex ist, auch beliebig oft einer Einheitswurzel gleich.

Hat dagegen die Gleichung

$$y_1(l, \lambda)\,y_2(l, \lambda)\,y_1'(l, \lambda)\,y_2'(l, \lambda) = 0$$

nter Doppelwurzeln, wie es für $h(x) = \text{const.}$ der Fall ist, so hat s Product links überall das nämliche Zeichen, und zwar im all- meinen das negative. Die früher getrennten Intervalle für λ schliessen ch nun lückenlos aneinander, das Bandenspectrum wird zum con- nuirlichen Spectrum.

Construction du polygone régulier de 17 côtés au moyen du seul compas.

Par

Mr. L. Gérard à Lyon.

Il s'agit de la construction des irrationalités suivantes:

$$x = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}, \qquad x_1 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4};$$

$$y = x + \sqrt{x^2 + 1}, \quad z = x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1},$$

$$t = 2\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{2}y + \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - z}\ ^*).$$

A partir d'un point A du cercle O de rayon 1, je porte trois cordes consécutives AB, BC, CD égales à 1. Je décris les cercles $A(AC)$, $D(AC)$, c'est à dire les cercles de centres A et D et de rayon AC, qui se coupent en un point E tel que

$$OE = \sqrt{2}.$$

Je décris le cercle $D(\sqrt{2})$, c'est à dire le cercle de centre D et de rayon $\sqrt{2}$, qui coupe le cercle $O(1)$ en F et F' et le cercle $A(AC)$ en G et G'; puis je décris les cercles $G(\sqrt{2})$ et $G'(\sqrt{2})$, qui se coupent en un point H milieu de AO.

Je prends OD pour axe des abscisses et OF pour axe des ordonnées et j'appelle X, X_1, Y, Z, T les points de la droite OD qui ont pour abscisses respectives x, x_1, y, z, t.

Je décris le cercle $H(1)$, qui coupe le cercle $O(1)$ en deux points K, K', qui ont pour abscisse $-\frac{1}{4}$ et pour ordonnées $\pm\sqrt{1 - \frac{1}{16}}$. Par conséquent,

$$KX = KX_1 = K'X = K'X_1 = \sqrt{\frac{17}{16} + 1 - \frac{1}{16}} = \sqrt{2}.$$

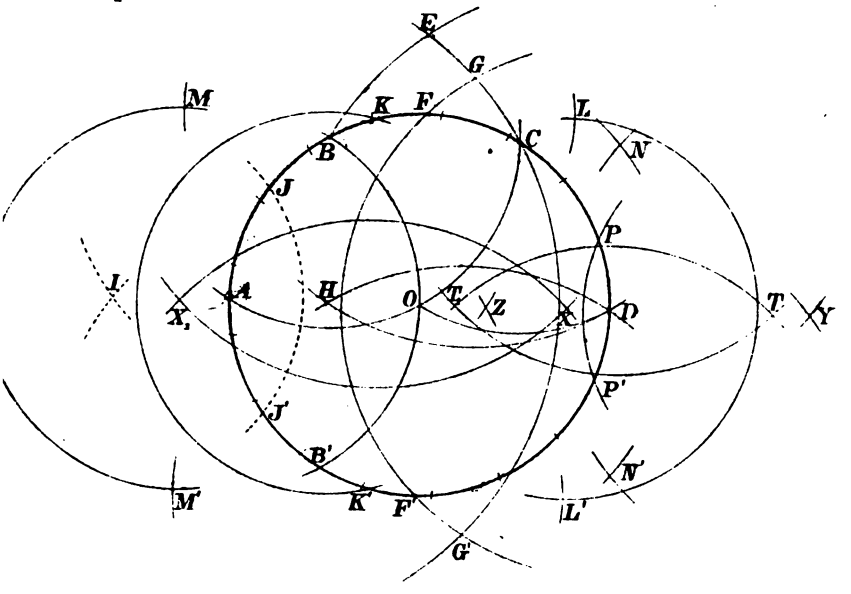
Donc les points X et X_1 sont à l'intersection des cercles $K(\sqrt{2})$ et $K'(\sqrt{2})$.

*) Voir F. Klein. Vorträge über ausgewählte Fragen d. Elementargeom., p 25.

Je construis les points L, L' qui ont pour abscisse x et pour rdonnées ± 1: ces points se trouvent à l'intersection du cercle $X(1)$ t des cercles $F(x)$ et $F'(x)$ et on a

$$LY = L'Y = \sqrt{x^2 + 1 + 1} = XE.$$

)onc le point Y est à l'intersection des cercles $L(XE)$ et $L'(XE)$. e construis de même les points M et M' qui ont pour abscisse x_1 t pour ordonnées ± 1, et je décris les cercles $M(X_1E)$ et $M'(X_1E)$, ui se coupent en Z.



Je décris les cercles $O(AZ)$ et $Y(AZ)$, qui se coupent en deux oints N et N', qui ont pour abscisse $\frac{1}{2}y$ et pour ordonnées

$$\pm\sqrt{(z+1)^2 - \tfrac{y^2}{4}};$$

e sorte que

$$NT = N'T = \sqrt{\tfrac{y^2}{4} - z + (z+1)^2 - \tfrac{y^2}{4}}$$

$$= \sqrt{z^2 + z + 1} = \sqrt{\left(z + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}}$$

$$= \sqrt{HZ^2 + HB^2} = ZB.$$

Donc le point T est à l'intersection des deux cercles $N(ZB)$ et $'(ZB)$

$$OT = 2\cos\frac{2\pi}{17}.$$

Enfin, je décris le cercle $T(1)$, qui coupe le cercle $O(1)$ en P et ': DP ou DP' est le côté du polygone régulier de 17 côtés.

Remarque.

Supposons qu'on opère avec deux compas: l'un d'ouverture constante et égale à 1, l'autre d'ouverture variable et désignons:

par C le tracé d'un cercle,

par C_1 l'action de placer une pointe du compas en un point *déterminé*,

par C_1' l'action de placer une pointe du compas en un point *indéterminé* d'un cercle,

par C_2 l'action d'amener la deuxième pointe du compas en un point déterminé, la première restant fixe.

La construction ci-dessus a pour symbole

$$27C + 30C_1 + C_1' + 8C_2;$$

elle exige donc le tracé de 27 cercles.

Nous avons obtenu tous les sommets du carré et de l'hexagone régulier. On peut trouver le côté du pentagone et celui du décagone en traçant trois nouveaux cercles. En effet soit I le point d'intersection des cercles $B(\sqrt{2})$ et $B'(\sqrt{2})$; on a

$$OI = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = +2\cos\frac{4\pi}{5}.$$

Donc si J et J' sont les points de rencontre des deux cercles $I(1)$ et $O(1)$, JJ' est le côté du pentagone et, AJ celui du décagone.

On peut simplifier un peu la construction précédente on remarquant que les quatre points L, M, L', M' sont sur un cercle ayant pour centre le milieu R de OH (qui est facile à construire) et pour rayon RE.

Lyon, 8 Juillet 1896.

Ueber Functionen zweier reeller Variablen.

Von

Otto Biermann in Brünn.

Die Abhandlung des Herrn Pringsheim „über Functionen" einer reellen Variablen, „welche in gewissen Punkten endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung aber keine Taylor'sche Reihenentwicklung besitzen"*), veranlasste mich nach ganz analoger Methode Functionen zweier reeller Variablen t_1, t_2 zu bilden, welche an keiner Stelle eines endlichen Bereiches durch eine Taylor'sche Reihe darstellbar aber an jeder Stelle des Bereiches sammt ihren partiellen Ableitungen von jeder endlichen Ordnung endlich und stetig sind.

Da sich für Potenzreihen zweier complexer Variablen alle die Sätze beweisen lassen, deren Herr Pringsheim für Potenzreihen einer Variablen x bedurfte, bevor er durch die Transformation $x = e^{it}$ von einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ mit endlichem Convergenzbereiche zu einer Function $\mathfrak{P}(e^{it}) = f(t)$ von der gewünschten Beschaffenheit gelangte, war es thatsächlich möglich, den von Herrn Pringsheim eingehaltenen Weg schrittweise zu verallgemeinern und dann auf Grund einiger Sätze über convergente Doppelreihen solche Functionen von zwei reellen Variablen wirklich herzustellen. Diese Functionen erscheinen in der Form von Reihen, welche bei gliedweiser Differentiation die betreffenden partiellen Ableitungen liefern. Und gerade aus diesem Grunde darf vielleicht diese Untersuchung einiges Interesse beanspruchen, da sie einen Beitrag bildet zu gewissen Untersuchungen, welche in allerneuester Zeit Herr E. Borel über die allgemeinste Form derartiger Reihen angestellt hat**).

Wir gehen von einer Potenzreihe in zwei von einander unabhängigen complexen Variablen x_1 und x_2 aus, die nicht überall divergire:

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu,\nu} x_1^{\mu} x_2^{\nu}.$$

*) Math. Ann. Bd. 44, p. 41.

**) Ann. de l'école norm. sup. 1896. No. 2 et 3, pag. 79.

Es existirt also ein Convergenzbereich, der aus zwei in den Zahlenebenen der Variablen um $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ gelegten Kreisflächen mit Radien R_1 und R_2 besteht. Ist R die kleinere dieser Grössen, so convergirt $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ auch dort, wo $|x_1| < R$ und $|x_2| < R$ ist. Dieser Bereich sei durch (R) bezeichnet.

Der grösste Bereich (R), in dem $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ convergirt, der sogenannte wahre Convergenzbereich ist dadurch ausgezeichnet, dass auf seiner Begrenzung mindestens eine singuläre Stelle (c_1, c_2) liegt, d. h. eine Stelle, die von dem Convergenzbereich keiner aus der gegebenen Reihe direct ableitbaren Reihe

$$\mathfrak{P}(x_1^{(0)} + (x_1 - x_1^{(0)}),\ x_2^{(0)} + (x_2 - x_2^{(0)})) = \mathfrak{P}(x_1, x_2 | x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$$

umfasst wird, wobei $|x_1^{(0)}|$ und $|x_2^{(0)}|$ kleiner als R sind.

Der Beweis für diesen Satz ist genau so zu führen, wie der für den entsprechenden Weierstrass'schen Satz von dem wahren Convergenzbereich einer Potenzreihe einer Variablen. Daher schreiben wir hier nur behufs Einführung später nöthiger Zeichen an, wie die direct ableitbare Reihe laute; es soll

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2 | x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \mathfrak{P}_{p,q}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \frac{(x_1 - x_1^{(0)})^p}{p!} \frac{(x_2 - x_2^{(0)})^q}{q!}$$

gesetzt werden, dann bedeutet $\mathfrak{P}_{p,q}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ den Werth der Reihe:

$$p!\, q! \sum_{\mu=p,\, \nu=q}^{\infty} a_{\mu,\nu} \binom{\mu}{p} \binom{\nu}{q} x_1^{\mu-p} x_2^{\nu-q}$$

an der Stelle $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$.

Um über den wahren Convergenzbereich (R) einer Potenzreihe in zwei Variablen Aufschluss zu erhalten, diene zunächst der folgende Hilfssatz, der auf Grund von bekannten Sätzen über unendliche Doppelreihen leicht bewiesen wird.

Ist

$$\alpha_{\mu,\nu} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

eine Folge solcher Grössen, dass die Grössenmenge

$$\left| \sqrt[\mu+\nu]{\alpha_{\mu,\nu}} \right| \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

wo $\sqrt[0]{\alpha_{00}} = \alpha_{00}$ sei, eine obere Unbestimmtheitsgrenze $\alpha < 1$ besitzt, so convergirt die unendliche Doppelreihe

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \alpha_{\mu,\nu}$$

absolut; wenn aber $\alpha > 1$ ist, so divergirt die Doppelreihe

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} |\alpha_{\mu,\nu}|.$$

Die Anwendung dieses Satzes auf diejenigen Reihen

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu,\nu}\, x_1^{\mu} x_2^{\nu},$$

deren Coefficienten die Eigenschaft haben, dass die Grössenmenge

$$\left| \sqrt[\mu+\nu]{a_{\mu,\nu}} \right| \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

eine endliche obere Unbestimmtheitsgrenze $\frac{1}{R}$ $(R>0)$ besitzt, lehrt, dass die Reihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ den wahren Convergenzbereich (R) hat*).

Auf der Begrenzung des Convergenzbereiches (R) jeder Reihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ liegt mindestens eine singuläre Stelle. Sind die Coefficienten $a_{\mu,\nu}$ dieser Reihe von angebbaren Werthen m und n der Indices μ und ν ab alle positiv, so wird die Stelle (R, R) eine singuläre.

In der That betrachtet man die Werthe der Coefficienten der Reihenentwicklung $\mathfrak{P}(x_1, x_2 \mid x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$:

$$\frac{1}{p!}\frac{1}{q!}\mathfrak{P}_{p,q}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \quad (p \geqq m,\ q \geqq n)$$

an den Stellen $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$, wo die Beträge $|x_1^{(0)}|, |x_2^{(0)}|$ die vorgegebenen Werthe $\xi_1^{(0)}$ und $\xi_2^{(0)}$ haben, so werden diese Coefficienten zufolge der Ungleichungen:

$$\left| \sum_{\mu=p,\nu=q}^{\infty} a_{\mu,\nu} \binom{\mu}{p} \binom{\nu}{q} (x_1^{(0)})^{\mu-p} (x_2^{(0)})^{\nu-q} \right|$$

$$\leqq \sum_{\mu=p,\nu=q}^{\infty} a_{\mu,\nu} \binom{\mu}{p} \binom{\nu}{q} |x_1^{(0)}|^{\mu-p} |x_2^{(0)}|^{\nu-q}$$

dann ihre grössten Werthe annehmen, wenn $x_1^{(0)} = \xi_1^{(0)}$ und $x_2^{(0)} = \xi_2^{(0)}$ ist; und darum ist der Convergenzbereich (r) keiner der abgeleiteten Reihen um eine der genannten Stellen kleiner als der Convergenzbereich der Reihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2 \mid \xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)})$, der $(R - \xi^{(0)})$ heisst, wenn die kleinere der Grössen $\xi_1^{(0)}$ und $\xi_2^{(0)}$ mit $\xi^{(0)}$ bezeichnet wird; denn der Convergenzbereich mindestens von einer der abgeleiteten Reihen kann nur bis an die Begrenzung des Bereiches (R) reichen. Die Stelle (R, R) ist also singuläre Stelle.

---

*) Der analoge Satz für Potenzreihen einer Variablen ist 1892 in Liouville's J. von Herrn Hadamard weitläufig besprochen worden. Dieser angeblich Hadamard'sche Satz (siehe so Picard, traité d'analyse T. I, p. 211, T. II, p. 70) findet sich — wie ich einer Mittheilung des Herrn Pringsheim mit Dank entnehme — schon vollständig bei Cauchy (Analyse algébr. p. 151. Résum. analyt. p. 47). Nicht einmal die genauere Definition des Begriffes „limite superieure" (bei Cauchy: „la plus grande des limites") rührt von H. her, sondern ist seit Du Bois-Reymond als die „obere Unbestimmtheitsgrenze" allgemein bekannt.

Von einer Reihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$, zu deren singulären Stellen auf der Begrenzung ihres Convergenzbereiches (R) die Stelle (R, R) gehöre, gehen wir nun durch die Substitutionen:

$$x_1 = Rz_1, \quad x_2 = Rz_2$$

zu einer Reihe

$$\mathfrak{P}(z_1, z_2) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} c_{\mu,\nu} z_1^{\mu} z_2^{\nu},$$

die auf der Begrenzung ihres Convergenzbereiches (1) die singuläre Stelle (1, 1) besitzt.

Um thatsächlich eine solche Reihe zu erhalten, wähle man auf Grund der früheren Sätze als Coefficienten $c_{\mu,\nu}$ nur lauter positive endliche Grössen von der Art, dass die obere Unbestimmtheitsgrenze

$$\lim \sqrt[\mu+\nu]{c_{\mu,\nu}} = 1 \quad (\mu, \nu = \infty; \mu = \infty; \nu = \infty)$$

wird.

Unterwirft man ausserdem die positiven Grössen $c_{\mu,\nu}$ solchen Bedingungen, dass die Reihe $\mathfrak{P}(z_1, z_2)$ sammt ihren Ableitungen $\mathfrak{P}_{p,q}(z_1, z_2)$ von jeder endlichen Ordnung an jeder Stelle der Begrenzung des Bereiches (1) unbedingt (und absolut) convergirt, so ist dann durch $\mathfrak{P}(z_1, z_2)$ eine analytische Function definirt, die auf der Begrenzung des Bereiches (1) sammt den Ableitungen von jeder endlichen Ordnung endlich und stetig ist, aber in keiner Umgebung der Stelle (1, 1) nach Potenzen von $(z_1 - 1)$ und $(z_2 - 1)$ entwickelbar ist, denn diese Stelle ist eine singuläre.

Zur Ermittlung solcher Bedingungen an die Grössen $c_{\mu,\nu}$ beachte man, dass eine unendliche Doppelreihe aus positiven Grössen $\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} b_{\mu,\nu}$ convergirt, wenn sich eine positive Grösse p, die beliebig wenig grösser als Eins zu sein braucht, so finden lässt, dass für wachsende μ und ν

$$\lim (\mu \,.\, \nu)^p b_{\mu,\nu}$$

endlich bleibt und dasselbe auch bei wachsendem μ für jedes endliche ν und bei wachsendem ν für jedes endliche μ gilt*). Darnach fordere man nun zum besagten Zwecke, dass die Grössen

$$(\mu\nu)^p c_{\mu,\nu}, \quad (\mu)^p c_{\mu,0}, \quad (\nu)^p c_{0,\nu}$$

für jedwedes endliche positive $p > 1$ unter einer angebbaren Grösse bleiben und bei wachsendem μ und ν oder μ oder ν die Grenzen den Werth Null haben.

Jetzt handelt es sich darum, wirklich Grössen von den verlangten Eigenschaften zu bilden. Setzt man

*) S. Thomae, Abriss einer Theorie der compl. Funct. 2. Aufl. 1873, p. 76, Fussnote.

$$c_{\mu,\nu} = (\mu \,.\, \nu)^{-p_{\mu,\nu}} = a^{-p_{\mu,\nu}\log_a(\mu\cdot\nu)},$$
$$c_{\mu,0} = (\mu)^{-p_{\mu,0}} = a^{-p_{\mu,0}\log\mu},$$
$$c_{0,\nu} = (\nu)^{-p_{0,\nu}} = a^{-p_{0,\nu}\log\nu},$$

wo $p_{\mu,\nu}$, $p_{\mu,0}$, $p_{0,\nu}$ mit μ und ν oder μ oder ν unendlich werdende Grössen seien und $a > 1$ sei, so wird den zuletzt ausgesprochenen Forderungen genügt.

Doch es soll auch

$$\lim \sqrt[\mu+\nu]{c_{\mu,\nu}} = 1 \quad (\mu, \nu = \infty;\ \mu = \infty;\ \nu = \infty)$$

sein. Weil aber jetzt

$$\sqrt[\mu+\nu]{c_{\mu,\nu}} = a^{-\frac{p_{\mu,\nu}}{\mu+\nu}\log_a(\mu\cdot\nu)}, \quad \sqrt[\mu]{c_{\mu,0}} = a^{-\frac{p_{\mu,0}}{\mu}\log_a(\mu)}, \quad \sqrt[\nu]{c_{0,\nu}} = a^{-\frac{p_{0,\nu}}{\nu}\log_a(\nu)}$$

ist, hat man die Bedingungen zu erfüllen:

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} \frac{p_{\mu,\nu}}{\mu+\nu}\log_a(\mu\cdot\nu) = 0, \qquad \lim_{\mu=\infty} \frac{p_{\mu,0}}{\mu}\log_a(\mu) = 0,$$

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{p_{0,\nu}}{\nu}\log_a(\nu) = 0;$$

daher kann man

$$\frac{p_{\mu,\nu}\log_a(\mu\cdot\nu)}{\mu+\nu} = \frac{1}{m_{\mu,\nu}}, \quad \frac{p_{\mu,0}\log_a(\mu)}{\mu} = \frac{1}{m_{\mu,0}}, \quad \frac{p_{0,\nu}\log_a(\nu)}{\nu} = \frac{1}{m_{0,\nu}}$$

setzen, wo $m_{\mu,\nu}$, $m_{\mu,0}$, $m_{0,\nu}$, wieder mit μ und ν oder μ oder ν unendlich werdende Grössen bedeuten, welche aber die Eigenschaften haben, dass

$$\lim \frac{m_{\mu,\nu}}{\frac{\mu+\nu}{\log_a(\mu\cdot\nu)}} = \lim \frac{1}{p_{\mu,\nu}} = 0 \quad (\mu, \nu = \infty;\ \mu = \infty;\ \nu = \infty),$$

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{m_{\mu,0}}{\frac{\mu}{\log_a(\mu)}} = \lim_{\mu=\infty} \frac{1}{p_{\mu,0}} = 0, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{m_{0,\nu}}{\frac{\nu}{\log_a(\nu)}} = \lim_{\nu=\infty} \frac{1}{p_{0,\nu}} = 0$$

ist. Hierauf wird

$$c_{\mu,\nu} = a^{-\frac{\mu+\nu}{m_{\mu,\nu}}}.$$

Führt man nun die Function $\mathfrak{P}(z_1, z_2)$, in der die Coefficienten in der eben genannten Art gewählt seien, durch die Substitutionen:

$$z_1 = e^{t_1 i}, \quad z_2 = e^{t_2 i},$$

welche die Einheitskreise der z_1 und z_2 Ebene derart auf die reellen Zahlenlinien der t_1- und t_2-Ebene abbilden, dass $z_1 = 0$ die Stellen

$t_1 = 2n\pi$ und $s_2 = 0$ die Stellen $t_2 = 2n\pi$ entsprechen, in eine Function $\mathfrak{p}(t_1, t_2)$ von t_1 und t_2 über, so besitzt diese für alle reellen t_1 und t_2 endliche Ableitungen von jeder endlichen Ordnung und ist sammt diesen Ableitungen eine stetige Function, aber sie ist in der Umgebung der Stelle (0, 0) nicht nach der Taylor'schen Reihe entwickelbar, denn $\mathfrak{p}(t_1, t_2)$ hat die singuläre Stelle (0, 0).

Diese Behauptung fliesst aus dem folgenden Satze: Ist die Function (Reihe) $\mathfrak{P}(s_1, s_2)$ in einer angebbaren Umgebung einer Grenzstelle (c_1, c_2) ihres Convergenzbereiches (1) regulären Verhaltens, so ist $\mathfrak{P}$ als Function von t_1 und t_2 betrachtet, auch in der Umgebung des Abbildes $(t_1^{(0)}, t_2^{(0)})$ von (c_1, c_2) entwickelbar; und umgekehrt wenn $\mathfrak{p}(t_1, t_2)$ in einer angebbaren Umgebung einer Stelle $(t_1^{(0)}, t_2^{(0)})$, wo $t_1^{(0)}$ und $t_2^{(0)}$ reell seien, entwickelbar ist, so lässt sich diese Entwicklung mit Hilfe der Substitutionen

$$t_1 - t_1^{(0)} = \frac{1}{i}\log\left(1 + \frac{s_1 - c_1}{c_1}\right), \quad t_2 - t_2^{(0)} = \frac{1}{i}\log\left(1 + \frac{s_2 - c_2}{c_2}\right)$$

in eine andere nach positiven Potenzen von $(s_1 - c_1)$ und $(s_2 - c_2)$ umformen, und d. h. $\mathfrak{p}(t_1, t_2)$ geht in eine an der Stelle (c_1, c_2) reguläre Function von s_1 und s_2 über.

Darnach nämlich entspricht jeder singulären Grenzstelle des Convergenzbereiches (1) unserer Reihe $\mathfrak{P}(s_1, s_2)$ eine singuläre Stelle $(t_1^{(0)}, t_2^{(0)})$ von $\mathfrak{p}(t_1, t_2)$.

Denken wir nun die Coefficienten $c_{\mu,\nu}$ von früher endlich auch noch so gewählt, dass die singulären Stellen auf der Begrenzung des Convergenzbereiches (1) von $\mathfrak{P}(s_1, s_2)$ überall dicht liegen, und dass somit $\mathfrak{P}(s_1, s_2)$ keine Fortsetzungen besitzt, aber noch immer an jeder Begrenzungsstelle sammt allen Ableitungen von endlicher Ordnung endlich und stetig ist, so wird die durch die frühere Substitution entstehende Function von t_1 und t_2 an keiner reellen Stelle (t_1, t_2) entwickelbar sein. Versteht man also unter t_1 und t_2 reelle Grössen und ordnet jeder Stelle (s_1, s_2) auf der Begrenzung des Bereiches (1) in einer (t_1, t_2) Ebene eine Stelle des Bereiches zu, wo

$$0 \leqq t_1 < 2\pi, \quad 0 \leqq t_2 < 2\pi$$

ist, so kann man $\mathfrak{p}(t_1, t_2)$ in diesem Bereiche (A) als eine *eindeutige, stetige Function der reellen Variablen* t_1 und t_2 bezeichnen, *die wohl an jeder Stelle endliche Ableitungen von jeder endlichen Ordnung hat, aber nicht entwickelbar ist; sie ist durch eine Reihe gegeben, aus der man die Ableitungen durch gliedweise Derivation findet.*

Will man zu einem *Beispiele* gelangen, so handelt es sich zunächst um die Herstellung von Potenzreihen, die über ihren Convergenzbereich (1) nicht fortsetzbar sind.

Wenn die Coefficienten $c_{\mu,\nu}$ der Reihe $\mathfrak{P}(z_1, z_2)$ positiv und so gewählt sind, dass

$$\lim \sqrt[\mu+\nu]{c_{\mu,\nu}} = 1$$

ist, so wird der Bereich (1) Convergenzbereich, und die Stelle (1, 1) ist singuläre Stelle. Bedeuten dann p_μ und q_ν solche mit μ beziehungsweise mit ν unendlich werdende ganze Zahlen, dass $p_{\mu'}$ durch p_μ, $q_{\nu'}$ durch q_ν theilbar sind, wenn $\mu' > \mu$, $\nu' > \nu$ ist, so ist

$$f(z_1, z_2) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} c_{p_\mu, q_\nu} z_1^{p_\mu} z_2^{q_\nu}$$

eine in dem Bereiche (1) existirende analytische Function von z_1 und z_2, welche keine Fortsetzungen zulässt.

In der That wenn man den Rest $R_{m,n}$ der angeschriebenen Reihe:

$$R_{m,n} = \sum_{\mu=m,\nu=n}^{\infty} c_{p_\mu, q_\nu} z_1^{p_\mu} z_2^{q_\nu} = \sum_{\mu=m,\nu=n}^{\infty} c_{p_\mu, q_\nu} \left(z_1^{p_m}\right)^{\frac{p_\mu}{p_m}} \cdot \left(z_2^{q_n}\right)^{\frac{q_\nu}{q_n}}$$

setzt, so erscheinen alle die Stellen auf der Begrenzung des Bereiches (1) singulär, für die

$$z_1^{p_m} = 1, \quad z_2^{q_n} = 1$$

ist; und weil man m und n beliebig gross wählen kann, werden die singulären Stellen von $R_{m,n}$ und natürlich auch die von $f(z_1, z_2)$ überall dicht auf der Begrenzung des Bereiches (1) liegen.

Dann aber ist nach dem Voranstehenden

$$f(z_1, z_2) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a^{-\frac{p_\mu + q_\nu}{m_{p_\mu, q_\nu}}} z_1^{p_\mu} z_2^{q_\nu}$$

eine allein in dem Bereiche (1) existirende analytische Function, die auf der Begrenzung desselben sammt den Ableitungen von jeder endlichen Ordnung endlich und stetig ist; und $f(e^{t_1 i}, e^{t_2 i})$ *ist* in dem früher genannten Bereiche (A) *eine eindeutige, stetige Function der reellen Variablen* t_1 *und* t_2, *die an keiner Stelle nach der Taylor'schen Reihe entwickelbar aber differenzirbar ist.*

Setzt man insbesondere

$$m_{\mu,\nu} = \frac{\mu + \nu}{\left(\log_a (\mu \cdot \nu)\right)^2}$$

also

$$c_{\mu,\nu} = (\mu \cdot \nu)^{-\log_a (\mu \cdot \nu)}$$

und versteht nun unter a eine positive *ganze* Zahl grösser als Eins, so dass man auch

$$p_\mu = a^\mu, \quad q_\nu = a^\nu$$

setzen darf, so wird

$$f(e^{t_1 i}, e^{t_2 i}) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} (a^{\mu+\nu})^{-\log_a (a^{\mu+\nu})} (e^{t_1 i})^{a^\mu} (e^{t_2 i})^{a^\nu}$$

$$= \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a^{-(\mu+\nu)^2} (e^{t_1 i})^{a^\mu} (e^{t_2 i})^{a^\nu}.$$

April 1896.

Projective Erzeugung der Curven m^{ter} Ordnung C^m*).

Von

Carl Küpper in Prag.

Einleitung.

Die seit Chasles gebräuchliche Begründung (siehe Cremona, Ebene Curven, übers. von Curtze) muss verworfen werden. Bringt man nämlich m in die Form $2n + \nu$, so wird gezeigt, dass $C^{2n+\nu}$ stets mittels zweier Büschel (C^n), $(C^{n+\nu})$, welche keinen Basispunkt gemein haben, erzeugt werden kann. Dieses Theorem folgt sofort durch einfache Anwendung des bekannten Restsatzes, *wenn feststeht, dass auf* $C^{2n+\nu}$ *die* n^2 *Grundpunkte eines* (C^n) *liegen.* Die bisher hierüber gegebene Lehre beruht aber ganz auf dem Fundamentalsatz:

„Geht irgend eine $C^{2n+\nu}$ *durch* $3n - 2$ *beliebige Punkte* f, *so enthält sie stets noch* $n^2 - (3n-2)$ *Punkte, welche mit diesen* f *die Basis* B *eines Büschels* (C^n) *ausmachen.*"

Wenn man nun (etwa bei Cremona) den Beweis nachsieht, so passt derselbe wörtlich auf folgenden Fall ($n=3$, $\nu=0$):

Sind die $3n - 2 = 7$ Punkte f die Doppelpunkte einer C^6, so müssten auf C^6 nothwendig 2 Punkte x vorkommen, welche mit den f die g Grundpunkte eines (C^3) liefern. Alsdann schnitten die C^3 aus C^6 eine $g_2^{(1)}$, und es wären alle ∞^6 C^6 mit den Doppelpunkten f hyperelliptische Curven. Solcher giebt es aber nur ∞^5, wie bekannt und wie überdies später bewiesen wird. Da mithin unzählige C^6 existiren, auf welchen die beiden x *nicht* sind, so liefert das übliche Raisonnement ein evident falsches Resultat, muss somit aufgegeben werden**).

Was ferner Herr de Jonquières***) vorbringt, stützt sich darauf, dass aus 2α Gleichungen zwischen 2α Coordinaten von α Punkten diese sich *bestimmen.* Soll dies eingesehen werden, so muss wenigstens

*) Umarbeitung und Erweiterung einer in den Sitzungsb. der k. böhm. Gesellsch. d. W. 1896 enthaltenen Note gleichen Titels.

**) Vgl. die Nr. 17 des Aufsatzes des Verf. „Hyperelliptische C^{3n}", Abh. d. k. böhm. Gesellsch. d. W. 1885.

***) C. R. 1887.

klar sein, dass die Gleichungen unabhängig von einander sind, und sich nicht widersprechen. Eine solche Prüfung der in der Luft schwebenden Relationen hat aber (aus nahe liegenden Gründen) gar nicht stattgefunden. Wie precär die Anwendung des hergeleiteten *Princips* ist, wenn es auf Curven mit Doppelpunkten ausgedehnt wird, hat sein Urheber (de Jonquières) durch die daraus abgeleiteten irrigen Folgerungen selbst gezeigt (s. Verf. in Math. Annalen XXXII, p. 282).

I.

Fundamentalsatz.

Ich gebe zunächst einen Beweis des Fundamentaltheorems. Im Folgenden ist stets zu unterscheiden die factische Mannigfaltigkeit μ der durch eine Gruppe von Q Punkten gehenden C^m von ihrer normalen $\mu_0 = \frac{1}{2}m(m+3) - Q$. Wenn $\mu = \mu_0$, so liegen die Q Punkte *normal*, ist $\mu > \mu_0$ *anormal* bezüglich C^m.

Wir nehmen in der Ebene $\varphi < \frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte f an, so dass wenigstens eine irreducible C^n sie enthält, und dass die f *normal* gegen die C^n sind. Die Zulässigkeit dieser Annahme ist unschwer nachzuweisen; sodann bilden die durch f möglichen C^n eine irreducible $\frac{1}{2}n(n+3) - \varphi$-fache Mannigfaltigkeit. Je zwei C^n liefern die Basis B eines nicht zerfallenden Büschels (C^n), seine n^2 Punkte sind *anormal* für die durch B gehenden C^{2n-3}, *normal* für ihre $C^{2n+\nu}$.

Nunmehr bestimmen wir die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ derjenigen $C^{2n+\nu}$, wovon jede mindestens eine, *nicht stets unendlich viele* B trägt, und bezeichnen eine solche (*projectiv erzeugbare*) Curve mit $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$.

Wir erhalten $\mathfrak{M} = \alpha + \beta$; wenn ∞^μ $C^{2n+\nu}$ durch die f gehen, von diesen ∞^α eine bestimmte B enthalten, und ∞^β Gruppen B überhaupt existiren.

Aber $\alpha = \mu - (n^2 - \varphi)$ wegen der normalen Lage von B gegen $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$; ferner $\beta = 2\left(\frac{1}{2}n(n+3) - 1 - \varphi\right)$, folglich

$$\mathfrak{M} = \mu - (\varphi - 3n + 2).$$

Dies besagt für $\varphi > 3n - 2$, dass es noch unzählige Curven $C^{2n+\nu}$ giebt, welche keine B enthalten, *also nicht* $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ sind.

Ist $\varphi = 3n - 2$, $\mathfrak{M} = \mu$, so folgt:

„Auf jeder der ∞^μ Curven $C^{2n+\nu}$ liegt wenigstens eine B, *so dass alle diese Curven* $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ sind.“*)

*) *Falls nicht auf jeder dieser* $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ *unendlich viele* B *sind.*

Wenn endlich $\varphi = \varphi_1 = 3n - 2 - x$ ist; also $\mathfrak{M}_1 = \mu_1 + x$ wird, so muss eine Reduction des $\mathfrak{M}_1$ stattfinden, da $\mathfrak{M}_1$ seiner Bedeutung nach nicht über das entsprechende μ_1 steigen kann. In der That kommt diese Reduction dadurch zu Stande, dass jetzt ausser den $3n - 2 - x = \varphi_1$ Punkten f auf einer $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ noch x Punkte E einer B beliebig wählbar sind.

Ist dies geschehen, so beträgt nach dem Vorigen die Mannigfaltigkeit der durch diese $3n - 2$ Punkte gehenden $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ genau $\mu_1 - x$, die totale mithin μ_1.

Im Allgemeinen würden hiernach die auf einer $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ etwa befindlichen B in *endlicher* Anzahl vorkommen, sobald $3n - 2$ Punkte f der B angenommen sind. Aber es ist *keineswegs* ausgeschlossen, dass auf gewissen der ∞^μ Curven $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$, welche die $3n - 2$ Punkte f, enthalten, unendlich viele B existiren, das heisst, dass von einer B noch einer oder mehrere Punkte willkürlich sind. Für derartige $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ kann sofort eine maximale Mannigfaltigkeit gefunden werden. Wird angenommen, dass jeder beliebige Punkt E einer $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ zu einer B gehört, so liegt ein E auf $\infty^{\mu-1}$ Curven $2n + \nu^{ter}$ Ordnung, jedoch nach Obigem nur auf $\infty^{\mu-\beta}$ $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ (β fällt um 2 Einheiten). Offenbar würde diese Mannigfaltigkeit um $1, 2 \ldots$ Einheiten kleiner ausfallen, wenn nebst E noch $1, 2, \ldots$ Punkte von einer B annehmbar wären. Nach Ausschluss aller dieser $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ verblieben sonach noch unendlich viele $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$, auf welchen die B ein- oder mehrdeutig bestimmt sein werden.

Beispielsweise sei $n = 3$; $3n - 2 = 7$: Die f bestimmen ein Netz von C^3, das man zur Transformation einer $\mathfrak{C}^{6+\nu}$ in dem Falle benutzen kann, wenn nicht eine derjenigen Curven zu Grunde liegt, auf welcher unendlich viele B existiren. Die Transformirte bekommt alsdann eine gewisse Anzahl von Doppelpunkten, und ebenso viele B treten auf $\mathfrak{C}^{6+\nu}$ auf. Wenn etwa $\nu = 0$ ist, so erhält man als Transformirte C^{11} ($7 + 11 = 3 \cdot 6$), und da ihr Geschlecht 10 sein muss, wie für $\mathfrak{C}^6$, so hat sie $5 \cdot 9 - 10 = 35$ Doppelpunkte.

Wir wenden uns jetzt zur Untersuchung der Erzeugnisse $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ zweier projectiver Büschel (C^n), $(C^{n+\nu})$, welche δ Basispunkte D gemein haben. $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ erhält dann die D zu Doppelpunkten; $C^{2n+\nu}$ ist das Zeichen für irgend eine Curve mit den Doppelpunkten D, wenn sie *nicht* auf diese projective Art hervorgebracht werden kann. *Die D sollen normal bezüglich C^n sein, daher ist $\delta < \frac{1}{2} n(n+3)$ zu nehmen.* Auf die Fälle $n = 1$, also auch $\delta = 1$; $n = 2$, $\delta \leqq 4$ ist es unnöthig einzugehen, da ihre Erledigung sich ganz von selbst versteht. Demgemäss ist $n > 2$ anzunehmen.

II.

Unentbehrliche Hülfssätze.

1. *Betreffend die Curven C_p^m mit δ gemeinschaftlichen Doppelpunkten D;* $p = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \delta \left(\delta < \frac{(m-3)m}{2}\right)$.

A) Untersuchung der Lage, welche die D bezüglich ihrer C^m haben können und der Constantenzahl c. δ, welche die D absorbiren ($c \gtreqless 3$):

Die Zahl $\frac{1}{2}m(m+3) - 3\delta = \mu_0$ giebt die normale, $\frac{1}{2}m(m+3) - c.\delta$ die factische Mannigfaltigkeit μ der C^m; die Differenz $\mu - \mu_0 = (3-c)\delta$ nennen wir Excess ξ. Es sei $\mu > 0$, mag μ_0 positiv oder negativ ausfallen.

Um μ zu finden, schneiden wir eine irreducible C_1^m mit irgend einer zweiten in einer Gruppe G von $Q = m^2 - 4\delta$ Punkten. Hat diese G_Q auf C_1^m die Beweglichkeit q, so folgt:

$$\mu = q + 1.$$

Wenn nun G_Q die Beweglichkeit $q_0 = Q - p$ hat, wofür sich durch Einführung der Werthe von Q, p die Zahl $\frac{1}{2}m(m+3) - 3\delta - 1$ ergiebt, so kommt $\mu = \mu_0$; das heisst, die D liegen normal bezüglich der C^m und absorbiren 3δ Constante. Bekanntlich tritt die Beweglichkeit q_0 dann und nur dann auf, wenn durch G_Q eine adjungirte C^{m-3} *unmöglich* ist.

Aber wenn $q = q_0 + \xi$, $\xi > 0$ als Beweglichkeit erhalten wird, kommt $\mu = \mu_0 + \xi$, oder $(3-c)\delta = \xi$, die D absorbiren $c\delta < 3\delta$ Constante, und haben *anormale* Lage gegen die C^m. Damit dies eintrete, ist erforderlich und hinreichend, dass durch G_Q genau $\infty^{p-1-Q+q_0+\xi} = \infty^{\xi-1}$ adjungirte C^{m-3} gehen (Riemann): „Kennt man demnach die Mannigfaltigkeit der adj. C^{m-3} durch G_Q gehend, so vermehre man diese um 1, um den Excess $\xi = (3-c)\delta$ zu erhalten."

Wir haben stillschweigend $Q > 0$, d, i. $m^2 > 4\delta$ gedacht, weil in späterer Anwendung allein diese Annahme nöthig ist; gleichwohl gilt das Gesagte auch, falls $Q = 0$ wäre.

Folgerungen:

a) Ist $Q = m^2 - 4\delta > 2p - 2$, oder, was auf dasselbe hinausläuft, ist $\delta < \frac{3m}{2}$, so muss, da keine adj. C^{m-3} durch G_Q möglich, $\xi = 0$ sein, also normale Lage der D bezüglich C^m stattfinden.

b) Dagegen werden bei $m^2 - 4\delta \lesseqgtr p - 1$ stets die D sich anormal gegen die C^m verhalten. Die hinreichende Bedingung der anormalen

Lage wäre somit $3\delta \geqq \frac{1}{2}m(m+3)$, wobei als Voraussetzung festzuhalten ist, dass mehr als *eine* C^m existirt.

c) Innerhalb der eben definirten Grenzen für δ kann die eine oder andere Lage bestehen. Alsdann wird ζ verschiedene von δ abhängige Werthe annehmen; wir wollen den grössten für ζ möglichen Werth bestimmen: dazu muss die Beweglichkeit $q = Q - p + \zeta$ der Specialgruppe $G_Q^{(q)}$ möglichst gross ausfallen. Nun ist aber bekanntlich immer: $Q - p + \zeta \gtrless \frac{1}{2}Q$; folglich $\zeta \gtrless \frac{1}{2}(2p - Q)$, oder

$$\zeta \gtrless \delta - \tfrac{1}{2}(3m-2). \tag{1}$$

Ersetzen wir ζ durch $(3-c)\delta$, so ergiebt sich:

$$c \geqq 2 + \frac{3m-2}{2\delta}. \tag{2}$$

Wenn demnach ζ über 0 wächst, c also unter 3 bleibt, so kann doch nie c unter $2 + \frac{3m-2}{2\delta}$ sinken. Der Bruch $\frac{3m-2}{2\delta}$ ist ein echter, da $\delta \geqq \frac{3m}{2}$ (a), und nimmt seinen kleinsten Werth für $\delta = \frac{m^2}{4}(m>6)$ an. Folglich kann c niemals kleiner als $2 + \frac{6m-4}{m^2}$ werden, wofern nicht alle C^m zerfallen.

B) Liegt auf C_p^m eine Gruppe $G_{\delta+e}$, bestehend aus den D und e einfachen Punkten E, und will man über deren normale oder anormale Lage entscheiden; so hat man durch $G_{\delta+e}$ eine zweite C_p^m zu legen, mit dieser die erste in weiteren Q Punkten zu schneiden. Stellt sich hierbei heraus, dass durch die G_Q *keine* adjungirte C^{m-3} legbar ist, *so liegt* $G_{\delta+e}$ *normal und ist gemeinsame Gruppe für genau* $\infty^{\frac{1}{2}m(m+3)-3\delta-e}$ *Curven* C_p^m.

Fällt dagegen G_Q auf eine adj. C^{m-3}, so ist anormale Lage der $G_{\delta+e}$ die Folge.

2. *Lehrsatz.* „*Wenn auf* $C^{2n+\nu}$ *mit* δ *Doppelpunkten* D *eine Gruppe von* $n^2 - \delta$ *Punkten* E *existirt, welche nebst* D *die Basis* B *eines Büschels* (C^n) *liefern, so dass diese* ∞^1 C^n *aus* $C^{2n+\nu}$ *eine* $g^{(1)}_{n^2+n\nu-\delta}$ *schneiden, so gehen durch eine beliebige Gruppe dieser Schaar genau* $\infty^{\frac{1}{2}(\nu+1)(\nu+2)}$ *adjungirte* $C^{n+\nu}$." (Siehe meinen Beweis in den Sitzungsberichten der böhm. Ges. d. W., Jahr 1888).*)

Hiernach ist $C^{2n+\nu}$ projectiv erzeugbar mittels des Büschels (C^n)

*) Die natürlichste und keinem Zweifel unterworfene Herleitung beruht auf dem Riemann-Roch'schen Theorem, von welchem unser Satz sich als specieller Fall erweist.

in Verbindung mit einem $(C^{n+\nu})$, von dessen Basis $\mathfrak{B}$ ausser den D noch $\frac{1}{2}(\nu+1)(\nu+2)$ Punkte auf $C^{2n+\nu}$ willkürlich sind. Ist $\nu=0$, so liefern die durch eine Gruppe $G^{(1)}_{n^2-\delta}$ der $g^{(1)}_{n^2-\delta}$ gehenden adj. C^n eine Schaar $\mathfrak{G}^{(1)}_{n^2-\delta}$, in welcher auch die E als Gruppe vorkommen. Entnimmt man dieser $\mathfrak{G}^{(1)}_{n^2-\delta}$ alsdann irgend zwei Gruppen, so giebt die eine mit den C zusammengenommen eine B, die andere eine $\mathfrak{B}$. Man darf den wesentlichen Unterschied nicht ausser Acht lassen, welchen die Fälle $\nu>0$ und $\nu=0$ darbieten. Im ersten entsprechen einer B auf $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ noch $\infty^{\frac{1}{2}(\nu+1)(\nu+2)}$ $\mathfrak{B}$, einer $\mathfrak{B}$ jedoch eine einzige B; im zweiten Falle entsprechen einer B noch ∞^1 $\mathfrak{B}$, ebenso umgekehrt. Die Kenntniss dieses Verhaltens hätte M. de Jonquières vor manchen falschen Schlüssen geschützt (v. a. a. O.).

3. *Hauptsatz.* *„Befindet sich auf $C^{2n+\nu}$ eine Gruppe B, Basis eines irreduciblen Büschels (C^n), zu dessen Punkten die D und $n^2-\delta$ Punkte E gehören, weshalb dann $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ vorliegt* (Satz 2), *so verhält sich B normal zu den sie aufnehmenden $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$."*

Beweis. $\mathfrak{C}_1^{2n+\nu}$ sei eine bestimmte dieser Schaar. Wir schneiden sie mit einer zweiten, bestehend aus einer irreduciblen C_1^n unseres Büschels, und einer beliebig durch D, *nicht aber durch B* gelegten $C^{n+\nu}$: C_1^n liefert ausser den E noch $n^2+n\nu-\delta$ Schnittpunkte $\mathfrak{E}$, welche (2.) mit den D den vollständigen Schnitt von C_1^n und einer $C_1^{n+\nu}$ bilden. $C^{n+\nu}$ liefert $(n+\nu)(2n+\nu)-2\delta=\Omega$ Schnittpunkte, welche einer Specialschaar auf $\mathfrak{C}_1^{2n+\nu}$ angehören: $G_\Omega^{(q)}$, wobei

$$q=\tfrac{1}{2}(n+\nu)(n+\nu+3)-\delta.$$

Zufolge 1. wäre nunmehr nur zu zeigen, dass unter den $\infty^{p-1-\Omega+q}$ durch G_Ω möglichen adjungirten $C^{2n+\nu-3}$ es keine geben kann, welche die Punkte $\mathfrak{E}$ enthält.

Da $p-1=\frac{1}{2}(2n+\nu-1)(2n+\nu-2)-\delta-1$, so ergiebt eine kleine Rechnung: $p-1-\Omega+q=\frac{1}{2}(n-3)n$; woraus erhellt, dass die durch G_Ω denkbaren adj. $C^{2n+\nu-3}$ zerfallen müssen in die $C^{n+\nu}$, welche die G_Ω lieferte, und die $\infty^{\frac{1}{2}(n-3)n}$ Curven C^{n-3}.

Es ist demnach zu entscheiden, ob die $\mathfrak{E}$ auf einer C^{n-3} sein können? Sicherlich nicht, wenn $n^2+n\nu-\delta>n(n-3)$, weil C_1^n irreducibel ist. Fielen ferner bei $n^2+n\nu-\delta\gtrless n(n-3)$ die $\mathfrak{E}$ auf eine C^{n-3}, so hätte dies zur Folge, dass der übrige Theil des Schnittes von C_1^n, $C_1^{n+\nu}$, nämlich die D, in *anormaler* Lage bezüglich der $C^{n+\nu}$, also auch der C^n wären. (Wir betonen nochmals, dass die fest an-

genommenen Basispunkte D des (C^n) *normal* zu diesen C^n vorauszusetzen sind.)

Natürlicherweise verhalten sich jetzt auch die D normal zu den $C^{2n+\nu}$, *von denen sonach genau* ∞^μ, $\mu = \frac{1}{2}(2n+\nu)(2n+\nu+3) - 3\delta$, *existiren*. Tritt für δ ein verschiedener Werth δ_1 auf, so wird das entsprechende μ durch μ_1 bezeichnet.

III.

Sätze über projective Erzeugung.

1. *Bestimmung der grössten Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}$ *derjenigen* $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$, *von denen jede wenigstens eine* B *trägt.*

Da dies absolute Maximum dann und nur dann erhalten wird, wenn seiner Berechnung die Hypothese zu Grunde gelegt wird, dass *nicht* unendlich viele B auf *jeder* $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ vorkommen, so hat die Berechnung keine Geltung, falls $\nu = 0$ ist. Denn da es auf $\mathfrak{C}^{2n}$ (Satz II. 2) entweder keine, oder ∞^1 B giebt, so könnte hier das Maximum $\mathfrak{M}$ nicht erreicht werden. Demzufolge sei

(A) $$\nu > 0.$$

Zunächst bemerken wir, dass wenn $\mathfrak{M}$ ermittelt ist, unter den $\infty^{\mathfrak{M}}$ Curven alle diejenigen einbegriffen sein werden, welche etwa ∞^1, ∞^2 ... Gruppen B besitzen könnten. Die maximale Mannigfaltigkeit letzterer $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ betrüge offenbar $\mathfrak{M}-1$, $\mathfrak{M}-2$ u. s. f., und man sieht, dass hier jede dieser Mannigfaltigkeiten die nächstniedrige in sich schliesst.

Nun wird man, genau wie in Abth. I verfahrend, erhalten

$$\mathfrak{M} = \alpha + \beta, \quad \text{wo} \quad \alpha = \mu - n^2 + \delta, \; \beta = 2\left(\tfrac{1}{2}n(n+3) - 1 - \delta\right).$$

Nämlich in der Ebene sind ∞^β Gruppen B, und durch jede bestehen ∞^α $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$. So folgt:

(A') $$\mathfrak{M} = \mu - (\delta - 3n + 2).$$

Mithin: „Wenn $\delta > 3n-2$, so existiren unzählige $C^{2n+\nu}$, welche *keine* B enthalten, *nicht* projective Curven sind."

Ist $\delta = 3n-2 = \delta_1$, so kommt $\mathfrak{M} = \mu_1$. Da es unter diesen ∞^{μ_1} $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ höchstens ∞^{μ_1-1} giebt, auf denen unendlich viele B liegen, so bleiben nach Ausschluss derselben immer noch unzählige $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ übrig, auf welchen die B in *endlicher* Anzahl auftreten müssen. Unter Umständen lässt sich diese Anzahl leicht finden (v. Beispiele in Nr. III, 2).

Endlich sei $\delta = 3n-2-x = \delta_1 - x$, so ergiebt sich $\mu \equiv \mu_1 + 3x$, $\mathfrak{M} = \mu + x = \mu_1 + 4x$; d. h. $\mathfrak{M}$ überstiege μ, was offenbar unmöglich

ist. Mithin muss eine Reduction des $\mathfrak{M}$ eintreten, welche dadurch zu Stande kommt, dass auf jeder der $\infty^{\mathfrak{M}}$ $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ noch ∞^{α} B vorhanden sind. In der That, nimmt man auf einer $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ von einer zu bestimmenden B noch x einfache Punkte E an, so beträgt die Mannigfaltigkeit der durch die E möglichen $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ nunmehr $\mathfrak{M}-2x$, da das obige β um $2x$ abnimmt, α unverändert bleibt.

Da $\mathfrak{M}-2x=\mu_1+2x=\mu-x$, so gewahrt man, dass diese neue Mannigfaltigkeit einerlei ist mit der *aller* durch die E gehenden $C^{2n+\nu}$. Wieder umfasst letztere jede niedrigere, woraus erhellt, dass unter diesen $\infty^{\mu-x}$ $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ unzählige sind, auf denen die B in *endlicher* Anzahl erscheinen.

Wir haben hiernach festgestellt:

> „*Alle $C^{2n+\nu}$ mit δ Doppelpunkten lassen die vorgeschriebene projective Erzeugung nur dann zu, wenn* $\delta=3n-2-x$, $x\geqq 0$."

Dabei können von den Basispunkten des Büschels (C^n) immer x, nicht aber mehr beliebig angenommen werden. Vom Erzeugniss $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ bleiben wählbar $\frac{1}{2}(m+\nu)(2n+\nu+3)-3\delta-x$ Punkte.

Wir wenden uns dem Falle zu, welcher zum grossen Schaden für die exacte Forschung nicht genug beachtet wurde:

$$\text{(B)}\qquad \nu=0,\ \mu=n(2n+3)-3\delta\ \left(\delta<\tfrac{1}{2}n(n+3)\right).$$

Jede $\mathfrak{C}^{2n}$ enthält wenigstens ∞^1 B. Nach Satz 2 bilden die $n^2-\delta$ Punkte, welche die D zu einer B ergänzen, eine $g^{(1)}_{n^2-\delta}$.

Will man daher das *Maximum* ($\mathfrak{M}^1$ im vorliegenden Falle) finden, so muss man die weitest gehende Hypothese zu Grunde legen, dass *nicht* alle $\mathfrak{C}^{2n}$ mehr als ∞^1 Gruppen haben. Wir bestimmen die maximale Anzahl der durch einen beliebigen Punkt E der Ebene möglichen $\mathfrak{C}^{2n}$: Auf jeder dieser $\mathfrak{C}^{2n}$ befindet sich eine (oder mehrere) Gruppe B, zu welcher E gehört. Es giebt aber ∞^{β} B, welchen E gemeinsam ist, wo $\beta=2\left(\frac{1}{2}n(n+3)-\delta-2\right)$, und durch jede B lassen sich ∞^{α}, $\alpha=\mu-(n^2-\delta)$, $\mathfrak{C}^{2n}$ legen. Also erhalten wir die Mannigfaltigkeit

$$\mu-(\delta-3n+4)$$

von Curven $\mathfrak{C}^{2n}$, welche sämmtlich E aufnehmen, und so ergiebt sich

$$\text{(B')}\qquad \mathfrak{M}^1=\mu-(\delta-3n+3).$$

Wären von einer B auf allen $\mathfrak{C}^{2n}$ 2 Punkte willkürlich, d. h., gäbe es auf den $\mathfrak{C}^{2n}$ ∞^2 Gruppen, so nehme man zu E noch einen zweiten Punkt E_1 und verfahre analog; dann kommt als maximale Mannigfaltigkeit solcher $\mathfrak{C}^{2n}$: $\mathfrak{M}^1-1$, und es ist dieselbe offenbar ein Theil der $\mathfrak{M}^1$.

Hieraus schliesst man sogleich, dass unzählige $\mathfrak{C}^{2n}$ existiren, welche *nicht mehr* als ∞^1 B besitzen.

Die Formel (B') lehrt: Wenn $\delta > 3n-3$, also $\mathfrak{M}^1 < \mu$, existiren unzählige C^{2n}, auf welchen *keine* B möglich ist.

Z. B.: $\delta = 3n-2$; $\mathfrak{M}^1 = \mu - 1$. *Es giebt wenigstens* ∞^1 C^{2n} *ohne* B. *Hiermit ist der eingangs kritisirten Beweisführung von Neuem das Urtheil gesprochen.*

In ganz analoger Weise, wie unter (A) verfahrend, finden wir: „Durch x beliebige Punkte E der Ebene gehen $\infty^{\mu-x}$ Curven $\mathfrak{C}^{2n}$, wovon jede ∞^1 Gruppen B enthält, denen die E gemeinsam sind, und unter diesen $\mathfrak{C}^{2n}$ sind immer unzählige, welche *nicht mehr*, als ∞^1 solcher B haben." Ferner:

> „*Alle* C^{2n} *mit* δ *gegebenen Doppelpunkten lassen nur dann unsere projective Erzeugung zu, wenn*
>
> $$\delta = 3n - 3 - x,\ x \geqq 0.$$"

Dabei kann man von der Basis B des einen Büschels $x+1$ Punkte E beliebig annehmen, und gleichzeitig *einen* Punkt der zugehörigen $\mathfrak{B}$. Sodann bleiben von dem Erzeugnisse noch $n(2n+3) - 3\delta - (x+2)$ Punkte willkürlich.

In diesen Aussprüchen ist ersichtlich der Ton auf das Wörtchen „*Alle*" zu legen.

2. *Zur Erläuterung dienende Beispiele.*

Zu (A). Wir betrachten erstens die C^7 mit $3.3-2=7$ Doppelpunkten: $\mu = 35-21 = 14$. Ein Punkt E der Ebene gehört zu einer einzigen B von 9 Punkten, und durch diese gehen genau $\infty^{14-2} = \infty^{12}$ Curven C^7. Somit existiren überhaupt nur ∞^{13} $\mathfrak{C}^7$, auf welchen von einer B noch *ein* Punkt willkürlich angenommen werden kann, und es bleiben unzählige $\mathfrak{C}^7$ übrig, von welchen jede nur eine *endliche* Anzahl von B hat. Diese Anzahl ist hier leicht zu finden. Nämlich unterwirft man eine der letztgenannten Curven $\mathfrak{C}_I^7$ der Transformation mittelst des Netzes der ∞^2 C^3, welche die 7 Doppelpunkte enthalten, so erhält man eine neue $\mathfrak{C}_{II}^7$, welche ebenfalls sieben Doppelpunkte haben muss, mithin kommen auf $\mathfrak{C}_I^7$ sieben B vor. Die Transformation wäre aber nicht anwendbar, wenn $\mathfrak{C}_I^7$ unendlich viele B hätte.

Zweitens: C^7 mit $7-x=5D$, $\mu = 20$. Wäre auf $\mathfrak{C}^7$ von einer B kein Punkt E der Willkür überlassen, so gäbe es noch $\infty^{\mathfrak{M}} = \infty^{22}\,\mathfrak{C}^7$; wäre nur ein Punkt frei, so fände man $\mathfrak{M}=21$. Da beides unmöglich ist, indem es nur ∞^{20} C^7 giebt, so müssen wenigstens 2 Punkte E_1, E_2 von einer B beliebig wählbar sein. Dann erhielte man ∞^{20} $\mathfrak{C}^7$, unter welchen auch diejenigen $\mathfrak{C}^7$ sich befinden, auf denen von einer B ein dritter E angenommen werden könnte, und zwar gäbe es solcher $\mathfrak{C}^7$

höchstens ∞^{19}. Nach Ausschluss derselben blieben unzählige $\mathfrak{C}^7$ übrig, auf denen *nur* 2 Punkte E willkürlich von einer B wären.

Transformirt man jetzt eine dieser letzteren $\mathfrak{C}_1^7$ durch das Netz der C^3, welche die D und E_1, E_2 enthalten, so findet man die Anzahl der auf $\mathfrak{C}_1^7$ befindlichen B durch Zählung der Doppelpunkte, welche die durch Transformation erlangte Curve haben muss.

Zu (B). Besonders wichtiges Beispiel: C^6 mit $3n - 2 = 7D$. Eine B besteht aus den D nebst 2 Punkten E, und ist Basis eines Büschels (C^3). Nach unserer Darstellung giebt es unter den ∞^6 Curven C^6 höchstens ∞^5, auf welchen ∞^1 B sind (die hyperelliptischen C^6). Auf den übrigen unzähligen C^6 darf nun keine B vorkommen.

Man würde irren, wenn man dies durch Transformation einer C^6 mittels des *vorliegenden* Netzes von C^3 *beweisen* wollte. Nämlich die Transformation ergäbe allerdings C^4 vom Geschlecht 3, also ohne Doppelpunkte; aber dieselbe ist gar nicht gestattet, bevor feststeht, dass auf C^6 keine B existirt. Denn liegt nur eine B auf C^6, so muss jeder Punkt dieser Curve einer B angehören (Satz II, 2), d. h. die Transformationscurve, welche durch einen Punkt von C^6 geht, enthält noch einen mitbestimmten Punkt, folglich ist die Transformation nicht möglich. Wendet man dagegen die Transformation bei einer C^6 an, auf welcher keine B liegt, so ergiebt sie nicht anderes, als die Voraussetzung.

Zweitens: C^6 mit $3n - 3 = 6$, oder $6 - x$ Doppelpunkten D.

C^6 mit $6D$ ist *nicht* hyperelliptisch, obwohl sie das Maximalgeschlecht $6 - 2$ einer solchen hat, statt eines 4-fachen Punktes jedoch 6 Doppelpunkte auftreten: Nimmt man zu den $6D$ einen beliebigen E der Curve, so hat man ein brauchbares Transformationsnetz von C^3 festgelegt, weil die C^3, welche einen 8^{ten} Punkt der C^6 enthält, nicht noch immer einen 9^{ten} enthalten kann, da sonst C^6 hyperelliptisch wäre. Die Ordnung der sich ergebenden Curve wird 5, das Geschlecht 4; C^5 erhält somit 2 Doppelpunkte; also

„Auf C^6 mit $6D$ gehört jeder Punkt E zu zwei Gruppen B."[6] Wir sehen, dass von einer B auf C^6 nur 1 Punkt wählbar ist. Deutlicher erhellt dies daraus, dass die 3 Punkte, welche die D zu einer B ergänzen (Satz 2) eine $g_3^{(1)}$ bilden, mithin von einer Gruppe weniger als $3 - 1$ beliebige Lage haben.

Wenn endlich $6 - x$ Doppelpunkte D vorliegen, einer C^6, Geschlecht $4 + x$, so tritt $g_{3+x}^{(1)}$ auf. Von einer Gruppe sind höchstens $3 + x - 2 = 1 + x$ Punkte E willkürlich, und es giebt auch unter den durch diese E gehenden C^6 solche, auf welchen nur eine endliche Anzahl von B auftreten, denen die E gemeinsam sind. Die D nebst den E ($x + 1$ in der Zahl) liefern die Grundpunkte eines brauchbaren Transformationsnetzes (C^3), weil C^6 wegen ihres Geschlechtes nicht

nicht hyperelliptisch ist. Durch die Transformation erhält man C^{5+x} vom Geschlechte $4+x$, also mit $\frac{1}{2}(x+1)(x+4)$ Doppelpunkten; deshalb bestehen auf C^6 ebenso viele der eben näher definirten B.

3. Von Interesse dürfte der Fall sein, wo δ sein Maximum erreicht bei supponirter *normaler* Lage der D bezüglich C^n, nämlich

$$\delta = \tfrac{1}{2}n(n+3) - 1.$$

Hier liegen die D auf einer völlig bestimmten B_0, so dass eine *Singularität* des Satzes II, 2. in folgender Weise zu Tage tritt: C_I^n sei eine irreducible Curve durch B_0; $\mathfrak{C}_I^{2n}$ eine durch B_0 gelegte Curve mit den Doppelpunkten D. Nach Satz II, 2. muss $\mathfrak{C}_I^{2n}$ von $\mathfrak{C}_I^n$ ausser B_0 noch in $n^2 - \delta$ Punkten $\mathfrak{E}$ geschnitten werden, und diese müssen wieder die D zu einer $\mathfrak{B}$ ergänzen. Da aber die *einzige* B_0 besteht, so könnte man leicht meinen, es zeige sich ein Widerspruch gegen Satz II, 2; bei genauer Prüfung erkennt man jedoch, dass die Sache im vollen Einklang mit diesem Satze steht: Durch B_0 gehen genau $\infty_\alpha \mathfrak{C}_I^{2n}$, $\alpha = n(2n+3) - 3\delta - (n^2 - \delta)$; und es folgt

$$\alpha = n(2n+3) - n^2 - n(n+3) + 2 = 2.$$

Diese ∞^2 $\mathfrak{C}^{2n}$ bestehen, wie man sieht, aus je zweien C^n des Büschels B_0, haben deshalb die n^2 Punkte der Basis B_0 zu Doppelpunkten*). Hieraus erhellt, dass wirklich ∞^1 Gruppen $\mathfrak{B}$ zu denken sind, die nur einzeln genommen immer mit B_0 zusammenfallen.

„Jede von den ∞^2 $\mathfrak{C}^{2n}$ verschiedene C^{2n} lässt die projective Erzeugung *nicht* zu."

Damit einem Missverständniss vorgebeugt werde, bemerken wir, dass bei *anormaler* Lage der D gegen C^n, das obige Maximum von δ weit überschritten werden kann. Jeder mit den Raumcurven R^{2n} vertraute Geometer weiss ja, dass es Curven C^{2n} giebt mit $n(n-1)$ Doppelpunkten, die der projectiven Erzeugung zugängig sind (vergl. Abh. der k. böhm. Gesellschaft Folge VII B. 4).

4. Wir wollen hier die Frage beantworten, ob die möglichen $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ in Ansehung der D a) hyperelliptisch, b) die allgemeinsten ihres Geschlechtes sein können?

a) Das Maximalgeschlecht einer hyperelliptischen C^m ist bekanntlich $< m-2$, wenn C^m nur Doppelpunkte besitzt. Das Geschlecht einer $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ beträgt wenigstens:

*) Letzteres erhellt direct durch Anwendung des Satzes II, 2, und bedingt das angegebene Zerfallen der $\mathfrak{C}^{2n}$, sowie ihre Mannigfaltigkeit 2. Uebrigens folgt sehr leicht: „Jede durch B_0 gehende $\mathfrak{C}^{2n}$, welche C_I^n blos in den D berührt, muss C_I^n in allen n^2 Punkten der B_0 berühren."

$$\tfrac{1}{2}(2n+\nu-1)(2n+\nu-2) - \left(\tfrac{1}{2}n(n+3) - 1\right) = p_0,$$

und es wird die Differenz

$$p_0 - (2n+\nu-2) = \tfrac{1}{2}\left(3n^2 - 13n + 8 + \nu(\nu+4n-5)\right)$$

mit ν wachsen, daher wenigstens $\frac{1}{2}(3n^2 - 13n + 8)$ betragen. Sie bleibt sonach > 0, wofern $n > 3$; auch für $n > 2$, wenn zugleich $\nu > 0$.

So findet sich:

„Bei einer hyperelliptischen $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ müsste $n = 3$, $\nu = 0$, zudem ihr Geschlecht < 4 sein; und wirklich sind, wie wir oben sahen, die $\mathfrak{C}^6$ mit 7, resp. 8 Doppelpunkten hyperelliptisch."

b) Zunächst werde hervorgehoben:

„Die auf $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ von den Geraden der Ebene ausgeschnittene $g^{(2)}_{2n+\nu}$ ist Vollschaar, falls nicht $n = 3$, $\nu = 0$ ist."

Nämlich die D verhalten sich normal gegen die durch sie gehenden $C^{2n+\nu-4}$, sobald $2n + \nu - 4 \geqq n$, d. h. $n \geqq 4 - n$, eine Bedingung, die für $\nu > 0$ auf $n > 2$, für $\nu = 0$ auf $n > 3$ hinauskommt.

Damit aber der Ausnahmefall stattfinde, muss die betreffende C^6 wenigstens $6D$ haben, die überdies auf einem Kegelschnitte liegen. Indem wir die hyperelliptischen $\mathfrak{C}^6$ aus sogleich ersichtlichem Grunde nicht berücksichtigen, liefert die Projection der Raumcurve R^6 vom Maximalgeschlecht die *einzige Ausnahme*.

Soll jetzt $\mathfrak{C}^{2n+\nu}_p$ die allgemeinste ihres Geschlechtes p sein, so darf sie (Brill-Nöther in den Math. Annalen Bd. VII) keine $g^{(2)}_R$ besitzen, für die

$$R < \tfrac{2p}{3} + 2;$$

mithin muss nothwendig sein

$$2n + \nu \geqq \tfrac{2p}{3} + 2,$$

oder, indem man p durch δ ausdrückt

$$\delta \geqq \tfrac{1}{2}(2n+\nu-2)(2n+\nu-4). \tag{1}$$

Nun bleibt aber $\frac{1}{2}n(n+3) - 1$ kleiner als

$$\tfrac{1}{2}(2n+\nu-2)(2n+\nu-4),$$

wenn $n > 3$, ν wenigstens 1 ist. Also wäre möglicherweise noch $\mathfrak{C}^7$ mit $8D$, vom Geschlecht 7 die allgemeinste. Jedoch ist dies deshalb zu verwerfen, weil $\mathfrak{C}^7$ eine $g^{(1)}_4$ $4 < \frac{1}{2}(7+3)$ besitzt, die auf der allgemeinen C^7 nicht bestehen kann (Riemann).

Handelt es sich speciell um $\mathfrak{C}_p^{2n}$, so darf man (III, Nr. 3) als grösstmöglichen Werth für $\delta: \frac{1}{2}n(n+3)-2$ setzen, um die zerfallenden ∞^2 Curven $\mathfrak{C}^{2n}$ auszuschliessen. Alsdann würde $\delta < \frac{1}{2}(2n-2)(2n-4)$, falls $n>4$; so dass noch $\mathfrak{C}_9^8$ mit $12D$ die allgemeinste vom Geschlecht 9 sein könnte. Doch ist dies wieder abzuweisen deshalb, weil auf $\mathfrak{C}_9^8$ eine $g_4^{(1)}$, $4 < \frac{1}{2}(9+3)$ vorkommt, die auf der allgemeinen $\mathfrak{C}_9^8$ nach Riemann unmöglich ist. Es erübrigt noch, die möglicherweise allgemeinsten $\mathfrak{C}_p^6$ aufzustellen: Eine solche muss wenigstens $\frac{1}{2}(6-2)(6-4)=4D$ besitzen und darf nicht hyperelliptisch sein, also nicht $7D$ haben; so dass $\mathfrak{C}^6$ mit 4, 5, 6 Doppelpunkten möglich wären. Man überzeugt sich auch leicht, dass diesen Curven die fragliche Allgemeinheit durch Anwendung des Riemann'schen Satzes nicht abgesprochen werden kann.

Damit der Nutzen dieser letzten Betrachtung deutlich werde, verweise ich auf eine im 25. Bande der Math. Annalen 1885 publicirte Arbeit von Herrn Bobek, wo gestützt auf die für allgemeine Curven ihres Geschlechtes von Brill-Nöther, Math. Ann. VII gegebenen Sätze die von uns hier erhaltene projective Erzeugung zu beweisen versucht wird*). Es leuchtet ein dass diesen Entwickelungen vermöge ihrer Grundlage nur in so weit Beweiskraft innewohnt, als sie sich auf die eben genannten $\mathfrak{C}^6$ beschränken.

IV.

Zum Fundamentalsatz.

Zum Schlusse gehen wir auf den Fundamentalsatz (Einleitung und I) näher ein.

1. *Die* $3n-2$ *Punte* f *seien für die* ∞^μ *hindurchgehenden* $C^{2n+\nu}$ *einfache Punkte.*

Sie werden durch n^2-3n+2 Punkte E zu irgend einer Basis B ergänzt, diese E bilden eine *ergänzende Gruppe* G_β.

Es existiren überhaupt ∞^β B, wo $\beta = n^2-3n+2$. Aus unserer Untersuchung geht hervor:

> „Wenn *nicht* auf *jeder* der durch irgend eine B (etwa B_0) möglichen ∞^α $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ $(\alpha = \mu-\beta)$ unendlich viele B vorkommen, so fällt auf jede der ∞^μ $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ wenigstens eine B; die *sämmtlichen* Curven $2n+\nu^{ter}$ Ordnung, auf welchen die f liegen, sind alsdann $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$".

*) Ich hatte vorher Herrn Bobek auf die sonstige fehlerhafte Argumentation bei Herleitung des Fundamentalsatzes aufmerksam gemacht (vgl. das in der Einleitung enthaltene Citat auf meinen Aufsatz „hyperelliptische C^{3n}").

Wir beweisen jetzt folgenden Satz:

> *„Soll auf jeder der durch B_0 möglichen ∞^α $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ von einer zweiten B noch ein Punkt (E_1) willkürlich sein; so müssen die ergänzenden Gruppen, in welchen E_1 vorkommt, sich anormal gegen die hier vorliegenden ∞^α $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ verhalten"*.

Durch E_1 gehen wenigstens $\infty^{\alpha-1}$ unserer $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$; ich zeige, dass bei *normalem* Verhalten der Ergänzungsgruppen höchstens $\infty^{\alpha-2}$ $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ durch E_1 möglich sind.

Nach unserer Voraussetzung enthält *jede* durch E_1 legbare $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ mindestens eine B, von der E_1 ein Punkt ist, und solcher B giebt es $\infty^{\beta-2}$. Bei normaler Lage der β ergänzenden Punkte, unter welchen E_1 vorkommt, würden durch B_0 und eine bestimmte B blos $\infty^{\alpha-\beta}$ $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ möglich sein. Demnach folgt als maximale Mannigfaltigkeit der durch B_0 und E_1 legbaren $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$: $\beta - 2 + \alpha - \beta = \alpha - 2$. Also ist der Schluss berechtigt:

> „Bei *normaler* Lage der Ergänzungsgruppen können nicht auf *jeder* der durch eine beliebige B_0 möglichen $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ unendlich viele B auftreten".

Diese normale Lage ist somit eine *Determination* für den Fundamentalsatz, sie ist eine hinreichende Bedingung, aber auch nothwendig, wie man so erkennt:

Die Mannigfaltigkeit der durch B_0 und irgend eine Ergänzung G_β gehenden $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ sei jetzt $x > \alpha - \beta$, d. h. die β Punkte seien anormal bezüglich der $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$, auf welchen sich B_0 befindet. Es wäre nun denkbar, dass auf jeder dieser Curven noch unendlich viele B sich befänden, und dies muss auch wirklich stattfinden: Nämlich bei Voraussetzung des Gegentheils würde, da durch B_0 und irgend eine Ergänzung stets eine $\mathfrak{C}^{2n}$ existirt, durch Zählung sämmtlicher auf den ∞^α $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ vorkommenden B keine α übersteigende Mannigfaltigkeit erhalten. Weil aber Ueberzählungen stattfinden, so lässt sich mit Rücksicht auf diese ein Maximum β_1 für die überhaupt möglichen B ableiten. Irgend eine B wird offenbar ∞^x mal gezählt, weil sie auf ∞^x der ∞^α $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ liegt; so dass man hat:

$$\beta_1 + x \leqq \alpha;$$

also wegen $x > \alpha - \beta$:

$$\beta_1 + \alpha - \beta < \alpha,$$

oder

$$\beta_1 < \beta.$$

In der That existiren jedoch ∞^β Gruppen B; mithin sind die beiden Annahmen a) Anormale Lage der β Punkte gegen die $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$, und b) Nichtexistenz von unendlich vielen B auf jeder der ∞^α Curven unvereinbar.

2. *Die* ∞^μ $C^{2n+\nu}$ *mit* $\delta = 3n-2$ *Doppelpunkten* D.

(A) $\nu > 0$. In derselben Weise wie vorhin leitet man, falls > 0, den Satz ab:

„Auf jeder dieser ∞^μ Curven liegt dann, und nur dann, wenigstens eine B, zu welcher die D gehören, wenn die Ergänzungsgruppen *normale* Lage gegen diejenigen ∞^α $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ haben, welche irgend eine B_0 enthalten".

(B) $\nu = 0$. Umständlicher ist der kritische Fall $\nu = 0$ zu behandeln. Wir fanden III, 1, dass es bei $\delta = 3n-2$ unzählige C^{2n} giebt, ohne eine B; dass also der Fundamentalsatz keine Geltung hat; ferner, dass für $\delta = 3n-3$ gilt:

„Wenn *nicht* auf jeder der durch eine B_0 gehenden $\mathfrak{C}^{2n}$ *mehr* als ∞^1 existiren, so liegen dann, und nur dann, auf jeder der ∞^{μ_1} möglichen $\mathfrak{C}^{2n}$ genau ∞^1 B.

$$\big(\mu_1 = n(2n+3) - 3(3n-3)\big)".$$

Statt dieses Ausspruchs hat man den folgenden:

„*Jede der* ∞^{μ_1} C^{2n} *enthält dann, und nur dann, genau* ∞^1 B, *wenn die Ergänzungsgruppen normale Lage bezüglich der* ∞^α *durch eine beliebige* B_0 *legbaren* $\mathfrak{C}^{2n}$ *haben*".

Zunächst muss der Satz bewiesen werden: „Soll auf jeder der ∞^α $\mathfrak{C}^{2n}$ mehr als ein Punkt E, etwa E_1, E_2, willkürlich von einer Geraden B sein, so müssen die Ergänzungsgruppen, in welchen E_1, E_2 vorkommen, *anormal* zu den ∞^α $\mathfrak{C}^{2n}$ liegen".

Durch E_1, E_2 gehen wenigstens $\infty^{\alpha-2}$ unserer $\mathfrak{C}^{2n}$; ich zeige, dass bei *normalem* Verhalten der bezeichneten Ergänzungsgruppen höchstens $\infty^{\alpha-3}$ $\mathfrak{C}^{2n}$ durch E_1 und E_2 möglich sind.

Hier hat man für die ∞^β überhaupt existirenden B:

$$\beta = 2\left(\tfrac{1}{2}n(n+3) - 1 - 3n + 3\right) = n^2 - \delta + 1,$$

dass eine Ergänzung aus $n^2 - \delta = \beta - 1$ Punkten besteht. Zufolge unserer Voraussetzung enthält jede durch E_1, E_2 legbare der ∞^α $\mathfrak{C}^{2n}$ mindestens eine B, zu welcher E_1, E_2 gehören, und es giebt solcher B: $\infty^{\beta-4}$. Jede der ∞^α $\mathfrak{C}^{2n}$ muss nun irgend eine dieser B aufnehmen; daher würden bei normaler Lage der $\beta-1$ Ergänzungspunkte, unter welchen auch E_1, E_2 sind, höchstens $\infty^{\beta-4+\alpha-(\beta-1)} = \infty^{\alpha-3}$ $\mathfrak{C}^{2n}$ durch B_0, E_1, E_2 möglich sein. Können hiernach nicht auf jeder der ∞^α $\mathfrak{C}^{2n}$ mehr als ∞^1 B vorkommen, also *müssen* auf jeder der ∞^{μ_1} $\mathfrak{C}^{2n}$ genau ∞^1 B sein.

Anders verhält es sich, wenn man *anormale* Lage der Ergänzungsgruppen von $\beta - 1$ Punkten annimmt; alsdann *müssen* auf jeder der ∞^α $\mathfrak{C}^{2n}$ mehr als $\infty^1 B$ vorkommen. Denn sind nur $\infty^1 B$ vorhanden, so zählt man im Ganzen keine $\alpha+1$ übersteigende Mannigfaltigkeit

der B überhaupt. Bei dieser Zählung wird aber jede B_1 ∞^x-mal gerechnet, wo x die Mannigfaltigkeit der $\mathfrak{C}^{2n}$ bedeutet, auf welchen B_0 und B_1 sich befinden. Wegen unserer Annahme ist $x > \alpha - (\beta - 1)$. Bezeichnet daher β_1 die *maximale* Mannigfaltigkeit der B, so hat man $\beta_1 + x \gtrless \alpha + 1$; also $\beta_1 + \alpha - (\beta - 1) < \alpha + 1$, oder $\beta_1 < \beta$, was nicht möglich ist.

Die ausdrückliche Voraussetzung, dass die Ergänzungsgruppen normal gegen die durch eine B gehenden $\mathfrak{C}^{2n}$ liegen, ist sonach eine *gebotene* Determination für den Satz, dass auf jeder der ∞^{n_1} $\mathfrak{C}^{2n}$ wenigstens eine (somit auch ∞^1) B vorkommen. Die normale Lage als selbstverständlich ansehen, wie es bisher geschehen, hiesse den Fortschritt ignoriren, den die Geometrie, hauptsächlich durch die Arbeiten M. Nöther's, gemacht hat.

Man hat verschiedene Mittel, um die normale Lage der Ergänzungsgruppen zu verbürgen. Beispielsweise liege der Fall vor:

B_0 sei eine beliebige Gruppe, B eine zweite, G_β die ihr entsprechende Ergänzung der f. Wenn G_β *anormale* Lage gegen die durch B_0 gehende $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ hat, so muss offenbar G_β auch anormal bezüglich aller $C^{n+\nu}$ liegen, die sich durch G_β legen lassen, folglich auch anormal gegen *alle* C^n. Da nun G_β im vollständigen Schnitt B zweier C^n enthalten ist, so erheischt ihre anormale Lage bezüglich C^n, dass die f auf einer C^{n-3} liegen. Wegen der beliebigen Annahme der f können wir dieselben normal bezüglich C^{n-3} denken, so dass durch die f keine C^{n-3} existirt, wenn $3n - 2 > \frac{1}{2}(n-3)n$, d. i. wenn $n < 9$.

Bei dieser Beschränkung des n ist mithin die projective Erzeugung *aller* durch die f möglichen $\mathfrak{C}^{2n+\nu}$ gewiss. Man zeigt leicht, dass die Gewissheit ebenfalls besteht für *beliebiges* n, wenn zugleich $\nu > n - 7$. Ob man weiter gehen kann, bleibe einstweilen unentschieden.

Prag, Mai 1896.

Zur Theorie der adjungirten Substitutionen*).

Von

Gustav Rados in Budapest.

Die Theorie der linearen Substitution

$$(S_1) \qquad y_\alpha = c_{\alpha 1} x_1 + c_{\alpha 2} x_2 + \cdots + c_{\alpha n} x_n \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

ist im Wesentlichen eine Theorie der Gesammtheit der Werthsysteme

$$c_{\alpha 1}, c_{\alpha 2}, \ldots, c_{\alpha n} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

das heisst also die Theorie der Matrix

$$\| c_{\alpha\beta} \| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n);$$

dieselbe gestaltet sich nur concreter, indem man dasjenige lineare Formensystem betrachtet, dessen Coëfficienten die Elemente der Matrix und die Unbestimmten die x_α sind. Allein die Elemente der Matrix $(c_{\alpha\beta})$ an sich erschöpfen noch nicht ihren Gesammtinhalt, vielmehr wird dieser erst durch den Inbegriff derjenigen Subdeterminanten gebildet, die aus der gegebenen Matrix hervorgehen.

Es mögen

$$C_{i1}^{(m)}, C_{i2}^{(m)}, \ldots, C_{i\mu}^{(m)},$$
$$\left(i = 1, 2, \ldots, \mu; \quad \mu = \binom{n}{m}\right),$$

diejenigen Subdeterminanten m-ten Grades bezeichnen, die man aus der Matrix bilden kann. Dabei ist

$$C_{ik}^{(m)} = \begin{vmatrix} c_{i_1 k_1} & c_{i_1 k_2} & \cdots & c_{i_1 k_m} \\ c_{i_2 k_1} & c_{i_2 k_2} & \cdots & c_{i_2 k_m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{i_m k_1} & c_{i_m k_2} & \cdots & c_{i_m k_m} \end{vmatrix}$$

*) Diese Note ist 1891 im Anzeiger der ungarischen Akademie („Mathematikai és Természettudományi Értesítö") in ungarischer Sprache erschienen.

und

$$i = (i_1, i_2, \ldots, i_m)$$
$$k = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$$

für die Combinationen m-ter Classe aus den Elementen $1, 2, 3, \ldots, n$ zur Abkürzung gesetzt.

Wir haben also aus der gegebenen Matrix die adjungirten Matrices

$$\| C_{ik}^{(m)} \|$$
$$(i, k, = 1, 2, 3, \ldots, \mu; \quad m = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

abgeleitet. Der Inbegriff derselben macht nun den ganzen Inhalt der gegebenen Matrix aus und die Erforschung ihrer Eigenschaften erfordert die Betrachtung der linearen Substitutionen

$$(S_m) \qquad Y_i = C_{i1}^{(m)} X_1 + C_{i2}^{(m)} X_2 + \cdots + C_{i\mu}^{(m)} X_\mu$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots, m; \quad m = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Auf diese Weise sind aus der Substitution S_1 n neue Substitutionen entstanden. Es sollen dieselben die *adjungirten Substitutionen* von S_1 genannt werden. Theorie und Anwendungen verweisen gleicherweise auf die Untersuchung adjungirter Substitutionen; die geometrischen Anwendungen erheischen dieselbe geradezu, aber auch gelegentlich rein theoretischer Untersuchungen führt eine zusammenfassende Betrachtung adjungirter Substitutionen oft zu fruchtbaren Standpunkten. Den Gegenstand dieser Arbeit bildet der Beweis eines Hauptsatzes aus der Theorie der adjungirten Substitutionen sowie dessen Anwendungen nach mehreren Richtungen hin. Dieser Satz ist der folgende:

Es seien

$$\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_n \text{*)}$$

die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\Phi_1(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} c_{11} - \varrho & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - \varrho & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

welche der linearen Substitution

$$(S_1) \qquad y_\alpha = c_{\alpha 1} x_1 + c_{\alpha 2} x_2 + \cdots + c_{\alpha n} x_n$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

*) Wir setzen voraus, dass die Coëfficienten der Substitution (S_1) vollständig unbestimmte Grössen sind. Unter dieser Voraussetzung sind die Werthe

$$\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_n$$

verschieden von einander.

entspricht; alsdann erhält man die Wurzeln der charakteristischen Gleichung für die m-te adjungirte Substitution

$$\Phi_m(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} C_{11}^{(m)} - \varrho & C_{12}^{(m)} & \cdots & C_{1\mu}^{(m)} \\ C_{21}^{(m)} & C_{22}^{(m)} - \varrho & \cdots & C_{2\mu}^{(m)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ C_{\mu 1}^{(m)} & C_{\mu 2}^{(m)} & \cdots & C_{\mu\mu}^{(m)} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

aus dem Producte

$$\varrho_{i_1} \varrho_{i_2} \cdots \varrho_{i_m},$$

indem man für $i_1, i_2, \ldots, i_m$ der Reihe nach sämmtliche Combinationen m-ter Classe aus den Elementen $1, 2, 3, \ldots, n$ setzt.

Die Gleichung $\Phi_m(\varrho) = 0$ ist daher eine Resolvente der Gleichung $\Phi_1(\varrho) = 0$, und zwar diejenige, mittels welcher die Factoren k-ten Grades von $\Phi_1(\varrho)$ zu bestimmen sind*).

Bei dieser Gelegenheit will ich — in der Hoffnung, auf andere Anwendungen desselben noch zurückkehren zu dürfen — ausser dem Beweise des Satzes nur noch zwei Anwendungen von demselben mittheilen. Die eine Anwendung bezieht sich auf die Factorenzerlegung ganzer Functionen und wird für die Darstellung der dort vorkommenden Resolventen eine neue Methode liefern, die die bisherigen an Einfachheit übertrifft. Es wird ferner der obige Satz zu einem neuen Beweise des aus der Theorie der Determinanten bekannten Franke'schen Satzes**) benützt werden, indem gezeigt wird, dass der Beweis desselben fast ohne Rechnung geführt werden kann.

I. Die charakteristische Gleichung adjungirter Substitutionen.

1. Vor allen Dingen ist zu bemerken, dass wenn

$$\varrho \xi_\alpha = c_{\alpha 1} \xi_1 + c_{\alpha 2} \xi_2 + \cdots + c_{\alpha n} \xi_n$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, wobei $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ ein Werthsystem bedeutet, in welchem nicht jedes Element gleich Null ist, so ist ϱ Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$\Phi_1(\varrho) = 0$$

und man kann das Werthsystem

*) Vergl. die Abhandlung des H. Julius König „*Die Factorenzerlegung ganzer Functionen und damit zusammenhängende Eliminationsprobleme*" Mathematische Annalen Bd. 15, pag. 161.

**) Franke: „*Ueber Determinanten aus Unterdeterminanten*" Crelle's Journal Bd. 61. pag. 350.

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

als Doppelelement der Substitution S_1 bezeichnen.

Umgekehrt entspricht auch jeder Wurzel der Gleichung $\Phi_1(\varrho) = 0$ je ein Doppelelement, so dass deren Anzahl, wenn die Coëfficienten in S_1 als unbestimmte Grössen angenommen werden, genau gleich n ist. Es seien die den Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ entsprechenden Doppelelemente respective

$$\xi_{\beta 1}, \xi_{\beta 2}, \ldots, \xi_{\beta n}$$
$$(\beta = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

so dass

$$\varrho_\beta \xi_{\beta\alpha} = c_{\alpha 1} \xi_{\beta 1} + c_{\alpha 2} \xi_{\beta 2} + \cdots + c_{\alpha n} \xi_{\beta n} \tag{1}$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n),$$

dann wird die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \cdots & \xi_{nn} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden sein, wiederum wegen der Unbestimmtheit der Coëfficienten $c_{\alpha\beta}$. Um dies zu beweisen genügt es zu zeigen, dass Δ nicht identisch Null ist, das heisst, dass es nicht bei jedem Werthsystem der Coëfficienten $c_{\alpha\beta}$ verschwindet. Dies können wir aus Folgendem erschliessen. Die lineare Substitution (S_1) wird durch die Angabe von $(n+1)$ von Paaren entsprechender Werthsysteme vollkommen bestimmt. Nimmt man dieselben so an, dass in den n ersten Paaren die Werthe gleich seien und die aus ihnen gebildete Determinante (ξ_β) von Null verschieden sei (was man auf unendlich viele Arten bewerkstelligen kann), das $(n+1)$-te Paar (ξ_{n+1}, η_{n+1}) aber ganz beliebig bleibe, so wird alsdann die aus den Doppelelementen ξ_α der so bestimmten Substitution (S_1) gebildete Determinante Δ von Null verschieden sein.

2. Bezeichnen wir nunmehr mit

$$\Xi_{i1}^{(m)}, \Xi_{i2}^{(m)}, \ldots, \Xi_{ik}^{(m)}, \ldots, \Xi_{i\mu}^{(m)}$$
$$\left(i = 1, 2, \ldots, \mu; \quad \mu = \binom{n}{m}\right)$$

die Subdeterminanten m-ten Grades der Matrix

$$\begin{Vmatrix} \xi_{i_1 1} & \xi_{i_1 2} & \cdots & \xi_{i_1 n} \\ \xi_{i_2 1} & \xi_{i_2 2} & \cdots & \xi_{i_2 n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \xi_{i_m 1} & \xi_{i_m 2} & \cdots & \xi_{i_m n} \end{Vmatrix},$$

wobei

$$\Xi_{ik}^{(m)} = \begin{vmatrix} \xi_{i_1 k_1} & \xi_{i_1 k_2} & \cdots & \xi_{i_1 k_m} \\ \xi_{i_2 k_1} & \xi_{i_2 k_2} & \cdots & \xi_{i_2 k_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{i_m k_1} & \xi_{i_m k_2} & \cdots & \xi_{i_m k_m} \end{vmatrix},$$

ist nach dem Vorhergehenden klar, dass für jeden Werth von i e Reihe der

$$\Xi_{ik}^{(m)}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, \mu)$$

ich von Null verschiedene Elemente enthält; denn im entgegen-setzten Fall wäre Δ gleich Null, was durch die Unbestimmtheit der öffizienten als ausgeschlossen erscheint.

Nach dieser Bemerkung schreiten wir zur Bildung der Summe

$$C_{k1}^{(m)} \Xi_{i1} + C_{k2}^{(m)} \Xi_{i2} + \cdots + C_{k\mu}^{(m)} \Xi_{i\mu}.$$

Wie unmittelbar einleuchtend, ist dieselbe nichts Anderes, als die roduct-Summe entsprechender Determinanten der Matrices

$$\left\| \begin{matrix} c_{k_1 1} & c_{k_1 2} & \cdots & c_{k_1 n} \\ c_{k_2 1} & c_{k_2 2} & \cdots & c_{k_2 n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k_m 1} & c_{k_m 2} & \cdots & c_{k_m n} \end{matrix} \right\|$$

nd

$$\left\| \begin{matrix} \xi_{i_1 1} & \xi_{i_1 2} & \cdots & \xi_{i_1 n} \\ \xi_{i_2 1} & \xi_{i_2 2} & \cdots & \xi_{i_2 n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{i_m 1} & \xi_{i_m 2} & \cdots & \xi_{i_m n} \end{matrix} \right\|$$

nd kann als solche nach dem Binet-Cauchy'schen Satze auf die Form ner Determinante m-ten Grades gebracht werden, deren Elemente rch Composition der Reihen der Matrices erzeugt werden.

Es ist daher

$$\sum_{l=1}^{\mu} C_{kl}^{(m)} \Xi_{il} = \begin{vmatrix} \Sigma c_{k_1 \alpha}\, \xi_{i_1 \alpha}, & \Sigma c_{k_1 \alpha}\, \xi_{i_2 \alpha}, & \cdots, & \Sigma c_{k_1 \alpha}\, \xi_{i_m \alpha} \\ \Sigma c_{k_2 \alpha}\, \xi_{i_1 \alpha}, & \Sigma c_{k_2 \alpha}\, \xi_{i_2 \alpha}, & \cdots, & \Sigma c_{k_2 \alpha}\, \xi_{i_m \alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma c_{k_m \alpha}\, \xi_{i_1 \alpha}, & \Sigma c_{k_m \alpha}\, \xi_{i_2 \alpha}, & \cdots, & \Sigma c_{k_m \alpha}\, \xi_{i_m \alpha} \end{vmatrix},$$

obei die in den Elementen der Determinante angezeigten Summa-onen auf die Werthe $1, 2, \ldots, n$ von α zu erstrecken sind.

Berücksichtigt man nun die Relation (1), so kann man

$$\sum_{l=1}^{\mu} C_{kl}^{(n)} \Xi_{il}^{(m)} = \begin{vmatrix} \varrho_{i_1} \xi_{i_1 k_1} & \varrho_{i_2} \xi_{i_2 k_1} & \cdots & \varrho_{i_m} \xi_{i_m k_1} \\ \varrho_{i_1} \xi_{i_1 k_2} & \varrho_{i_2} \xi_{i_2 k_2} & \cdots & \varrho_{i_m} \xi_{i_m k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varrho_{i_1} \xi_{i_1 k_m} & \varrho_{i_2} \xi_{i_2 k_2} & \cdots & \varrho_{i_m} \xi_{i_m k_m} \end{vmatrix}$$
$$= \varrho_{i_1} \varrho_{i_2} \cdots \varrho_{i_m} \Xi_{ik}^{(m)}$$

setzen, so dass

$$\varrho_{i_1}\varrho_{i_2}\cdots\varrho_{i_m}\Xi_{ik}^{(m)} = C_{k1}^{(m)}\Xi_{i1}^{(m)} + C_{k2}^{(m)}\Xi_{i2}^{(m)} + \cdots + C_{k\mu}^{(m)}\Xi_{i\mu}^{(m)}.$$

Die Werthsysteme

$$\Xi_{i1}\,\Xi_{i2}\cdots\Xi_{i\mu}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \mu)$$

in deren jedem Einzelnen auch von Null verschiedene Elemente enthalten sind, bestimmen daher die Doppelelemente der Substitution (S_m); folglich sind die μ Producte

$$\varrho_{i_1}\varrho_{i_2}\cdots\varrho_{i_m}$$

die Wurzeln der Gleichung

$$\Phi_m(\varrho) = 0$$

und zwar ihre sämmtlichen Wurzeln, weil, wie leicht nachzuweisen ist, aus der Unbestimmtheit der Coëfficienten $c_{\alpha\beta}$ die Verschiedenheit der Producte $\varrho_{i_1}\varrho_{i_2}\varrho_{i_m}$ resultirt. Damit ist der in der Einleitung formulirte Satz vollständig bewiesen.

II. Die Factorenzerlegung ganzer Functionen.

Mit Hilfe des in der I. Nummer bewiesenen Satzes kann nun eine Methode entwickelt werden, die zu einer neuen Darstellung derjenigen Resolventen hinleitet, welche die Factorenzerlegung einer ganzen rationalen Function bewirken.

Es gelingt nämlich der Nachweis, dass man zu einer beliebig gegebenen Gleichung

$$g(\varrho) \equiv \varrho^n + a_1\varrho^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\varrho + a_n = 0$$

(wobei die mehrfachen Wurzeln bereits entfernt sind) immer auf rationalem Wege eine lineare Substitution herleiten kann, deren charakteristische Gleichung mit der gegebenen Gleichung identisch ist. Bildet man zu dieser Substitution die adjungirten Substitutionen, so erhält man mit den charakteristischen Gleichungen derselben zugleich alle Resolventen, deren Wurzeln dem ursprünglichen Rationalitätsbereiche adjungirt, die gegebene Gleichung in Factoren zerspalten.

Damit ist für die Bildung dieser Resolventen ein einfacherer Weg erschlossen, als der, den die bisherigen Methoden ergeben hatten, da hier bei Aufstellung derselben die Benützung von Irrationalitäten strenge vermieden werden konnte. Andererseits kann auf Grund unserer obigen Entwickelungen jede dieser Resolventen in expliciter Form dargestellt werden.

Unsere Methode stützt sich im Wesentlichen: einerseits auf den Satz über die charakteristische Gleichung adjungirter Substitutionen, andererseits auf die Bemerkung, dass jede Gleichung als die charakte-

ristische Gleichung einer linearen Substitution angesehen werden darf, die auf rationalem Wege bestimmt werden kann.

Diese letztere Bemerkung können wir durch Folgendes begründen. Es sei

$$g_k(\varrho) \equiv \varrho^{n-k} + a_1 \varrho^{n-k-2} + \cdots + a_{n-k};$$

dann wird

$$g_{k-1}(\varrho) = \varrho g_k(\varrho) + a_{n-k+1}.$$

Die gegebene Function $g(\varrho)$ ist daher folgendermassen darstellbar:

$$g(\varrho) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \varrho g_1(\varrho) + a_n & \varrho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_1(\varrho) & -1 \\ a_n & \varrho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \varrho g_2(\varrho) + a_{n-1} & \varrho & -1 \\ a_n & 0 & \varrho \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} g_2(\varrho) & -1 & 0 \\ a_{n-1} & \varrho & -1 \\ a_n & 0 & \varrho \end{vmatrix} = \cdots$$

$$= \begin{vmatrix} g_{n-1}(\varrho) & -a & 0 \ldots 0 \\ a_2 & \varrho & -1 \ldots 0 \\ a_3 & 0 & \varrho \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 0 & 0 \ldots \varrho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varrho + a_1 & -1 & 0 \ldots 0 \\ a_2 & \varrho & -1 \ldots 0 \\ a_3 & 0 & \varrho \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 0 & 0 \ldots \varrho \end{vmatrix};$$

daraus ist unmittelbar ersichtlich, dass die Gleichung

$$g(\varrho) = 0$$

die charakteristische Gleichung der Substitution

$$\begin{aligned} y_1 &= -a_1 x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + \cdots + 0 \cdot x_n \\ y_2 &= -a_2 x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + \cdots + 0 \cdot x_n \\ y_3 &= -a_3 x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + \cdots + 0 \cdot x_n \\ &\cdots \\ y_n &= -a_n x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + \cdots + 0 \cdot x_n \end{aligned} \tag{2}$$

ist.

Da die charakteristische Function simultane Invariante der in der Substitution enthaltenen linearen Formen ist, so kann man aus (2) beliebig viele lineare Substitutionen ableiten, deren charakteristische Gleichung gleichfalls

$$g(\varrho) = 0$$

ist.

III. Der Franke'sche Satz.

Dieser Satz bezieht sich auf die Subdeterminanten m-ten Grades, die aus einer Determinante gebildet werden können und kann mit Hilfe der obigen Bezeichnungen durch folgende Gleichung ausgedrückt werden:

$$\left|C_{ik}^{(m)}\right| = \left|c_{\alpha\beta}\right|^{\binom{n-1}{m-1}}$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, \mu; \quad \alpha, \beta = 1, \beta = 1, 2, \ldots, n).$$

Diese Formel folgt unmittelbar aus dem in I. bewiesenen Satze. Denn man hat:

$$\left|C_{ik}^{(m)}\right| = \Phi_m(0) = \prod_{(\iota)} \varrho_{\iota_1}\varrho_{\iota_2}\ldots\varrho_{\iota_m},$$

wobei das Product auf alle Combinationen m-ter Classe zu erstrecken ist, die man aus den Elementen $1, 2, 3, \ldots, n$ bilden kann.

Da $\Pi\varrho_{\iota_1}, \varrho_{\iota_2}\ldots\varrho_{\iota_m}$ jedes ϱ so oft enthält als Combinationen zur $(m-1)$-ten Classe aus $(n-1)$ Elementen gebildet werden können, so hat man

$$\left|C_{ik}^{(m)}\right| = (\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_n)^{\binom{n-1}{m-1}};$$

und da ferner

$$\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_n = \Phi_1(0) = |c_{\alpha\beta}|,$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

so wird, wie zu beweisen war,

$$\left|C_{ik}^{(m)}\right| = \left|c_{\alpha\beta}\right|^{\binom{n-1}{m-1}}.$$

Ueber transfinite Zahlen.

Von

Wilhelm Killing in Münster i./W.

Bekanntlich haben in neuerer Zeit die Herren Cantor und Veronese den Versuch gemacht, das Gebiet der gewöhnlichen Zahlen ins Transfinite zu erweitern, und sind dabei zu ganz verschiedenen Ergebnissen gelangt, so dass es unmöglich ist, die von dem einen erhaltenen Zahlen durch die des andern darzustellen. Gewiss muss dies Resultat Befremden erregen, da es sich in beiden Fällen im Wesen doch um die Anzahl handelt. Aber diese Verschiedenheit zwingt noch nicht dazu, die Berechtigung der einen Theorie von vornherein zu leugnen; denn es kommt öfters vor, dass dasselbe Gebiet auf mannigfaltige Weise erweitert wird. Man darf aber keineswegs annehmen, dass die Verschiedenheit des Ergebnisses in der Ungleichheit der Methode begründet sei. Herr Cantor geht nämlich nur von der Gesammtheit der natürlichen (positiven ganzen) Zahlen aus, während Herr Veronese neben den positiven auch die negativen ganzen Zahlen von vornherein der Untersuchung zu Grunde legt. Da beide Wege natürlich sind, muss man jede Erweiterung, die überhaupt berechtigt ist, auf beiden Wegen gewinnen können. Sollte es also unmöglich sein, von den natürlichen Zahlen aus zu der Veronese'schen Erweiterung zu gelangen, so würde das schon einen schwerwiegenden Grund gegen diese Theorie abgeben. Indessen will ich darauf nicht eingehen, da der Zweck der folgenden Zeilen ein anderer ist.

Nachdem ich in einer kleinen Arbeit, die dem Vorlesungs-Verzeichniss unserer Akademie für das Wintersemester 1895/96 vorgedruckt ist, einzelnen meiner Bedenken gegen die Veronese'sche Theorie Ausdruck gegeben hatte, hat Herr Veronese darauf im 47. Bande dieser Annalen geantwortet (S. 423—432). Um namentlich denjenigen Lesern, denen meine Programm-Arbeit nicht zu Gebote steht, eine Prüfung meiner Bedenken zu ermöglichen, möchte ich diejenigen Punkte, die mir für die Beurtheilung der Theorie am wesentlichsten zu sein scheinen, hier in einiger Ausführlichkeit mittheilen. Dabei behalte

ich mir vor, die übrigen Punkte an einem andern Orte ausführlicher darzulegen, als es im Programme bei der Beschränktheit des mir zur Verfügung stehenden Raumes möglich war.

1. Mit Herrn Veronese gehen wir von der Gesammtheit der positiven und negativen ganzen Zahlen aus. Demnach denken wir in einem eindimensionalen Gebilde (etwa einer Geraden) zwei Punkte A_0 und A_1 gegeben, führen die Punkte $A_2, A_3, \ldots A_\mu, \ldots$ der Reihe nach durch die Forderung ein:

$$A_0A_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_{\mu-1}A_\mu = \cdots,$$

und gelangen auf entsprechendem Wege zu den Punkten $A_{-\mu}$, indem wir die Forderungen stellen:

$$A_1A_0 = A_0A_{-1} = A_{-1}A_{-2} = \cdots = A_{-\mu+1}A_{-\mu} = \cdots;$$

wobei die Gleichheit in der Uebereinstimmung nach Grösse und Richtung bestehen soll. Die so gewonnenen Punkte A_μ bilden nach Herrn Veronese eine geordnete Gruppe; ein Punkt P, der entweder mit einem Punkte A_μ zusammenfällt oder zwischen zwei Punkten A_μ und $A_{\mu+1}$ liegt, gehört dem Gebiet der Scala in Bezug auf das Segment A_0A_1 an. Beide Ausdrücke wollen auch wir der Kürze wegen benutzen.

Jetzt wollen wir annehmen, die Gerade enthalte einen Punkt B_0, der dem Gebiet der ersten Scala nicht angehört. Indem wir eine Strecke $B_0B_1 (= A_0A_1)$ zu Grunde legen, gelangen wir auf die angegebene Weise für jede ganze Zahl ν zu einem Punkte B_ν, der ebenfalls ausserhalb des Gebiets der ersten Scala liegt. Ist diese Annahme berechtigt, so haben wir betreffs der Anordnung der einzelnen Gruppen in der Geraden zwei Fälle zu unterscheiden: entweder geht jeder Gruppe eine andere unmittelbar voraus und eine andere folgt unmittelbar auf sie; oder zwischen zwei beliebigen Gruppen liegen jedesmal unendlich viele gleichartige Gruppen. Hiernach kann nur eine von vier Möglichkeiten bestehen: a) beide Fälle sind zu verwerfen; b) der erste Fall ist berechtigt, der zweite nicht; c) nur die zweite Annahme ist zulässig; d) beide Fälle sind möglich. Somit sind auch die transfiniten Zahlen entweder unberechtigt, oder sie können nur auf einem der bezeichneten Wege gewonnen werden, oder beide Wege führen zu transfiniten Zahlen. Wofern die Untersuchung zu dem letzten Ergebniss führt, müssen die beiden Systeme wesentlich verschieden sein, da ihre Grundlagen sich gegenseitig ausschliessen.

2. Wir wollen jetzt die beiden Annahmen einzeln prüfen und wenden uns zunächst der ersten zu. Ausserhalb des Gebiets, welches unter Zugrundelegung der Strecke A_0A_1 den Zahlen $0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \mu, \ldots$ entspricht, aber in der positiven Richtung liege ein Punkt B_0, von dem aus eine Messung in gleicher Weise und mit einer gleichen Längeneinheit durchgeführt werden kann, wobei wir zu den

Punkten B_ν gelangen. Beide Gebiete sollen vollständig getrennt liegen; wir setzen jedoch voraus, dass zwischen ihnen kein neues Gebiet derselben Art eingeschoben werden kann. Dann soll in Bezug auf die Einheit A_0A_1 dem Punkte B_0 die Zahl ω, dem Punkte B_ν die Zahl $\omega + \nu$ zugeordnet sein. Für positive Werthe von μ und ν gehören die Gebiete, in denen die den Zahlen μ und $\omega - \nu$ entsprechenden Punkte liegen, der Strecke A_0B_0 an. Zwischen dem Gebiet der Zahlen μ und dem der Zahlen $\omega - \nu$ liegt kein Gebiet einer Scala; auch sind sie nicht durch eine Strecke getrennt, deren Masszahl endlich ist; also müssen sie durch einen Punkt verbunden sein. Diesem Punkte legen wir das Zeichen ∞ bei und müssen annehmen, dass ihm auch der Werth $\omega - \infty$ entspricht. Hiernach dürfen wir sagen: Alle Punkte, welche den positiven Zahlen μ entsprechen, haben ihre Grenze in einem festen Punkte der Geraden; derselbe Punkt bildet die Grenze für die Punkte $\omega - \nu$ bei einem positiven, unbegrenzt wachsenden Werthe von ν.

Auf demselben Wege gelangt man zu den Zahlen $\mu\omega + \nu$, $\lambda\omega^2 + \mu\omega + \nu$ u. s. w. Obwohl man unmittelbar übersieht, dass hier die Eindeutigkeit und Stetigkeit vollständig gewahrt wird, möge es gestattet sein, dieselben Zahlen auf einem andern Wege herzuleiten.

3. Zu dem Ende ordnen wir vermittelst der Gleichung:

$$v = \operatorname{tg} \frac{u\pi}{2} \tag{1}$$

allen werthen von u, die zwischen $+1$ und -1 liegen, die sämmtlichen reellen Werthe von v zu. Um dieselbe Gleichung aber auch für die übrigen Werthe von u zur Festsetzung einer eindeutigen Beziehung zwischen u und v zu benutzen, führe man eine neue Zahl ω ein, die dem gewöhnlichen Zahlgebiet nicht angehört, bilde aus ihr durch Addition und Subtraction der gewöhnlichen Zahl ν die Zahlen $\omega \pm \nu$, die unter einander und von den gewöhnlichen Zahlen verschieden sind, und treffe folgende Festsetzung: Dem Werthe $v = \omega$ ordne man den Werth $u = 2$ und jeder Zahl $v = \omega + \nu$ einen Werth von u zu, der zwischen $+1$ und $+3$ liegt und der der Gleichung $v = \operatorname{tg} \frac{u\pi}{2}$ genügt. Dadurch ist auch die Zuordnung innerhalb dieses Bereiches von u eindeutig. Nur dem Werthe $u = 1$ ist kein Werth von v zugeordnet; man lasse ihm den Werth $v = +\infty$ entsprechen und setze, da 1 sowohl $= 0 + 1$ wie gleich $2 - 1$ ist, fest, dass der Werth $+\infty$ auch durch die Subtraction $\omega - \infty$ erhalten werden soll.

In ähnlicher Weise kann man unbegrenzt fortfahren. Versteht man unter m irgend eine positive oder negative ganze Zahl, so bilde man die Zahlen $m\omega + \nu$ für beliebige endliche Werthe von ν und ordne jedem Werthe von u zwischen $2m + 1$ und $2m - 1$ diejenige

Zahl $m\omega + \nu$ zu, für welche $\nu = \operatorname{tg}\frac{u\pi}{2}$ ist. Zugleich entspricht dem Werthe $u = 2m + 1$ der Werth $v = m\omega + \infty$.

Das so gewonnene Zahlgebiet kann aber noch erweitert werden, indem man von den n Gleichungen ausgeht

$$u_1 = \operatorname{tg}\frac{u_0\pi}{2},\ u_2 = \operatorname{tg}\frac{u_1\pi}{2},\ \cdots,\ u_n = \operatorname{tg}\frac{u_{n-1}\pi}{2},$$

und entsprechend den frühern Festsetzungen die Zahlen

$$m_0\omega^n + m_1\omega^{n-1} + \cdots + m_{n-1}\omega + \nu$$

bildet. Indessen glaube ich dies hier nicht näher darlegen zu sollen; ich will nur noch für die einfachsten unter diesen Zahlen eine Darstellung geben, die nicht ohne jedes Interesse sein dürfte.

4. In einer euklidischen Ebene ziehen wir eine Reihe von unendlich vielen parallelen Geraden. Jeder Geraden ordne man eine ganzzahlige, positive oder negative Marke m derartig zu, dass die Linien in der Reihenfolge der zugehörigen Marken auf einander folgen. Hiernach liegt die Gerade 0 zwischen den Geraden -1 und $+1$, die Gerade $+1$ zwischen den Geraden 0 und $+2$ u. s. w. Um diese Geraden zu einem einzigen Zuge zu vereinigen, setzen wir fest, dass jede Gerade m zwei unendlich ferne Punkte hat, und dass der eine zugleich der Geraden $m - 1$, der andere zugleich der Geraden $m+1$ angehört. Jetzt soll der Punkt $m\omega + \nu$ der Geraden m angehören und von einem in ihr gewählten Punkte den Abstand ν haben, der in der einen Richtung als positiv, in der andern als negativ angenommen wird. Der Punkt $m\omega + \infty = (m+1)\omega - \infty$ soll derjenige Punkt sein, in welchem die Geraden m und $m + 1$ mit einander verbunden sind.

Auch die höheren transfiniten Zahlen lassen sich in ähnlicher Weise darstellen, wofern man die Fiction eines mehr-dimensionalen euklidischen Raumes benutzt. Man sieht, dass der erste Fall, auf den wir in 1. geführt sind, durchaus berechtigt ist. Es verdient bemerkt zu werden, dass wir auf diesem Wege die Cantor'schen Zahlen gewonnen haben; der hier benutzten Zahl ω legt Herr Cantor das Zeichen $\omega^* + {}^*\omega$ bei.

5. Wir gehen jetzt zur Prüfung des zweiten Falles über und fragen uns, ob es gestattet ist, zwischen je zwei geordneten Gruppen, die auf einer Geraden liegen, jedesmal unendlich viele Gruppen derselben Art vorauszusetzen, mit andern Worten, ob wir das Gebiet einer Scala als *Element* eines eindimensionalen Systems betrachten dürfen. Sobald diese Frage bejaht ist, sind allerdings noch einige Nebenfragen zu erledigen; einigen Folgerungen, die Herr Veronese aus seiner Theorie zieht, wird man nicht ganz beistimmen können; auch muss die

Anwendbarkeit auf den Raum noch eigens geprüft werden. Aber die arithmetische Berechtigung der Veronese'schen Zahlen wird man alsdann nicht mehr bestreiten können. Damit ist nämlich die Zulässigkeit der Zahl ∞_1 bewiesen; mit Nothwendigkeit folgen daraus die Zahlen

$$\infty_1^n \cdot m_0 \pm \infty_1^{n-1} \cdot m_1 \pm \infty_2^{n-2} \cdot m_2 \pm \cdots;$$

es scheint sogar, als ob man alsdann die Zahlen

$$\infty_1^{\infty_1}, \quad \infty_1^{\infty_1^{\infty_1}} \cdots$$

als berechtigt anerkennen müsse. Auch besteht jetzt kein wesentlicher Unterschied zwischen endlichen und unendlich grossen Segmenten; daher muss man auch umgekehrt die unendlich kleinen Segmente zulassen. Es ist also angebracht, alle weiteren Fragen bei Seite zu lassen und nur zu prüfen, ob die angegebene Annahme zulässig ist oder nicht.

Zu dem Zwecke müssen wir etwas weiter ausholen.

6. Die Punkte einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit haben die Eigenschaft, dass man sie in eine Reihe ordnen kann, welche den beiden Gesetzen genügt:

a) von zwei verschiedenen Punkten ist der eine jedesmal der spätere,

b) wenn auf den ersten Punkt ein zweiter, auf diesen ein dritter folgt, so folgt auch der dritte Punkt auf den ersten.

Um die gewöhnlichen Zahlen nach diesem Gesetze zu ordnen, setze man fest, dass von zwei Zahlen a und b die erste die grössere sein soll, wenn die Differenz $a - b$ positiv ist, und lasse die grössere Zahl auf alle kleineren folgen. Die Zahlen des Herrn Veronese bilden, wie man sofort erkennt, eine Reihe derselben Art. Indessen ist diese Eigenschaft keineswegs für die eindimensionalen Gebilde charakteristisch; vielmehr kann eine derartige Zuordnung für beliebig viele Dimensionen durchgeführt werden. Ist z. B. in einem n-dimensionalen Raume jedem Punkte ein einziges Werthsystem $(x_1 \ldots x_n)$ zugeordnet und entspricht umgekehrt jedem Werthsystem ein einziger Punkt, so setze man fest, dass für $y_n > x_n$ der Punkt $(y_1 \ldots y_n)$ auf den Punkt $(x_1 \ldots x_n)$ folgen soll; ebenso soll für $y_n = x_n$ und $y_{n-1} > x_{n-1}$ der Punkt $(y_1 \ldots y_{n-1}, y_n)$ eine spätere Stelle erhalten als der Punkt $(x_1 \ldots x_{n-1}, x_n)$. In gleicher Weise fahre man fort, bis man zu Punkten gelangt, für welche nur die Werthe von x_1 ungleich sind und die man nach der Grösse dieser Coordinate ordnet. Die Möglichkeit dieser Anordnung, welche, wie ich bemerken möchte, in den Arbeiten des Herrn Cantor eine wichtige Rolle spielt, genügt demnach für sich noch nicht, um die oben gestellte Frage bejahen zu können.

7. Ebensowenig folgt dies aus einer Eigenschaft, welche Herr Levi-Cività in seiner Arbeit: Sugli infiniti e infinitesimi attuali quali elementi analitici, (Atti del R. Istituto Veneto, 1893) für die von ihm eingeführten Zahlzeichen beweist. Da Herr Veronese sich mehrmals mit besonderem Nachdruck auf diese Arbeit beruft, so müssen wir ihr einige Worte widmen. Dabei glaube ich dem Leser das Verständniss zu erleichtern, wenn ich von einer geometrischen Darstellung ausgehe, die zwar in der Arbeit selbst nicht erwähnt wird, die aber sehr nahe liegt.

Man bestimme die Lage eines Punktes auf einem geraden Kreiskegel 1) durch den Abstand a des Punktes vom Scheitel, indem man diese Grösse auf dem einen Mantel positiv, auf dem andern negativ sein lässt, und 2) durch die Zahl $\nu = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, wo die durch den Punkt und die Axe gelegte Ebene mit einer festen Ebene den Winkel φ bildet. Hängt man die Marke ν an a an, so genügt das Zeichen a_ν um die Lage des Punktes zu bestimmen. Alle Punkte $o_\nu = 0$ fallen im Scheitel zusammen. Sollen die Punkte $a_{-\infty}$ und $a_{+\infty}$ verschieden sein, so muss man durch den Kegelmantel einen Schnitt längs einer Erzeugenden führen.

Das Gebiet dieser Zahlen kann in folgender Weise erweitert werden. Man lasse der Gruppe

$$G = a_{\nu_1}^{(1)} + a_{\nu_2}^{(2)} + a_{\nu_3}^{(3)} + \cdots,$$

die eine endliche oder unendliche Anzahl von Elementen enthält, alle Punkte $a_{\nu_1}^{(1)}$, $a_{\nu_2}^{(2)}$ ... angehören und betrachte die Gesammtheit dieser Punkte wieder als eine Zahl, wenn entweder die Anzahl der Marken $\nu_1, \nu_2, \ldots$, die grösser ist als eine beliebig gewählte Zahl, endlich ist, oder wenn in der Gruppe nur eine endliche Anzahl von Marken vorkommt, die kleiner sind als eine beliebig gewählte Zahl. Im ersten Falle wird die Zahl eine elliptische, im zweiten eine hyperbolische genannt. Alle elliptischen Zahlen (und ebenso alle hyperbolischen) können in eine Reihe von der in 6. angegebenen Eigenschaft gebracht werden. Herr Levi-Cività zeigt aber weiter, dass man auf die neuen Zahlen die Addition, Subtraction und Multiplication anwenden kann, ohne dass die für die reellen endlichen Zahlen geltenden Gesetze eine Aenderung erleiden. So kann man mehrere Punktmengen, die elliptischen Zahlen entsprechen, durch Operationen, die vollständig auf ganze rationale Functionen hinauskommen, zu einer neuen Punktmenge vereinigen, welche wieder durch eine elliptische Zahl dargestellt wird. Dasselbe gilt für transcendente Functionen, welche im Endlichen überall den Charakter ganzer Functionen haben.

Obwohl dies Resultat an sich ohne Zweifel Interesse beanspruchen darf, ist es für die Frage, ob die elliptischen Zahlen eine eindeutige

stetige Mannigfaltigkeit bilden, ohne jede Bedeutung. Denn das gefundene Ergebniss gilt im erhöhten Masse für die complexen Zahlen. Auch lassen diese sich in eine Reihe der angegebenen Art bringen. Dennoch hat bisher niemand aus diesen beiden Eigenschaften der complexen Zahlen den Schluss ziehen wollen, dass sie eine eindimensionale stetige Mannigfaltigkeit bilden; auch ist hierfür meines Wissens bisher kein Beweis versucht, viel weniger erbracht wordeen.

8. Herr Veronese glaubt die Stetigkeit durch seine sechste und achte Hypothese begründen zu können. Die sechste Hypothese geht von einer endlichen Strecke XX' aus und lässt ihre Endpunkte sich in entgegengesetztem Sinne bewegen, und zwar so, dass die Strecke unbegrenzt klein wird; dann wird angenommen, die Strecke enthalte einen Punkt (und damit eine unendlich kleine Strecke) ausserhalb des Gebiets der Veränderlichkeit der Endpunkte.

Bei den Anwendungen dieser Hypothese kommt es darauf an, eine bestimmte unendlich kleine Strecke zu erhalten; zu dem Zwecke muss aber ein Gesetz gegeben sein, nach welchem die Veränderung der Endpunkte vor sich gehen soll; ein solches Gesetz kann doch wohl erst dann angegeben werden, wenn den rationalen Zahlen Punkte zugeordnet sind. Zum mindesten aber muss es möglich sein zu beurtheilen, ob die während der Veränderung erhaltene Strecke jedesmal eine endliche Masszahl in Bezug auf die gegebene Strecke hat. Will man dies feststellen oder will man, was für den ersten Zweck nothwendig ist, den rationalen Zahlen Punkte zuordnen, so muss bewiesen sein, dass jede Strecke in beliebig viele gleiche Theile zerlegt werden kann, was in dem Veronese'schen Werke erst an einer späteren Stelle gezeigt wird.

9. Indessen will ich auf diese Bedenken nicht näher eingehen, auch die achte Hypothese keiner Besprechung unterziehen; vielmehr wende ich mich der Frage zu, ob wirklich vermittelst dieser beiden Hypothesen die Stetigkeit begründet sei. Diese Frage muss verneint werden; denn selbst zugegeben, dass hierdurch jedes *endliche* Segment als stetig erwiesen sei, folgt daraus noch nicht, dass auch die *unendlichen* Segmente dieselbe Eigenschaft haben. Mit andern Worten: Soll die Grundform eine stetige eindimensionale Mannigfaltigkeit bilden, so müssen die einzelnen in ihr enthaltenen (Veronese'schen) Gruppen zu einem zusammenhängenden Ganzen verbunden sein. Eine derartige Verbindung ist aber unmöglich, weil das Gebiet jeder Scala unbegrenzt, ohne festen Anfangs- und Endpunkt, verläuft und zudem zwischen zwei beliebigen derartigen Gebieten unendlich viele Gebiete derselben Art enthalten sind.

Betrachte ich z. B. die Bewegung (Veränderung) eines Punktes auf einer Geraden (Grundform). Der bewegte Punkt gehört stets einem einzigen Gebiete an, geht aber von einem zum andern über. Das letztere

ist nur möglich, wenn er beim Uebergange entweder keinem derartigen Gebiete angehört oder wenn er eine Grenzlage zwischen beiden Gebieten annimmt. Beide Möglichkeiten werden in dieser Theorie ausgeschlossen. Somit sind die einzelnen Bestandtheile nicht zu einer einzigen stetigen Mannigfaltigkeit vereinigt.

10. Um dies noch deutlicher einzusehen, bringen wir an der Darstellung, welche Herr Veronese von seinen Zahlen giebt (S. 166 der italienischen, S. 184 der deutschen Ausgabe), eine kleine Aenderung an. (Dass dabei die unendlich kleinen Segmente nicht vorkommen, ist belanglos.) Wir gehen von einer horizontalen Geraden a aus und ordnen jeder reellen, rationalen oder irrationalen Zahl in der bekannten Weise einen einzigen ihrer Punkte zu. Durch jeden rationalen Punkt lege man eine verticale, durch jeden irrationalen Punkt eine horizontale Gerade, und zwar so, dass alle diese Geraden mit der Geraden a rechte Winkel bilden, Jetzt betrachte man die Gesammtheit der Punkte, die auf den so gezogenen Geraden liegen. In jeder verticalen Geraden lasse man die höher gelegenen Punkte auf die niedriger liegenden Punkte folgen, und in jeder horizontalen Geraden lasse man die Punkte von links nach rechts verlaufen. Wenn endlich zwei Punkte P und Q verschiedenen Geraden des Systems angehören, so soll der Punkt Q später zu setzen sein als P, wenn dem Punkte, den die durch Q gelegte Gerade des Systems mit a gemein hat, auf a eine grössere Masszahl zugeordnet ist, als dem Schnittpunkt mit der durch P gehenden Geraden des Systems. Hierdurch sind alle Punkte des Systems in eine feste Ordnung gebracht; zudem sind die endlichen Segmente stetig; aber dem Ganzen kann man keine Stetigkeit beilegen, weil ein Zusammenhang zwischen den einzelnen Geraden nicht besteht und nicht herbeigeführt werden kann.

Münster, den 27. Juni 1896.

Ueber Zahlengruppen in algebraischen Körpern.

Von

H. Weber in Strassburg.

Der vorliegende Aufsatz bildet die Einleitung und nothwendige Grundlage zu einer eingehenden Untersuchung gewisser algebraischer Zahlkörper, deren Ergebnisse ich in einem folgenden Aufsatze ausführlich mitzutheilen hoffe, über die aber schon hier einige vorläufige Angaben Platz finden mögen.

Die Resultate beziehen sich zunächst auf einen imaginären quadratischen Körper, für den bis jetzt allein die nöthigen Hilfsmittel bereit sind, wiewohl es wahrscheinlich ist, dass die ganze Theorie einer wesentlichen Verallgemeinerung fähig ist.

Aus einem quadratischen Körper (mit negativer Grundzahl) lässt sich eine Kette höherer Körper ableiten, die gewissen Zahlengruppen in dem quadratischen Körper entsprechen. Der erste unter diesen Körpern ist der aus der complexen Multiplication der elliptischen Functionen bekannte *Classenkörper*, dessen Galois'sche Gruppe der Gruppe der Idealclassen im quadratischen Körper isomorph ist; daran schliessen sich die gleichfalls in der Theorie der complexen Multiplication vorkommenden Körper, die in gleicher Weise den Gruppen der Idealclassen in den verschiedenen Ordnungen des quadratischen Körpers entsprechen, die ich die *Ordnungskörper* nennen will. Diese sind relativ Abel'sche Körper in Bezug auf den gegebenen quadratischen Körper.

Ueber jedem dieser Körper giebt es dann wieder eine unendliche Zahl höherer Körper, die in Bezug auf einen dieser Ordnungskörper Abel'sche sind; diese Körper erhält man aus der *Theilung der elliptischen Functionen mit einem singulären Modul* und sie sollen daher *Theilungskörper* genannt werden. Der Theiler, den ich den *Modul* dieses Körpers nenne, kann dabei ein beliebiges *Ideal* des quadratischen Körpers sein.

Um die Entstehung und gegenseitige Beziehung dieser Körper deutlich darlegen zu können, sind die in der vorliegenden ersten Arbeit

gegebenen Ausführungen nothwendig, deren Bedeutung besser erkannt wird, wenn sie gleich allgemein, für beliebige Körper durchgeführt werden. Ich mache hier schon auf die allgemeine Definition der *Genera* oder *Geschlechter* (§ 6) aufmerksam, die eine weit tiefer gehende ist, als die in § 13 des zweiten Bandes meiner Algebra gegebene*).

Die erste und wichtigste Frage, der sich die weitere Untersuchung zuwenden muss, ist die Gradbestimmung dieser Körper oder die Irreducibilität der die Körper definirenden Gleichungen. Als Hilfsmittel für diese Untersuchung hat sich bis jetzt nur eines in allen Fällen als wirksam erwiesen, was bereits in der Kreistheilungstheorie gute Dienste thut, und das sich auf die Dirichlet'schen Formeln für Classenzahlen stützt**).

Mit jedem solchen Irreducibilitätsbeweis ist zugleich der Beweis eines Satzes über unendlich viele Primideale in einer gewissen Idealgruppe gegeben, wie mit dem entsprechenden Beweise der Irreducibilität der Kreistheilungsgleichung der Satz von den unendlich vielen Primzahlen in einer arithmetischen Progression***).

Der relative Grad eines Ordnungskörpers in Bezug auf den Körper, der ausser den rationalen Zahlen beliebige Einheitswurzeln enthält, ergiebt sich auf diesem Wege gleich der Anzahl der in dem Hauptgeschlecht enthaltenen Idealclassen, und daraus erhält man zugleich aufs Einfachste den Beweis des Dirichlet'schen Satzes, dass durch jede quadratische Form unendlich viele Primzahlen darstellbar sind, die zugleich in einer gegebenen mit den Charakteren der quadratischen Form verträglichen Linearform enthalten sind. (Freilich bis jetzt nur für negative Discriminanten.) Dieser tiefere Zusammenhang des Dirichlet'schen Satzes, der bisher ziemlich unvermittelt aufgetreten ist, mit der Theorie der quadratischen Körper und der von Kronecker entwickelten Zerfällung der Classengleichung in der complexen Multiplication durch Adjunction gewisser Quadratwurzeln, ist mir besonders überraschend und interessant gewesen. Es folgt daraus, dass eine weitere Zerfällung der Classengleichung, selbst nach Adjunction beliebiger Kreistheilungszahlen unmöglich ist.

Der Relativgrad eines Theilungskörpers in Bezug auf den zu Grunde gelegten Ordnungskörper, der einen realen oder idealen Modul $\mathfrak{m}$ hat, ist gleich der Anzahl zu $\mathfrak{m}$ theilerfremder, nach $\mathfrak{m}$ incongruenter Zahlen, getheilt durch die Anzahl der nach dem Modul $\mathfrak{m}$ incongruenten Einheiten des Körpers (die letztere Zahl ist beim imaginären quadra-

*) Weber, Lehrbuch der Algebra, Braunschweig 1894, 1896.

**) Wahrscheinlich hat Kronecker dies oder ein sehr verwandtes Beweismittel in der Theorie der complexen Multiplication angewandt (Monatsberichte der Berliner Academie 26. Juni 1862).

***) Vgl. Algebra, Bd. II, zweiter Nachtrag.

tischen Körper im allgemeinen $= 2$, in zwei bekannten speciellen Fällen $= 4$ oder $= 6$.)

Mit diesem Beweise ist der Beweis eines neuen Satzes über unendlich viele Primideale verbunden, der geradezu als eine Verallgemeinerung des Satzes von den unendlich vielen Primzahlen in arithmetischen Progressionen aufgefasst werden kann. Wenn man nämlich die Ideale des quadratischen Körpers in der Weise in Classen theilt, dass zwei Ideale nur dann in eine Classe aufgenommen werden, wenn ihr Quotient eine nach dem Modul $\mathfrak{m}$ mit einer Einheit congruente Zahl ist, so ergiebt sich, dass in jeder dieser Classen unendlich viele Primideale ersten Grades vorkommen; und darin ist als specieller Fall der Satz enthalten, dass durch eine Linearform $\alpha\xi + \beta$, in der α, β, feste ganze Zahlen ohne gemeinsame Theiler und ξ eine variable ganze Zahl des quadratischen Körpers bedeuten, unendlich viele complexe Primzahlen dargestellt werden können.

Die so gewonnenen Resultate bahnen den Weg zu einer genaueren Untersuchung der Grundzahl und des Grundideals des Classenkörpers, die ursprünglich das Ziel der ganzen Arbeit bildete, insbesondere zum Beweise des von Kronecker vermutheten Satzes, dass das Partialgrundideal des Classenkörpers in Bezug auf den gegebenen quadratischen Körper gleich 1 ist.

Ich stütze mich auf die Darstellung der Theorie der algebraischen Zahlen, die ich im zweiten Bande meines Lehrbuches der Algebra gegeben habe. Ausserdem ist aber noch eine Reihe von Sätzen über die Theilung der elliptischen Functionen erforderlich, die noch wenig oder gar nicht bekannt sind, die daher auch noch abgeleitet werden müssen. Dies aber muss auf eine spätere Abhandlung verspart werden.

§ 1.

Abel'sche Gruppen.

Es sei G ein System irgend welcher Elemente

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots (G),$$

die eine endliche oder unendliche *Abel'sche Gruppe* bilden, so dass sich aus zwei Elementen α, β des Systems ein bestimmtes drittes ableiten lässt, das mit $\alpha\beta$ bezeichnet wird, also etwa

$$\alpha\beta = \gamma, \tag{1}$$

dass bei dieser Zusammensetzung das associative und das commutative Gesetz

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma), \quad \alpha\beta = \beta\alpha \tag{2}$$

gilt, dass endlich, wenn α, γ gegeben sind, immer ein Element β

gefunden werden kann, was der Bedingung (1) genügt. Dies Element bezeichnen wir mit

$$\beta = \frac{\gamma}{\alpha} = \gamma : \alpha. \tag{3}$$

Es folgt dann, dass es ein Element 1 in G giebt, das für jedes α der Bedingung $1 . \alpha = \alpha . 1 = \alpha$ genügt, und dass die Regeln des Rechnens in dieser Gruppe genau übereinstimmen mit den Regeln der Multiplication und Division im Zahlenreich (ohne die Null). Demnach werden wir auch die Ausdrücke *Product* und *Quotient* für die Verbindungen $\alpha\beta$ und $\gamma : \alpha$ brauchen.

Wenn A, B irgend zwei Theile von G sind (Gruppen oder nicht) so verstehen wir unter dem *Product* AB das System der Elemente $\alpha\beta$, wenn α alle Elemente von A, β alle Elemente von B durchläuft, wobei ein Element, was mehrmals in der Form $\alpha\beta$ dargestellt werden kann, nur einmal in AB aufgenommen wird. (Composition der Theile, Algebra Bd. II, § 4). Ist A eine Gruppe, und B ein Theil von A, so ist hiernach $A = AB$. Sind A und B zwei Gruppen, so ist auch AB eine Gruppe, die das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von A und B genannt wird. Aber auch der kürzere Ausdruck „*Product von A und B*“ ist nicht misszuverstehen, und soll daher in der Folge gebraucht werden. Wenn die beiden Systeme A, B gemeinschaftliche Elemente haben, so bilden diese ein System D, das der *Durchschnitt**) von A und B heisst. Ein solcher Durchschnitt ist immer vorhanden, wenn A und B Gruppen sind, da sie ja dann wenigstens die 1 gemein haben, und D ist dann selbst wieder eine Gruppe. Zwei Gruppen, die *nur* das Element 1 gemein haben, heissen *theilerfremd* oder *relativ prim*.

Ist A eine Gruppe, und sind ρ, σ irgend zwei Elemente aus G, so haben die beiden Systeme ρA, σA entweder kein einziges Element gemein, oder sie sind ganz identisch.

Die Systeme ρA heissen die *Nebengruppen zu A*. Zwei Elemente aus G, die in derselben Nebengruppe vorkommen, heissen *äquivalent nach A*. Aequivalente Elemente sind auch dadurch definirt, *dass ihr Quotient in A enthalten ist*.

Es seien jetzt A und B zwei Gruppen in G, von der Art, dass alle Elemente von B zugleich in A enthalten sind, wofür wir auch sagen, *dass B ein Theiler von A ist*.

Wählt man die Elemente $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ aus A so aus, dass unter den in A enthaltenen Nebengruppen

*) Indem ich den Ausdruck „*Durchschnitt*“ statt des längeren „grösster gemeinschaftlicher Theiler“ brauche, folge ich einem Vorschlag von Study.

(4) $$\alpha B,\ \alpha' B.\ \alpha'' B, \ldots$$

niemals zwei identisch sind, so sind zwei Fälle möglich:

1) Die Reihe (4) bricht nach einer endlichen Anzahl von Gliedern ab. Dann zerfällt A in eine endliche Anzahl von Nebengruppen αB, deren Zahl wir den *Index des Theilers B von A nennen* und mit

(5) $$j = (A, B)$$

bezeichnen. Wir setzen nach einer von Galois gebrauchten Bezeichnung

(6) $$A = \alpha B + \alpha' B + \alpha'' B + \cdots = \Sigma \alpha B$$

und nennen α, α', α'' ein *volles Repräsentantensystem von A nach B*. In diesem Falle heisst B ein Theiler von A von endlichem Index.

2) Die Reihe (4) bricht nicht ab. In diesem Falle geben wir dem Zeichen (A, B) die Bedeutung

(7) $$(A, B) = 0$$

und nennen *B einen Theiler von A ohne Index oder vom Index Null.*

Ist B ein Theiler von A von endlichem Index, so bilden die Nebengruppen (4) unter sich eine *endliche Abel'sche Gruppe*, wenn wir

$$\alpha B\, \alpha' B = \alpha \alpha' B$$

setzen, weil das System $\alpha\alpha' B$ ja auch unter den Nebengruppen (4) vorkommt. Diese Gruppe kann der Quotient von A durch B genannt und mit $A|B$ bezeichnet werden (Algebra, Bd. II, § 4). Der Grad dieser Gruppe ist gleich (A, B).

Wenn zwei solche Gruppen $A|B$ und $A'|B'$ isomorph sind (einstufig) so setzen wir auch kurz

$$A|B = A'|B',$$

was zur Folge hat, dass auch $(A, B) = (A', B')$ ist.

Wir beweisen zunächst eine Reihe von Sätzen über Gruppentheiler:

I. *Ist B ein Theiler von A und C ein Theiler von B so ist auch C ein Theiler von A und*

$$(A, C) = (A, B)\,(B, C).$$

Denn jede Nebengruppe αB zerfällt in ebenso viele Nebengruppen $\alpha\beta C = \alpha' C$ als B in Nebengruppen βC zerfällt.

Es ergiebt sich daraus, dass, wenn (A, C) von Null verschieden ist, keine der Zahlen (A, B), (B, C) gleich Null sein kann.

II. *Ist B ein Theiler von A, und C so beschaffen, dass B der Durchschnitt von A und BC ist, so ist*

$$(AC, BC) = (A, B).$$

Wenn nämlich αB und $\alpha' B$ zwei verschiedene Nebengruppen zu B sind, so können die Nebengruppen αBC, $\alpha' BC$ nur dann identisch sein, wenn $\alpha : \alpha'$ in BC enthalten ist. Wenn nun aber, wie vorausgesetzt, B der Durchschnitt von A und BC ist, so müsste hiernach

$\alpha:\alpha'$ in B enthalten, also αB und $\alpha' B$ nicht verschieden sein, wie doch angenommen war. Die Anzahl der von einander verschiedenen Nebengruppen αBC ist also gewiss nicht kleiner als die Anzahl der αB, und folglich ist $(AC, BC) = 0$, wenn $(A, B) = 0$ ist. Ist aber (A, B) von Null verschieden, so ist

$$A = \Sigma \alpha B, \quad AC = \Sigma \alpha BC,$$

woraus sich die Formel II ergiebt.

Die im Satze II über C gemachte Voraussetzung ist immer erfüllt, wenn *C ein Theiler von B ist, oder wenn C theilerfremd zu A ist.*

Daraus ergiebt sich leicht der Satz:

III. *Ist B ein Theiler von A und B_1 ein Theiler von A_1, und ist A_1 relativ prim zu A, so ist*

$$(AA_1, BB_1) = (A, B)(A_1, B_1).$$

Die Voraussetzung involvirt zugleich, dass B theilerfremd zu A_1 ist, und demnach ergiebt sich durch zweimalige Anwendung des Satzes II.

$$(AA_1, BA_1) = (A, B),$$
$$(BA_1, BB_1) = (A_1, B_1)$$

und daraus nach I die zu beweisende Formel.

IV. *Ist A' ein Theiler von A von der Art, dass*

$$A = A'B, \tag{8}$$

so ist, wenn B' der Durchschnitt von A' und B ist

$$(A, B) = (A', B').$$

Die Voraussetzung (8) besagt nämlich, dass in jeder Nebengruppe αB ein Element aus A' vorkommt, dass also, wenn αB eine beliebige Nebengruppe zu B in A ist, man immer eine α' in A' finden kann, so dass $\alpha B = \alpha' B$ wird. Sind dann $\alpha_1' B$, $\alpha_2' B$ verschiedene Nebengruppen zu B in A, so sind $\alpha_1' B'$, $\alpha_2' B'$ verschiedene Nebengruppen zu B' in A' und umgekehrt. Daraus ergiebt sich unmittelbar unsere Formel. Wir sprechen noch den folgenden, hieraus fliessenden Satz aus:

V. *Reducirt man G auf einen Theiler G' und sind A', B' die Durchschnitte von G' mit A und B, so ist unter der Voraussetzung, dass $A = A'B$ ist, d. h. dass in jeder Nebengruppe αB ein Element aus G' vorkommt,*

$$(A, B) = (A', B').$$

Ist $j = (A, B)$ von Null verschieden, so ist in der Gruppe $A|B$ die Gruppe B selbst das Einheitselement. Nach einem bekannten Satze der Gruppentheorie ist daher die j^{te} Potenz einer jeden Nebengruppe αB mit B selbst identisch. Wir formuliren dies als sechsten Satz:

VI. *Ist der Index j von B in Bezug auf A von Null verschieden, so ist die j^{te} Potenz eines jeden Elementes α von A in B enthalten.*

Wir machen noch den

Zusatz. *Wenn α^k die niedrigste Potenz von α mit positiven Exponenten ist, die in B enthalten ist, so ist k ein Theiler von j.*

§ 2.

Potenzgruppen.

Ein Element der Gruppe G, von dem eine Potenz mit endlichem Exponenten $=1$ wird, können wir eine *Einheitswurzel* (in G) nennen. Nehmen wir nun ein Element α_1 in G, welches keine Einheitswurzel ist, so bilden die Potenzen $\alpha_1^{x_1}$, wenn x_1 alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchläuft, eine unendliche Abel'sche Gruppe A_1. Wir nehmen nun, wenn es möglich ist, ein zweites Element α_2 von der Art, dass $\alpha_2^{x_2}$ *nur* für $x_2 = 0$ in A_1 enthalten ist, und erhalten in der Gesammtheit der Elemente $\alpha_1^{x_1}\alpha_2^{x_2}$ eine neue Gruppe A_2. So fahren wir fort und bilden eine Gruppe A_m indem wir in

$$\alpha = \alpha_1^{x_1}\alpha_2^{x_2}\ldots\alpha_m^{x_m} \tag{1}$$

die Exponenten $x_1, x_2, \ldots, x_m$ alle ganzzahligen Werthe durchlaufen lassen. Es ist hierbei für jedes m vorausgesetzt, dass α nur dann in A_{m-1} enthalten ist, wenn $x_m = 0$ ist. Daraus folgt, dass zwei Elemente α mit verschiedenen Exponenten x niemals einander gleich sein können, und dass in allen Gruppen A_m keine Einheitswurzel ausser 1 vorkommt.

Die Gruppe A_m möge eine *Potenzgruppe* heissen.

Das System

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \tag{2}$$

heisst eine *Basis der Gruppe A_m*. Wenn nun

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$$

gleichfalls eine Basis von A_m ist, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $n \gtreqless m$ annehmen, und da die β selbst der Gruppe A_m angehören, so lassen sich die Exponenten $a_{r,s}$ so bestimmen, dass

$$\beta_s = \alpha_1^{a_{1,s}}\alpha_2^{a_{2,s}}\ldots\alpha_m^{a_{m,s}}$$

wird, und dann ist, wenn $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die Exponenten des Elementes α für die neue Basis bedeuten

$$x_r = a_{r,1}y_1 + \cdots + a_{r,n}y_n. \tag{3}$$

Nach dem Begriff der Basis müssen, wenn die $x_r = 0$ gesetzt werden auch die y_s sämmtlich verschwinden. Es muss also $n \lesseqgtr m$, und

folglich nach unserer Voraussetzung $n = m$ sein. Ausserdem muss die Determinante

$$|a_{r,s}| = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

von Null verschieden sein. Da sich aber für ganzzahlige Werthe von x_r aus (3) immer ganzzahlige y_s ergeben müssen, so muss nach einen bekannten Determinantensatze

$$|a_{r,s}| = \pm 1$$

sein.

Die Zahl m ist also für die Potenzgruppe A_m invariant und soll der *Rang der Potenzgruppe* genannt werden.

Wir beweisen folgenden Satz:

VII. *Jeder Theiler B der Potenzgruppe A_m ist selbst Potenzgruppe von nicht höherem Rang als m. Sind die Durchschnitte*

(4) $$B_m, B_{m-1}, B_{m-2}, \ldots 1$$

von B mit $A_m, A_{m-1}, A_{m-2}, \ldots 1$ alle von einander verschieden, so ist der Rang von B gleich m, und der Index (A_m, B_m) ist von Null verschieden.

Um diesen Satz zunächst für $m = 1$ zu beweisen, bezeichnen wir mit (α) die aus allen Potenzen irgend eines Elementes α bestehende Potenzgruppe ersten Ranges. Ist nun B ein von 1 verschiedener Theiler von (α), so giebt es eine gewisse kleinste positive Zahl b für die

$$\beta = \alpha^b$$

in B enthalten ist und dann ist B die Potenzgruppe (β). Zugleich ist

$$(\alpha) = (\beta) + \alpha(\beta) + \cdots + \alpha^{b-1}(\beta)$$

also der Index

(5) $$\big((\alpha), (\beta)\big) = b.$$

Nun können wir den allgemeinen Beweis unseres Satzes durch vollständige Induction führen.

Ist B ein Theiler von A_m, so können wir m so klein annehmen, dass $B = B_m$ nicht zugleich Theiler von A_{m-1} ist.

Es giebt dann eine gewisse kleinste positive Zahl b_m von der Beschaffenheit, dass $\alpha_m^{b_m}$ in der Gruppe $B_m A_{m-1}$ enthalten ist, und jeder andere Exponent x, für den α_m^x in dieser Gruppe enthalten ist, ist ein Vielfaches von b_m.

Setzen wir also

$$\alpha_m^{b_m} = \beta_m,$$

und bezeichnen mit β irgend ein Element aus B_m, so giebt es einen Exponenten y, so dass $\beta \beta_m^{-y}$ in A_{m-1} und folglich auch in B_{m-1} enthalten ist. Daraus folgt

(6) $$B_m = (\beta_m) B_{m-1}.$$

Da nun β_m^y nur für $y = 0$ in B_{m-1} enthalten ist, so folgt, wenn B_{m-1} bereits als Potenzgruppe nachgewiesen ist, dass auch B_m eine Potenzgruppe von einem an 1. höheren Rang als B_{m-1} ist.

Unter der in VII gemachten Voraussetzung ist B_{m-2} von B_{m-1} verschieden, und folglich B_{m-1} nicht in A_{m-2} enthalten. Wir nehmen demgemäss als bereits erwiesen an, dass (A_{m-1}, B_{m-1}) von Null verschieden ist.

Nun ist

$$A_m = (\alpha_m) A_{m-1} \tag{7}$$

und da (α_m) theilerfremd zu A_{m-1} ist, so ergiebt sich nach dem Satze III aus (6) und (7)

$$(A_m, B_m) = (A_{m-1}, B_{m-1}) \left((\alpha_m), (\beta_m)\right)$$

und folglich nach (5)

$$(A_m, B_m) = b_m (A_{m-1}, B_{m-1}), \tag{8}$$

wodurch das Theorem VII bewiesen ist.

Ueber die Bestimmung des Index können wir noch hinzufügen: Sind

$$b_m, b_{m-1}, \ldots, b_1$$

die kleinsten positiven Zahlen, für die die Potenzen

$$\alpha_m^{b_m}, \alpha_{m-1}^{b_{m-1}}, \ldots, \alpha_1^{b_1}$$

in

$$B_m A_{m-1}, B_{m-1} A_{m-2}, \ldots, B_1$$

enthalten sind, so ist

$$(A_m, B_m) = b_1 b_2 \ldots b_m. \tag{9}$$

§ 3.

Zahlengruppen und Idealgruppen in einem algebraischen Körper.

Die sämmtlichen Zahlen eines algebraischen Körpers Ω, mit Ausschluss der Null, bilden, wenn die wirkliche Multiplication und Division als Regel der Zusammensetzung gilt, eine Gruppe Ω_0 von der in § 1 betrachteten Art, die wir jetzt eine *Zahlengruppe* nennen wollen. Jede Zahlengruppe enthält die Zahl 1. Eine solche Zahlengruppe ist auch das System der in Ω enthaltenen Einheiten und diese Gruppe soll durchweg mit E bezeichnet werden.

Eine Gruppe wird auch noch gebildet von den sämmtlichen Einheitsfunctionalen*) des Körpers Ω, und diese Gruppe bezeichne ich mit $\bar{E}$. Ist dann φ irgend ein ganzes oder gebrochenes Functional in Körper Ω, so ist

$$\varphi \bar{E} = \mathfrak{a} \tag{1}$$

*) Algebra, Bd. II, § 138.

ein *Ideal* in Ω, und dies Ideal ändert sich nicht, wenn φ durch ein associirtes Functional ersetzt wird. Wir sagen, das Ideal $\mathfrak{a}$ wird durch das Functional φ *erzeugt*. Ist φ eine *Zahl*, so ist $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal.

Die Ideale des Körpers Ω bilden eine Gruppe, wobei die Multiplication und Division der Ideale als Compositionsgesetz gilt. Eine solche Gruppe soll eine *Idealgruppe* heissen. Die aus allen Idealen von Ω gebildete Gruppe bezeichne ich mit $\overline{\Omega}_0$. Die *Hauptideale* in $\overline{\Omega}$ bilden gleichfalls eine Idealgruppe, die mit $\overline{E}\Omega_0$ zu bezeichnen ist. Zwei Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sind nach $\overline{E}\Omega_0$ äquivalent, wenn der Quotient $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ ein Hauptideal ist, oder, was dasselbe ist, wenn der Quotient der sie erzeugenden Functionale φ, ψ mit einer Zahl associirt ist. Die Nebengruppen zu $\overline{E}\Omega_0$ in $\overline{\Omega}_0$ sind die *Idealclassen*. Da nach einem Fundamentalsatz der Idealtheorie die Anzahl dieser Classen endlich ist, so ist der Index

$$h = (\overline{\Omega}_0, \overline{E}\Omega_0) \tag{2}$$

immer von Null verschieden. Er heisst die *Classenzahl des Körpers* Ω.

Man kann die Ideale $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_h$ in Ω so auswählen, dass

$$\overline{\Omega}_0 = \mathfrak{a}_1\Omega_0 + \mathfrak{a}_2\Omega_0 + \cdots + \mathfrak{a}_h\Omega_0 \tag{3}$$

wird.

Ist $\overline{O}$ eine in $\overline{\Omega}_0$ enthaltene Idealgruppe und O der Inbegriff der Zahlen ω, deren Hauptideale $\overline{E}\omega$ in $\overline{O}$ enthalten sind, so ist $\overline{E}O$ die Gruppe der in $\overline{O}$ enthaltenen Hauptideale, und O ist eine in Ω_0 enthaltene Zahlengruppe. Wenn nun noch die Bedingung

$$\overline{\Omega}_0 = \overline{O}\Omega_0 \tag{4}$$

erfüllt ist, so ist nach dem Satze § 1, V

$$h = (\overline{\Omega}_0, \overline{E}\Omega_0) = (\overline{O}, EO). \tag{5}$$

Die Bedingung (4) besagt, dass in jeder Idealclasse (3) ein Element aus $\overline{O}$ vorkommen muss, und diese Bedingung ist nach einem bekannten Satze der Idealtheorie z. B. dann erfüllt, wenn $\overline{O}$ die Gesammtheit der Ideale in $\overline{O}$ und folglich O die Gesammtheit der Zahlen in Ω bedeutet, *die zu einem gegebenen Ideal* $\mathfrak{a}$ *relativ prim sind**).

Ist O' ein Theiler der Zahlengruppe O, so ist $\overline{E}O'$ Theiler von $\overline{E}O$. Ist $\mathfrak{a}$ irgend ein Ideal in $\overline{O}$, so nennen wir das System $\mathfrak{a}O'$ eine *Idealclasse nach* O', und es ist eine wichtige Aufgabe, die Classenzahl nach O', d. h. die Zahl

*) Unter Zahlen oder Idealen, die zu einem gegebenen Ideal $\mathfrak{a}$ relativ prim sind, verstehe ich solche Zahlen oder Ideale, die, bei ihrer einfachsten Darstellung durch Idealbrüche, weder im Zähler, noch im Nenner mit $\mathfrak{a}$ einen gemeinschaftlichen Theiler haben.

(6) $$h' = (\bar{O}, \bar{E}O')$$

zu bestimmen. Diese Aufgabe lässt sich, wenn h bekannt ist, durch folgende Betrachtungen auf eine einfachere, nämlich auf die Bestimmung von Indices in Zahlengruppen zurückführen.

Nach § 1, I ist

(7) $$(\bar{O}, \bar{E}O') = (\bar{O}, \bar{E}O)(\bar{E}O, \bar{E}O')$$

und nach § 1, II

(8) $$(\bar{E}O, \bar{E}O') = (\bar{E}O, \bar{E}EO') = (O, EO').$$

Ist nun ferner E' der Durchschnitt von E mit O', d. h. die Gruppe der in O' enthaltenen Einheiten, so ist nach § 1, I

(9) $$(O, EO')(EO', O') = (O, O')$$

und nach § 1, II

(10) $$(EO', O') = (EO', E'O') = (E, E').$$

Also nach (8), (9), (10)

$$(\bar{E}O, \bar{E}O')(E, E') = (O, O')$$

und nach (7)

$$(E, E')(\bar{O}, \bar{E}O') = (O, O')(\bar{O}, \bar{E}O)$$

oder endlich

(11) $$(E, E')h' = (O, O')h.$$

Wenn also (O, O') von Null verschieden ist, so ist auch (E, E') von Null verschieden, und es folgt

(12) $$(\bar{O}, \bar{E}O') = \frac{(O, O')}{(E, E')}(\bar{O}, \bar{E}O).$$

§ 4.

Normalordnungen.

Es sei jetzt Ω ein beliebiger algebraischer Zahlkörper, R der Körper der *rationalen Zahlen*, $\mathfrak{o}$ das System der *ganzen Zahlen* in Ω, $\mathfrak{r}$ das System der ganzen Zahlen in R.

1. *Wir nehmen irgend ein ganzes Ideal* $\mathfrak{k}$ *in* Ω *an und betrachten das System* $\mathfrak{o}'$ *aller Zahlen in* $\mathfrak{o}$, *die nach dem Modul* $\mathfrak{k}$ *mit einer rationalen Zahl congruent sind und nennen* $\mathfrak{o}'$ *durch das Ideal* $\mathfrak{k}$ *erzeugt.*

Das Zahlensystem $\mathfrak{o}'$ ist ein Specialfall der Zahlensysteme, die von Dedekind *Ordnungen**) genannt werden.

*) Vorlesungen über Zahlentheorie, 4. Auflage, § 170. „Ueber die Anzahl der Idealclassen in den verschiedenen Ordnungen eines endlichen Körpers", Festschrift zur Säcularfeier von Gauss Geburtstag (1877). „Ueber die Discriminanten endlicher Körper", Abhandlgn. der Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1882.

2. *Es kann vorkommen, dass durch zwei verschiedene Moduln* $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}'$ *dasselbe System* $\mathfrak{o}'$ *erzeugt wird. Wenn dies eintritt, so erzeugt auch der grösste gemeinschaftliche Theiler* $\mathfrak{k}_0$ *von* $\mathfrak{k}$ *und* $\mathfrak{k}'$ *dasselbe System* $\mathfrak{o}'$.

Um dies nachzuweisen, bezeichnen wir für den Augenblick mit $\mathfrak{o}_0$ die durch $\mathfrak{k}_0$ erzeugte Ordnung $\mathfrak{o}'$, so dass zu zeigen ist, dass jede Zahl ω' aus $\mathfrak{o}'$ in $\mathfrak{o}_0$ vorkommt, und dass auch umgekehrt jede Zahl ω_0 aus $\mathfrak{o}_0$ in $\mathfrak{o}'$ enthalten ist.

Bezeichnen wir mit r, r', r_0 ganze rationale Zahlen, so sind die Zahlen ω' durch die Congruenzen

$$\omega' \equiv r \pmod{\mathfrak{k}}, \quad \omega' \equiv r' \pmod{\mathfrak{k}'}$$

charakterisirt, und es muss also $r \equiv r' \equiv r_0 \pmod{\mathfrak{k}_0}$ sein. Es ist also auch

$$\omega' \equiv r_0 \pmod{\mathfrak{k}_0},$$

also ω' in $\mathfrak{o}_0$ enthalten.

Um auch das Umgekehrte nachzuweisen, sei ω_0 eine beliebige Zahl in $\mathfrak{o}_0$. Dann können wir, wenn mit μ irgend eine durch $\mathfrak{k}_0$ theilbare Zahl aus $\mathfrak{o}$ und mit r eine rationale Zahl bezeichnet wird

$$\omega_0 = r + \mu \tag{1}$$

setzen. Wir nehmen nun eine durch $\mathfrak{k}$ theilbare Zahl α und eine durch $\mathfrak{k}'$ theilbare Zahl α' in $\mathfrak{o}$ so an, dass $\mathfrak{k}_0$ der grösste gemeinschaftliche Theiler von α und α' ist, was nach einem bekannten Satze der Idealtheorie immer möglich ist; dann lassen sich, wie gleichfalls aus der Theorie der algebraischen Zahlen bekannt ist, die Zahlen ξ, ξ' in $\mathfrak{o}$ so bestimmen, dass

$$\mu = \alpha\xi + \alpha'\xi' \tag{2}$$

wird*), und daraus folgt dann nach (1)

$$\omega_0 \equiv r + \alpha\xi \pmod{\mathfrak{k}'}. \tag{3}$$

Nun ist $r + \alpha\xi \equiv r \pmod{\mathfrak{k}}$ und daher in $\mathfrak{o}'$ enthalten. Demnach ist nach unserer Voraussetzung $r + \alpha\xi \equiv r' \pmod{\mathfrak{k}'}$ und folglich nach (1) und (3)

$$\omega_0 \equiv r' \pmod{\mathfrak{k}'}$$

also ω_0 in $\mathfrak{o}'$ enthalten, wie bewiesen werden sollte. Daraus schliessen wir:

3. *Unter allen Moduln* $\mathfrak{k}$, *die dieselbe Ordnung* $\mathfrak{o}'$ *erzeugen, giebt es einen bestimmten von kleinster Norm; dieser wird der Führer der Ordnung genannt.*

Die Zahlen von $\mathfrak{o}$ bilden, wenn die *Addition* als Compositionsgesetz und die Null als Gruppeneinheit gilt, eine *Abel'sche Gruppe*. Die Zahlen $\mathfrak{o}$ zerfallen nach dem Modul $\mathfrak{k}$ in Classen, deren Anzahl

*) Lehrbuch der Algebra Bd. II, Seite 524, 3. Seite 543, 4.

gleich der Norm $N(\mathfrak{k})$ von $\mathfrak{k}$ ist, und wenn wir daher unter $\mathfrak{k}$ zugleich den Inbegriff aller durch $\mathfrak{k}$ theilbaren Zahlen in $\mathfrak{o}$ verstehen*), so ist

$$(\mathfrak{o}, \mathfrak{k}) = N(\mathfrak{k}). \tag{4}$$

Andererseits ist nach der Definition 1.

$$(\mathfrak{o}', \mathfrak{k}) = (r, \mathfrak{k}) = Q, \tag{5}$$

wenn Q die kleinste durch $\mathfrak{k}$ theilbare *natürliche Zahl* ist, und folglich ist nach § 1, I.

$$(\mathfrak{o}, \mathfrak{o}') = \frac{(\mathfrak{o}, \mathfrak{k})}{(\mathfrak{o}', \mathfrak{k})} = \frac{N(\mathfrak{k})}{Q}. \tag{6}$$

Diese Formel gilt, mag nun $\mathfrak{k}$ der Führer von $\mathfrak{o}'$ selbst sein, oder ein anderes die Ordnung $\mathfrak{o}'$ erzeugendes Ideal. Sie lässt sich aber verwenden, um den Führer einer Ordnung zu ermitteln. Wenn nämlich $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}_0$ dieselbe Ordnung $\mathfrak{o}'$ erzeugen, so wird $\mathfrak{o}'$ auch von jedem Theiler $\mathfrak{k}'$ von $\mathfrak{k}$, der durch $\mathfrak{k}_0$ theilbar ist, erzeugt. Denn die durch $\mathfrak{k}'$ erzeugte Ordnung ist, da $\mathfrak{k}'$ Theiler von $\mathfrak{k}$ ist, in $\mathfrak{o}'$ enthalten, und enthält $\mathfrak{o}'$, da $\mathfrak{k}_0$ Theiler von $\mathfrak{k}'$ ist.

Verstehen wir nun unter $\mathfrak{p}$ ein in $\mathfrak{k}$ aufgehendes Primideal und unter p die durch $\mathfrak{p}$ theilbare natürliche Primzahl und setzen $\mathfrak{k} = \mathfrak{p}\mathfrak{k}'$, so wird nur dann $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}'$ dieselbe Ordnung $\mathfrak{o}'$ erzeugen, wenn

$$\frac{N(\mathfrak{k})}{Q} = \frac{N(\mathfrak{k}')}{Q'}, \tag{7}$$

wenn Q' die kleinste durch $\mathfrak{k}'$ theilbare natürliche Zahl, also

$$Q = Q' \quad \text{oder} \quad Q = pQ';$$

nun ist $N(\mathfrak{k}) = N(\mathfrak{p})\, N(\mathfrak{k}')$, und wenn $\mathfrak{p}$ vom Grade f ist,

$$N(\mathfrak{p}) = p^f.$$

Also ergiebt sich aus (7)

$$Q = p^f Q',$$

und das ist nur dann möglich, wenn $f = 1$ und $Q = pQ'$ ist. Wir können das Resultat in folgendem Satze zusammenfassen:

> 4. *Das Ideal $\mathfrak{k}$ ist dann und nur dann der Führer der durch $\mathfrak{k}$ erzeugten Ordnung, wenn für jedes in $\mathfrak{k}$ aufgehendes Primideal ersten Grades die durch $\mathfrak{k} : \mathfrak{p}$ theilbare kleinste natürliche Zahl auch durch $\mathfrak{k}$ theilbar ist.*

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so erhält man den Führer der durch $\mathfrak{k}$ erzeugten Ordnung, wenn man, eins nach dem andern, die Primideale ersten Grades weglässt, die der Forderung des Satzes 3. nicht entsprechen**).

Wir wollen jetzt unter $\mathfrak{k}$ den *Führer* der Ordnung $\mathfrak{o}'$ selbst verstehen und noch folgenden Satz beweisen:

---

*) Dies ist nach Dedekind's Definition das Ideal $\mathfrak{k}$.

**) Dedekind, Discriminanten endlicher Körper Seite 28, Anmerkung.

5. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein zu* $\mathfrak{k}$ *theilerfremdes ganzes Ideal des Körpers* Ω, *so existirt in* $\mathfrak{o}'$ *eine durch* $\mathfrak{a}$ *theilbare Zahl* $\omega' = \mathfrak{a}\mathfrak{m}$ *von der Art, dass das Ideal* $\mathfrak{m}$ *relativ prim ist zu einem beliebig gegebenen Ideal* $\mathfrak{b}$ *in* Ω*).

Zum Beweise nehme man eine durch $\mathfrak{a}$ theilbare Zahl

$$\mu = \mathfrak{a}\mathfrak{n} \tag{4}$$

so in $\mathfrak{o}$ an, dass $\mathfrak{n}$ relativ prim zu $\mathfrak{k}$ und zu $\mathfrak{b}$ wird, und ferner eine durch $\mathfrak{k}$ theilbare Zahl α relativ prim zu μ. Dann kann man die Zahl ξ aus $\mathfrak{o}$ durch die Congruenz

$$1 + \xi\alpha \equiv 0 \pmod{\mu}$$

bestimmen**) und daher

$$1 + \xi\alpha = \mu\beta$$

setzen, worin β eine zu α theilerfremde Zahl in $\mathfrak{o}$ ist. Nehmen wir jetzt

$$\omega' = 1 + \xi\alpha + \alpha\mu\eta = \mu(\beta + \alpha\eta), \tag{5}$$

so genügt diese Zahl der Forderung unseres Satzes 3., wenn wir η in $\mathfrak{o}$ so bestimmen, dass jeder Primtheiler von $\mathfrak{b}$ in einer und nur in einer der beiden Zahlen β und η aufgeht. Denn dann ist nach der ersten Darstellung (5) $\omega' \equiv 1 \pmod{\mathfrak{k}}$, also in $\mathfrak{o}'$ enthalten; es ist ferner wegen (4) ω' durch $\mathfrak{a}$ theilbar, und

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{n}(\beta + \alpha\eta)$$

ist relativ prim zu $\mathfrak{b}$.

6. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein zu* $\mathfrak{k}$ *theilerfremdes ganzes Ideal, und* α *eine beliebige Zahl in* $\mathfrak{o}$, *so kann man die Congruenz*

$$\omega \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{a}}$$

durch eine Zahl ω *in* $\mathfrak{o}'$ *befriedigen.*

Man nehme nämlich eine durch $\mathfrak{a}$ theilbare, zu $\mathfrak{k}$ theilerfremde Zahl μ in $\mathfrak{o}$ beliebig an und bestimme ξ aus der Congruenz

$$\omega = \alpha + \mu\xi \equiv 1 \pmod{\mathfrak{k}},$$

dann erfüllt ω die gestellte Forderung.

Die Ordnungen $\mathfrak{o}'$ geben nun Anlass zu Zahlengruppen im Sinne von § 3. Es sei $\mathfrak{o}'$ eine solche Ordnung und $\mathfrak{k}$ ihr Führer. Wir entfernen zunächst aus $\mathfrak{o}$ alle Zahlen, die zu $\mathfrak{k}$ nicht relativ prim sind, und nehmen auch noch die Quotienten aller in $\mathfrak{o}$ übrig bleibenden Zahlen. Der Inbegriff der so entstandenen Zahlen ist nach der Definition von § 3 eine Zahlengruppe, die wir mit O bezeichnen. Ebenso verfahren wir mit $\mathfrak{o}'$, indem wir aus $\mathfrak{o}'$ alle Zahlen, die mit $\mathfrak{k}$ einen gemeinsamen Theiler haben, ausschliessen, und die Quotienten je

*) Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des oben angewandten Satzes (Algebra Bd. II, Seite 524, 3). Vgl. Dedekind, Gauss Festschrift Seite 28.

**) Algebra II, § 149, 1.

zweier der übrigen Zahlen nehmen. Das so entstandene System O' ist gleichfalls eine Gruppe und zwar ein Theiler von O.

O umfasst alle Zahlen ω des Körpers Ω die zu $\mathfrak{k}$ fremd sind in dem Sinne, dass in der einfachsten Darstellung von ω durch einen Idealbruch sowohl Zähler als Nenner relativ prim zu $\mathfrak{k}$ sind. Um den Index (O, O') zu ermitteln, betrachten wir noch die durch die symbolische Congruenz

$$O_0 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{k}}$$

definirte Gruppe, die aus allen nach dem Modul $\mathfrak{k}$ mit 1 congruenten Zahlen ω besteht, und die, da ω mit rationalem zu $\mathfrak{k}$ theilerfremden Nenner dargestellt werden kann, in O' enthalten ist.

Bezeichnen wir nun mit $\psi(\mathfrak{k})$ und $\varphi(\mathfrak{k})$ die Anzahl der Zahlclassen nach dem Modul $\mathfrak{k}$, die in O und in O' enthalten sind, so ist, wenn Q wie oben die kleinste durch $\mathfrak{k}$ theilbare natürliche Zahl, und r die in Q aufgehenden natürlichen Primzahlen bedeuten,

$$\varphi(\mathfrak{k}) = \varphi(Q) = Q\prod\left(1-\frac{1}{r}\right), \tag{6}$$

$$\psi(\mathfrak{k}) = N(\mathfrak{k})\prod\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right), \text{*)}$$

und es ergiebt sich

$$(O, O_0) = \psi(\mathfrak{k}), \quad (O', O_0) = \varphi(\mathfrak{k}),$$

und folglich

$$(O, O') = \frac{\psi(\mathfrak{k})}{\varphi(\mathfrak{k})}. \tag{7}$$

Daraus, dass (O', O_0) einen endlichen Werth hat, lässt sich leicht beweisen, dass jede *ganze Zahl* in O' in der Ordnung $\mathfrak{o}'$ enthalten ist, oder mit anderen Worten, dass, wenn eine Zahl in $\mathfrak{o}'$ durch eine andere theilbar ist, auch der Quotient in $\mathfrak{o}'$ enthalten sein muss.

Jede Zahl ω in O' lässt sich nach der Definition so darstellen:

$$\omega = \frac{\alpha}{\beta}$$

worin α, β zu $\mathfrak{k}$ theilerfremde Zahlen in $\mathfrak{o}'$ sind. Weil nun (O', O_0) endlich ist, so ist eine gewisse Potenz von β mit positivem Exponenten, β^m, in O_0 enthalten, also $\beta^m \equiv 1 \pmod{\mathfrak{k}}$. Hiernach wird

$$\omega = \frac{\alpha\beta^{m-1}}{\beta^m} \equiv \alpha\beta^{m-1} \pmod{\mathfrak{k}},$$

also ist ω nach dem Modul $\mathfrak{k}$ mit einer rationalen Zahl congruent, d. h. in $\mathfrak{o}'$ enthalten.

Auf die gleiche Weise lässt sich der folgende besonders hervorzuhebende Satz beweisen:

7. *Die Gruppe O' ist der Inbegriff aller zu $\mathfrak{k}$ theilerfremden, ganzen oder gebrochenen, Zahlen in Ω, die nach dem Modul k mit einer rationalen Zahl congruent sind.*

*) Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie 4. Aufl., Seite 569.

Denn ist

$$\omega = \frac{\alpha}{\beta} \equiv r \pmod{\mathfrak{k}}$$

theilerfremd zu $\mathfrak{k}$, so kann man die ganzen Zahlen α, β selbst relativ prim zu $\mathfrak{k}$ annehmen. Dann muss eine gewisse Potenz β^m von β in $\mathfrak{o}'$ enthalten, also mit einer rationalen Zahl congruent sein, und es ist dann auch

$$\alpha\beta^{m-1} \equiv \beta^m r \equiv r', \pmod{\mathfrak{k}}.$$

Demnach ist $\omega = \alpha\beta^{m-1} : \beta^m$ als Quotient zweier Zahlen in $\mathfrak{o}'$ in O' enthalten.

Um nach der Formel § 3 (12) die Anzahl der Idealclassen $(\bar{O}, \bar{E}O')$ zu bestimmen, ist es noch nöthig, den Index (E, E') zu ermitteln. Diesen erhält man aber aus den Sätzen des § 2.

Das System E besteht nach dem Satze von Dirichlet aus den in Ω enthaltenen Einheitswurzeln, die durch die Potenzen von einer von ihnen

$$1, \varrho, \varrho^2, \ldots, \varrho^{w-1} \tag{8}$$

erschöpft werden können, und aus einer Potenzgruppe $E_{\nu-1}$ vom Range $\nu - 1$, wenn ν die Anzahl der reellen Körper, vermehrt um die Anzahl der imaginären Paare unter den mit Ω conjugirten Körpern bedeutet. Ein Element von $E_{\nu-1}$ möge in der Form dargestellt sein

$$\varepsilon = \varepsilon_1^{\lambda_1} \varepsilon_2^{\lambda_2} \ldots \varepsilon_{\nu-1}^{\lambda_{\nu-1}}. \tag{9}$$

Daneben betrachten wir noch die Potenzgruppen E_s mit der Basis

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s.$$

Wegen der Endlichkeit von (O, O') giebt es zu jeder Zahl ε in O einen positiven Exponenten λ, so dass ε^λ in O' enthalten ist, und daraus ergiebt sich, dass die Durchschnitte

$$E'_{\nu-1}, E'_{\nu-2} \ldots E_1'$$

von E' mit

$$E_{\nu-1}, E_{\nu-2} \ldots E_1$$

alle von einander verschieden sind. (Denn es giebt immer Zahlen in E_s, die zwar in O', also auch in E', aber nicht in E_{s-1} enthalten sind.)

Bezeichnen wir also mit λ_s den kleinsten positiven Exponenten für den $\varepsilon_s^{\lambda_s}$ in $O'E_{s-1}$ enthalten ist, ferner mit λ_0 den kleinsten positiven Exponenten, für den ϱ^{λ_0} in O' vorkommt, so ergiebt sich nach § 1 und § 2:

$$(E, E') = \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{\nu-1} \text{ *}). \tag{10}$$

*) Nach der von Dedekind in § 4 der Gauss-Festschrift gegebenen Definition ist der Inbegriff aller Zahlen in $\mathfrak{o}'$, die durch irgend ein zu $\mathfrak{k}$ theilerfremdes Functional φ theilbar sind, ein „*Ideal in* $\mathfrak{o}'$". Ich will es hier das durch φ er-

Wir wollen jetzt annehmen, es sei Ω ein *Normalkörper*. Wir bezeichnen seine Galois'sche Gruppe mit Φ und die Substitutionen dieser Gruppe mit φ und wir bedienen uns überhaupt hier der Bezeichnung wie in Bd. II, § 160 der Algebra, so dass $\omega \mid \varphi$ die Zahl bedeutet, die durch die Substitution φ aus der Zahl ω hervorgeht. Es sei $\mathfrak{o}'$ ferner eine der durch 1. definirten Ordnungen. Von dieser Ordnung wollen wir aber ausserdem voraussetzen, dass die Gesammtheit ihrer Zahlen durch die Substitutionen von Φ ungeändert bleibt, oder dass

$$\mathfrak{o}' \mid \varphi = \mathfrak{o}' \tag{11}$$

sei. Eine solche Ordnung können wir eine *Normalordnung* in Ω nennen. Wenn eine Normalordnung durch den Modul $\mathfrak{k}$ erzeugt wird, so wird durch $\mathfrak{k} \mid \varphi$ dieselbe Ordnung erzeugt, und nach 2. wird dann dieselbe Ordnung durch den grössten gemeinschaftlichen Theiler aller $\mathfrak{k} \mid \varphi$ erzeugt. Der Führer einer Normalordnung muss also ein *Normalideal* sein, wenn wir unter *Normalideal ein solches verstehen, was mit allen seinen conjugirten identisch ist*, was also der Bedingung

$$\mathfrak{k} \mid \varphi = \mathfrak{k} \tag{12}$$

genügt.

Umgekehrt erzeugt jedes Normalideal eine Normalordnung und um den Führer einer solchen Ordnung zu ermitteln, haben wir den Satz 4. anzuwenden. Ist n der Grad des Körpers Ω und $\mathfrak{p}$ ein Primfactor ersten Grades der natürlichen Primzahl p, sind ferner $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_e$ die mit $\mathfrak{p}$ conjugirten Primideale (einschliesslich $\mathfrak{p}$), so ist

$$p = (\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_e)^g, \qquad n = eg \text{ *}). \tag{13}$$

Ist nun $\mathfrak{k} = \mathfrak{p}\mathfrak{k}'$, so ist $\mathfrak{k}$ als Normalideal auch durch $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_e$ theilbar, und die kleinste durch $\mathfrak{k}'$ theilbare natürliche Zahl Q' ist

---

zeugte Ideal in $\mathfrak{o}'$ nennen. Werden die Ideale $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ in $\mathfrak{o}'$ durch die Functionale φ und ψ erzeugt, so wird $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ durch $\varphi\psi$ erzeugt.

Zwei Ideale $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ in $\mathfrak{o}'$ heissen *äquivalent*, wenn es eine *Zahl* μ giebt, so dass im Sinne von Dedekind

$$\mathfrak{a}'\mu = \mathfrak{b}'$$

ist, d. h. so dass jedes Product von μ mit einer Zahl in $\mathfrak{a}'$ gleich einer Zahl in $\mathfrak{b}'$ ist. Die Zahl μ ist also darstellbar als Quotient zweier Zahlen in $\mathfrak{o}'$, und ist also, da sie zu $\mathfrak{k}$ theilerfremd ist, eine Zahl in O'. Sind $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ durch die Functionale φ und ψ erzeugt, so ist also $\psi : \varphi$ associirt mit μ, und φ und ψ sind daher äquivalent nach $\bar{E}O'$ (in dem in § 3 festgesetzten Sinne). Wenn umgekehrt φ und ψ nach $\bar{E}O'$ äquivalent sind, so sind auch die durch φ und ψ erzeugten Ideale $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ äquivalent im Sinne von Dedekind, und daraus ergiebt sich, dass die Gruppe

$$\bar{O} \mid \bar{E}O'$$

isomorph ist mit der Gruppe der Idealclassen in $\mathfrak{o}'$.

*) Vgl. Algebra II, § 160.

daher gewiss immer dann durch $\mathfrak{k}$ theilbar, wenn $e > 1$ ist. Ist aber $e = 1$, also $g = n$, $p = \mathfrak{p}^n$, und $\mathfrak{p}^x$ die höchste in $\mathfrak{k}$ aufgehende Potenz von p, so ist Q' nur dann nicht durch $\mathfrak{k}$ theilbar, wenn $x \equiv 1 \pmod{n}$ ist, und wir erhalten also den Satz:

8. *Ist die Primzahl p die n^{te} Potenz eines Primideals $\mathfrak{p}$, so kann der Exponent der höchsten Potenz von $\mathfrak{p}$, die im Führer einer Normalordnung aufgeht, nicht congruent 1 nach dem Modul n sein.*

Oder auch:

9. *Ist $p = \mathfrak{p}^n$, und $\mathfrak{k} = p^\lambda \mathfrak{p} \mathfrak{k}'$ ein Normalideal, in dem λ eine positive ganze Zahl und $\mathfrak{k}'$ nicht mehr durch $\mathfrak{p}$ theilbar ist, so erzeugen $\mathfrak{k}$ und $p^\lambda \mathfrak{k}'$ dieselbe Normalordnung $\mathfrak{o}'$.*

Wenn in der Gruppe O' Zahlen mit negativer Norm vorkommen, so bilden die Zahlen mit positiver Norm einen Theiler O'_+ von O', dessen Index

$$(O', O'_+) = 2$$

ist. Bezeichnen wir mit E'_+ das System der in O' enthaltenen Einheiten mit positiver Norm, so ist $(E', E'_+) = 2$ oder $= 1$, je nachdem es in E' Einheiten mit negativer Norm giebt oder nicht giebt.

Wenden wir dann die Classenzahlformel § 3 (12) auf O'_+ an, so ergiebt sich

$$(\bar{O}, \bar{E} O'_+) = (\bar{O}, \bar{E} O') \quad \text{im Falle} \quad (E', E'_+) = 2$$

und

$$(\bar{O}, \bar{E} O'_+) = 2(\bar{O}, \bar{E} O') \quad \text{im Falle} \quad (E', E'_+) = 1.$$

Hierzu wollen wir noch bemerken, dass in dem Falle, wo Ω überhaupt nur Zahlen mit positiver Norm enthält, O'_+ mit O' übereinstimmt. Wenn aber in Ω auch Zahlen mit negativer Norm vorkommen, so giebt es auch in O' Zahlen mit negativer Norm; denn wenn α eine Zahl in Ω mit negativer Norm und x eine durch $\mathfrak{k}$ theilbare ganze rationale Zahl ist, so ist $1 + \alpha x$ in O' enthalten und die Zahl x lässt sich so gross annehmen, dass

$$N(1 + \alpha x) = N(\alpha)\, x^n + \cdots$$

im Vorzeichen mit $N(\alpha)$ übereinstimmt.

Dagegen kann es wohl vorkommen, dass es zwar in O, aber nicht in O' *Einheiten mit negativer Norm* giebt.

10. *In der Gruppe O'_+ giebt es eine durch ein beliebiges zu $\mathfrak{k}$ theilerfremdes Ideal $\mathfrak{a}$ theilbare ganze Zahl $\alpha = \mathfrak{a}\mathfrak{m}$, so dass das Ideal $\mathfrak{m}$ theilerfremd zu einem beliebigen Ideal $\mathfrak{b}$ ist.*

Denn nach dem Satz 5. giebt es zunächst eine solche Zahl in $\mathfrak{o}'$ und folglich auch in O'. Nun kann man aber die ganze rationale

hl x durch $\mathfrak{a}$ und durch $\mathfrak{b}$ theilbar und zugleich so gross anhmen, dass $N(\alpha + x)$ positiv wird, und dann genügt die Zahl $+ x$ dem Satze 10.

§ 5.

Ordnungen im quadratischen Körper.

In einem quadratischen Körper Ω ist eine natürliche Primzahl tweder selbst noch Primzahl, oder sie zerfällt in zwei Primfactoren ıten Grades, und daraus ergiebt sich nach § 4, 4. und 8., dass jeder Führer ıer Ordnung $\mathfrak{o}'$ eine *rationale Zahl* sein muss, und dass jede natürliche hl auch Führer einer Ordnung sein kann. Da ferner der quadratische ›rper ein Normalkörper ist, so ist auch $\mathfrak{o}'$ eine *Normalordnung**).

Was uns hier noch interessirt, ist die Beziehung der Classen ch einer Gruppe O' (§ 3). Zu den Classen *der Irrationalzahlen eiten Grades* (Algebra Bd. I, § 122 f.) und zu den Gauss'schen assen der *quadratischen Formen.*

Bedeutet d eine feste positive oder negative ganze rationale Zahl ne *quadratischen Theiler*, so haben alle Zahlen eines quadratischen ›rpers Ω die Form

$$\omega = x + y\sqrt{d},$$

nn x und y *rationale Zahlen* sind. Die *ganzen Zahlen* des Körpers Ω ıd immer in der Form enthalten

$$\omega = \frac{x + y\sqrt{d}}{2},$$

›rin x und y *ganze rationale Zahlen* sind.

Wir nehmen nun eine beliebige natürliche Zahl Q als Führer ıer Ordnung $\mathfrak{o}'$ an, und suchen die Bedingung dafür, dass eine Zahl n der Form (2) mit einer rationalen Zahl nach Q congruent ist. tzen wir

$$\omega' = \frac{x - y\sqrt{d}}{2},$$

muss auch ω' derselben rationalen Zahl congruent sein, und folglich ıss $\omega - \omega' = y\sqrt{d}$ durch Q theilbar sein. Dies ist aber, da d inen quadratischen Theiler hat, nur dann möglich, wenn y durch Q eilbar ist. Demnach sind alle Zahlen von $\mathfrak{o}'$ in der Form

$$\omega = \frac{x + yQ\sqrt{d}}{2}$$

thalten, worin x, y ganze rationale Zahlen sind. Es ist aber ausser-

*) Die Ordnungen im quadratischen Körper sind eingehend untersucht in §7 der 4. Aufl. von Dirichlet-Dedekind, Zahlentheorie.

dem noch nöthig, dass ω selbst eine ganze Zahl sei, wofür die nothwendige und hinreichende Bedingung die ist, dass

$$\omega + \omega' = x, \qquad \omega\omega' = \frac{x^2 - y^2 Q^2 d}{4}$$

ganze rationale Zahlen sind. Hieraus ergeben sich folgende Bedingungen in drei Fällen:

$$\begin{array}{lll} & Q^2 d \equiv 0 \pmod 4, & x \equiv 0 \pmod 2, \\ (4) & Q^2 d \equiv 1 \pmod 4, & x \equiv y \pmod 2, \\ & Q^2 d \equiv 2, 3 \pmod 4, & x \equiv y \equiv 0 \pmod 2. \end{array}$$

Diese Bedingungen sind zunächst nur nothwendig und hinreichend dafür, dass ω eine ganze Zahl sei. In den beiden letzten Fällen (4) ist Q ungerade, und es folgt $2\omega \equiv x \pmod Q$, woraus hervorgeht, dass ω auch zu $\mathfrak{o}'$ gehört. Im ersten Falle (4) aber ist Q gerade und, wenn wir daher $x = 2x_1$, $Q = 2Q_1$ setzen, so folgt nur $\omega \equiv x_1 \pmod{Q_1}$. Soll also ω zu $\mathfrak{o}'$ gehören, so muss es nach dem Modul Q mit einer rationalen Zahl von der Form $x_1 + Q_1 s$ congruent sein, d. h. es muss $y\sqrt{d}$ nach dem Modul 2 mit einer rationalen Zahl congruent sein. Ist nun $d \equiv 2, 3 \pmod 4$, so ist dies nur dann möglich, wenn y gerade ist. Ist aber $d \equiv 1 \pmod 4$, so ist $y\sqrt{d} \equiv y \pmod 2$ und y kann beliebig sein. Wir haben demnach vier Fälle zu unterscheiden, in denen wir als nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die durch (3) dargestellte Zahl ω zu $\mathfrak{o}'$ gehört, folgende erhalten:

$$\begin{array}{llll} & 1. & Q^2 d \equiv 0, \quad d \equiv 1 \pmod 4, & x \equiv 0 \pmod 2, \\ & 2. & Q^2 d \equiv 0, \quad d \equiv 2, 3 \pmod 4, & x \equiv 0, \quad y \equiv 0 \pmod 2, \\ (5) & 3. & Q^2 d \equiv 1 \pmod 4, & x \equiv y \pmod 2, \\ & 4. & Q^2 d \equiv 2, 3 \pmod 4, & x \equiv 0, \quad y \equiv 0 \pmod 2. \end{array}$$

Die Körperdiscriminante Δ ist in den Fällen 1., 3. $= d$, in den Fällen 2., 4 $= 4d$, und wenn wir daher $Q^2\Delta = D$ die *Discriminante der Ordnung* $\mathfrak{o}'$ nennen, so erhalten wir folgende Zusammenstellung:

$$\begin{array}{lll} & 1. \quad Q^2 d \equiv 0, \quad d \equiv 1 & \text{oder} \quad Q^2 d \equiv 1 \pmod 4, \\ & & D = Q^2 d, \quad \Theta = \frac{Q + \sqrt{D}}{2}, \\ (6) & 2. \quad Q^2 d \equiv 0, \quad d \equiv 2, 3 & \text{oder} \quad Q^2 d \equiv 2, 3 \pmod 4, \\ & & D = 4Q^2 d, \quad \Theta = \frac{1}{2}\sqrt{D}. \end{array}$$

Zur Bestimmung des Vorzeichens mag festgesetzt sein, dass $\sqrt{D}$ bei positivem D positiv, bei negativem D gleich i, multiplicirt mit einer positiven Zahl (positiv imaginär) sein soll, so dass Θ für die Ordnung $\mathfrak{o}'$ *eindeutig* bestimmt ist.

Es ist dann die hierdurch eingeführte Zahl Θ eine durch Q theilbare ganze Zahl, und es ergiebt sich:

1. *Durch*

(7) $$\omega = x + y\Theta$$

werden alle und nur Zahlen der Ordnung $\mathfrak{o}'$ *dargestellt, wenn* x, y *ganze rationale Zahlen sind. Die Zahlen* $1, \Theta$ *bilden eine Basis von* $\mathfrak{o}'$.

2. *Aus dem Ausdruck* $\omega = x + y\Theta$ *erhält man alle Zahlen der Gruppe* O', *wenn man für* x, y *auch gebrochene rationale Zahlen setzt, von denen* x *im Zähler und Nenner,* y *im Nenner relativ prim zu* Q *ist.*

Ist der Körper Ω imaginär, so ist O' zugleich die Gruppe O'_+, während bei einem reellen Körper O' noch in zwei Nebengruppen O'_+ und O'_- zerfällt.

Es sei jetzt $\mathfrak{a}$ ein beliebiges *zu* Q *theilerfremdes Ideal* in Ω. Wir bestimmen ein dies Ideal repräsentirendes Functional in $\mathfrak{o}'$. Zu dem Ende bezeichne ich mit

8) $$\alpha_1 = a_{1,1} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$$

die kleinste durch $\mathfrak{a}$ theilbare natürliche Zahl, und mit $a_{2,2}$ die kleinste natürliche Zahl, für die $a_{2,2}\Theta$ mit einer rationalen Zahl $-a_{1,2}$ congruent wird, und setze

9) $$\alpha_2 = a_{1,2} + a_{2,2}\Theta \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}.$$

Jede durch $\mathfrak{a}$ theilbare ganze rationale Zahl ist dann durch $a_{1,1}$ theilbar, und wenn

10) $$\omega = x + y\Theta$$

eine durch $\mathfrak{a}$ theilbare Zahl in $\mathfrak{o}'$ ist, so muss y durch $a_{2,2}$ theilbar sein. Demnach ist auch $a_{1,1}$ durch $a_{2,2}$ theilbar. Hieraus aber ergiebt sich:

3. *Jede durch* $\mathfrak{a}$ *theilbare Zahl* α *in* $\mathfrak{o}'$ *lässt sich in der Form*

(10) $$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2$$

darstellen, worin x_1, x_2 *ganze rationale Zahlen sind.*

Hieraus ergiebt sich nach § 4, 5., dass $\mathfrak{a}$ der grösste gemeinschaftliche Theiler von α_1 und α_2 ist, und dass also

$$\varphi = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2$$

ein das Ideal $\mathfrak{a}$ repräsentirendes Functional ist.

4. *Wir nennen* φ *eine* Basisform *von* $\mathfrak{a}$ *in* $\mathfrak{o}'$, *und verstehen darunter also eine Linearform, aus der sich alle durch* $\mathfrak{a}$ *theilbaren Zahlen in* $\mathfrak{o}'$ *und nur diese ergeben, wenn für die Variablen ganze rationale Zahlen gesetzt werden**).

*) Algebra Bd. II, § 166.

Wenn wir x und y volle Restsysteme nach den Moduln $a_{1,1}, a_{2,2}$ durchlaufen lassen, so erhalten wir aus (10) lauter nach dem Modul $\mathfrak{a}$ incongruente Zahlen, und nach § 4, 6. erhält man also auf diese Weise ein volles Repräsentantensystem von Zahlen in $\mathfrak{o}'$ nach dem Modul $\mathfrak{a}$. Daraus ergiebt sich

$$N(\mathfrak{a}) = a_{1,1}\, a_{2,2}, \tag{11}$$

woraus noch folgt, dass $a_{1,1}$ und $a_{2,2}$ relativ prim zu Q sind.

Die Discriminante des Zahlensystems α_1, α_2 ist

$$(\alpha_1 \alpha_2' - \alpha_2 \alpha_1')^2 = a_{11}^2 a_{22}^2 D.$$

Sind nun

$$\beta_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \qquad \beta_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

zwei durch $\mathfrak{a}$ theilbare Zahlen in $\mathfrak{o}'$, so ist deren Discriminante gleich

$$a_{1,1}^2 a_{2,2}^2 D(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2,$$

und daraus ergiebt sich der Satz (vgl. Algebra Bd. II, § 147, 2.):

5. *Sind β_1, β_2 zwei durch $\mathfrak{a}$ theilbare Zahlen in $\mathfrak{o}'$, deren Discriminante gleich dem Product*

$$D N(\mathfrak{a})^2$$

ist, so ist $\beta_1 t_1 + \beta_2 t_2$ eine Basisform von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{o}'$.

Bildet man die Norm von φ, so folgt aus (11), dass $2a_{1,2}$ durch $a_{2,2}$ theilbar ist, und wenn wir noch zur Abkürzung

$$N(\alpha_2) = -a a_{1,1} a_{2,2}, \tag{12}$$

$$a_{2,2} = e, \qquad a_{1,1} = ec, \qquad 2a_{12} = e(b - \Theta - \Theta') \tag{13}$$

und

$$\omega = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{a_{2,2} + a_{1,2}\Theta}{a_{11}}, \tag{14}$$

$$\varphi = ec(t_1 + \omega t_2) \tag{15}$$

setzen, so erhalten wir

$$\omega = \frac{b + \Theta - \Theta'}{2c} = \frac{b + \sqrt{D}}{2c}. \tag{16}$$

Die Zahl ω genügt wegen (12) und (13) der quadratischen Gleichung

$$c\omega^2 = a + b\omega \tag{17}$$

und folglich ist, was sich leicht durch Rechnung aus den Formeln (13) bestätigen lässt

$$D = b^2 + 4ac. \tag{18}$$

Nach (16) ist ω eine bestimmte der beiden Wurzeln der Gleichung (17). Die Zahl c ist als die *kleinste natürliche Zahl bestimmt, die $c\omega$ zu einer ganzen Zahl macht.* Denn nach (16) müssen, wenn c_1 diese kleinste Zahl ist

$$c_1(\omega + \omega') = \frac{bc_1}{c}, \qquad c_1(\omega - \omega') = \frac{\sqrt{D}c_1}{c}$$

ganze Zahlen sein; und da c relativ prim zu Q ist, so muss c_1 durch c theilbar und also $= c$ sein.

Die Zahl ω ist nach der Algebra I, § 122 angewandten Ausdrucksweise eine *quadratische Irrationalzahl mit der Discriminante D*. Sie ist durch das Ideal $\mathfrak{a}$ vollkommen bestimmt bis auf eine willkürlich bleibende additive ganze rationale Zahl. Nennen wir also ein System von Zahlen, die sich durch additive willkürliche ganze rationale Zahlen von einander unterscheiden, eine Schaar, so können wir den Satz aussprechen:

6. *Zu einer Ordnung $\mathfrak{o}'$ des quadratischen Körpers Ω mit dem Führer Q und der Discriminante D und zu jedem zu Q theilerfremden Ideal $\mathfrak{a}$ in Ω lässt sich eine und nur eine Schaar von quadratischen Irrationalzahlen zweiten Grades mit der Discriminante D bestimmen. Ist ω eine Zahl dieser Schaar, c die kleinste natürliche Zahl, die $c\omega$ ganz macht, und ec die kleinste durch $\mathfrak{a}$ theilbare natürliche Zahl, so ist*

$$\varphi = ec(t_1 + \omega t_2) \tag{19}$$

eine Basisform in $\mathfrak{o}'$ des Ideals $\mathfrak{a}$.

Hier ist unter den beiden Wurzeln der Gleichung (17) für ω die zu wählen, bei der das Zeichen von $\sqrt{D}$ so wie in (6) bestimmt ist. Es ist aber zu bemerken, dass

$$\varphi_2' = ec(t_1 - \omega t_2)$$

gleichfalls eine Basisform von $\mathfrak{a}$ ist. Man erhält also Basisformen des mit $\mathfrak{a}$ conjugirten Ideals $\mathfrak{a}'$ in der Form $\varphi = ec(t_1 \pm \omega' t_2)$, wenn ω' die zweite Wurzel der Gleichung (17) ist.

Von der Zahl e ist die Zahl ω nicht abhängig, und wenn wir also das System der Formen φ, die sich nur durch die verschiedenen Werthe von e unterscheiden, eine Formenschaar, und die dadurch repräsentirten Ideale eine Idealschaar nennen, so führen alle Ideale einer Schaar zu derselben Zahl ω. Der Quotient zweier Ideale einer Schaar ist mit einer *rationalen* Zahl äquivalent, und folglich sind die Ideale einer Schaar äquivalent nach O', und sogar nach O'_+.

Es gilt nun auch der umgekehrte Satz:

7. *Ist ω eine zur Discriminante D gehörige quadratische Irrationalzahl und c die kleinste natürliche Zahl, für die $c\omega$ ganz wird, und c relativ prim zu Q, ferner e eine beliebige zu Q theilerfremde natürliche Zahl, so ist*

$$\varphi = ec(t_1 \pm \omega t_2)$$

Basisform in $\mathfrak{o}'$ eines zu Q theilerfremden Ideals $\mathfrak{a}$.

Damit ω eine zur Discriminante D gehörige quadratische Irrationalzahl sei ist nothwendig und hinreichend, dass es die Wurzel einer quadratischen Gleichung

(20) $$c\omega^2 = a + b\omega, \qquad b^2 + 4ac = D$$

sei, in der a, b, c ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler sind. Wir nehmen c positiv und relativ prim zu Q an; dann ist c die kleinste natürliche Zahl, für die $c\omega$ ganz wird. Es ist dann

$$\omega = \frac{b \pm \sqrt{D}}{2c}$$

und $\Theta \mp c\omega$ ist eine ganze rationale Zahl. Bezeichnen wir nun das durch das Functional

(21) $$\varphi = ec(t_1 \pm \omega t_2)$$

repräsentirte Ideal mit $\mathfrak{a}$, so ergiebt sich hieraus leicht dass e die kleinste natürliche Zahl ist, für die $e\Theta$ nach dem Modul $\mathfrak{a}$ mit einer rationalen Zahl congruent ist, und ec die kleinste durch $\mathfrak{a}$ theilbare natürliche Zahl, und dies besagt, (nach (8) und (9)), dass (21) eine Basisform von $\mathfrak{a}$ ist.

8) *Wenn wir daher die durch* (20) *definirten, zur Discriminante D gehörigen quadratischen Irrationalzahlen, in denen c relativ prim zu Q ist, in Doppelschaaren eintheilen*

$$\pm\omega + \mathfrak{r}$$

worin $\mathfrak{r}$ *das System der ganzen rationalen Zahlen bedeutet, so entspricht jeder solchen Doppelschaar nach den Sätzen* 6., 7. *eine Schaar zu Q theilerfremder Ideale in* Ω, *und umgekehrt auch jeder solchen Idealschaar eine Doppelschaar von Irrationalzahlen.*

Wir nehmen zwei von den in 8. charakterisirten Irrationalzahlen ω, ω_1 und bilden die ihnen entsprechenden Basisformen

(22) $$\varphi = c\,(t_1 + \omega\, t_2),$$
$$\varphi_1 = c_1(t_1 + \omega_1 t_2).$$

Die Zahlen ω_1, ω heissen äquivalent, wenn es ganze rationale Zahlen p, q, r, s giebt, so dass

(23) $$\omega_1 = \frac{p\omega + q}{r\omega + s}, \qquad ps - qr = \pm 1.$$

Ich will sie *ganz äquivalent* nennen, wenn $N(r\omega + s)$ positiv, also

(24) $$0 < cN(r\omega + s) = -ar^2 + brs + cs^2 = c_1,$$

positiv ist. Aus der Zusammensetzung der linearen Substitutionen ergiebt sich dann leicht, dass, wenn zwei Zahlen ω_1 und ω_2 mit einer dritten *ganz äquivalent sind*, ω_1 *und* ω_2 *auch unter einander ganz äquivalent sind.* Ist $N(r\omega + s)$ negativ, so mögen ω und ω_2 halb äquivalent heissen. Wir beweisen den Satz:

9. *Wenn ω, ω_1 äquivalent sind, so sind φ und φ_1 äquivalent nach O' und wenn ω, ω_1 ganz äquivalent sind, so sind φ und φ_1 äquivalent nach O'_+.*

Machen wir nämlich die Substitution (23) in (22), so ergiebt sich

$$(r\omega+s)\varphi_1 = c_1(u_1+u_2\omega),$$

wenn

$$u_1 = st_1 + qt_2, \quad u_2 = rt_2 + pt_2$$

gesetzt ist. Da die Determinante dieser Substitutionen $= \pm 1$ ist, so ist $c(u_1+u_2\omega)$ mit φ associirt*) und folglich ist $\varphi:\varphi_1$ mit $c(r\omega+s):c_1$ associirt. Damit ist der Beweis des Satzes 9 geführt.

Wir beweisen nun noch die Umkehrung dieses Satzes; und nehmen zu diesem Zweck an, die beiden Functionale φ, φ_1 in (22) seien äquivalent (nach O' oder O'_+).

Wir nehmen ein Functional

$$\psi = c'(t_1+t_2\eta) \tag{25}$$

in der Classe, die zu der Classe von φ reciprok ist, und es soll darin c', η dieselbe Bedeutung für ψ haben, wie c und ω für φ, so dass also c' positiv und relativ prim zu Q ist. Dann giebt es eine *ganze Zahl* ξ in O' oder in O'_+ und eine Functionaleinheit ε, so dass

$$\psi\varphi = \varepsilon\xi \tag{26}$$

und c und c' sind die absoluten Normen von φ und ψ, d. h. die Normen der durch φ und ψ repräsentirten Ideale. Setzen wir

$$N(\psi) = \psi\psi' = \varepsilon_1 c',$$

so ist ε_1 eine Einheitsform, und aus (26) folgt durch Multiplication mit ψ'

$$\frac{c'\varphi}{\xi} = \varepsilon_2\psi',$$

worin ε_2 eine Einheit ist. Setzen wir daher

$$\frac{c'\varphi}{\xi} = \frac{cc'(t_1+\omega t_2)}{\xi} = \chi,$$

so ist χ ein mit ψ' associirtes ganzes Functional, und daraus folgt, dass

$$\beta_1 = \frac{cc'}{\xi}, \quad \beta_2 = \frac{cc'\omega}{\xi}$$

ganze durch ψ' theilbare Zahlen in $\mathfrak{o}'$ sind. Da die absolute Norm von $\xi = cc'$ ist, so ist die Discriminante dieses Zahlensystems

$$\Delta(\beta_1, \beta_2) = c'^2 D$$

und daher ist nach dem Satz 5

$$\beta_1 t_1 + \beta_2 t_2$$

eine Basisform von ψ'. Da nun andererseits $c'(t_1+\eta' t_2)$ gleichfalls

*) Algebra, Bd. II, § 147.

eine Basisform von ψ' ist, so folgt die Existenz einer linearen Substitution $\begin{pmatrix} p, & q \\ r, & s \end{pmatrix}$ mit der Determinante ± 1, so dass

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{cc'}{\xi} = c'(r\eta' + s), \\ \beta_2 &= \frac{cc'\omega}{\xi} = c'(p\eta' + q) \end{aligned} \tag{27}$$

und bei der Aequivalenz nach O'_+ ist $N(\xi)$ und damit $N(r\eta' + s)$ positiv. Aus (27) aber folgt

$$\omega = \frac{r\eta' + q}{r\eta' + s} \tag{28}$$

d. h. ω ist mit η' äquivalent und zwar, bei der Aequivalenz nach O'_+, ganz äquivalent.

Lassen wir nun φ_1 an Stelle des äquivalenten Functionales φ treten, so kann ψ und daher auch ψ' ungeändert bleiben, und es folgt, dass auch ω_1 mit η' und folglich auch ω mit ω_1 äquivalent ist, und zwar (bei der Aequivalenz nach O'_+) ganz äquivalent.

Da nun zwei in derselben Doppelschaar vorkommende Zahlen ω ganz äquivalent, und zwei in derselben Schaar vorkommende Ideale äquivalent nach O'_+ sind, so ergiebt sich

> 10. *Die Classen der zu Q theilerfremden Ideale in* Ω *nach* O'_+ *und die Classen der ganz äquivalenten zur Discriminante D gehörigen Irrationalzahlen zweiten Grades lassen sich gegenseitig eindeutig einander so zuordnen, dass die Beziehung zwischen je einem Repräsentanten einer Classe der einen und der anderen Art durch die Formel* (15) *gegeben ist. Die Anzahlen beider Arten von Classen stimmen überein.*

Hierzu ist noch zu bemerken, dass bei negativer Discriminante die Normen aller Zahlen positiv sind, dass daher O'_+ von O' nicht verschieden ist, und dass ebenso die ganze Aequivalenz mit der Aequivalenz überhaupt zusammenfällt.

Bei positiver Discriminante giebt es immer Zahlen mit negativer Norm und es sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1) Wenn die Gliederzahl einer Periode der Kettenbruch-Entwickelung von ω ungerade ist, wenn also die Pell'sche Gleichung $T^2 - DU^2 = -4$ lösbar ist, so giebt es auch Einheiten mit negativer Norm. Daher ist zwar O'_+ von O' verschieden, aber die Aequivalenz von O'_+ ist mit der Aequivalenz nach O' identisch. Ebenso ist auch bei den Zahlen ω die ganze Aequivalenz mit der Aequivalenz schlechtweg gleichbedeutend, und die Anzahl der Idealclassen nach O' oder nach O'_+ ist gleich der Anzahl der verschiedenen zu der Discriminante D gehörigen Kettenbruchperioden.

2) Ist aber die Gliederzahl der Kettenbruchperiode gerade, so haben alle Einheiten positive Norm. Die Zahlen einer Kettenbruchperiode zerfallen bei der ganzen Aequivalenz in zwei Classen und die Aequivalenz nach O'_+ ist von der Aequivalenz nach O' verschieden. Die Anzahl der Idealclassen nach O' ist also gleich der Anzahl der Kettenbruchperioden, und die Anzahl der Idealclassen nach O'_+ ist doppelt so gross.

Diese Betrachtungen geben nun auch Aufschluss über die Beziehung der Zahl der Idealclassen zu der Classenzahl quadratischer Formen von gegebener Determinante nach Gauss.

Jeder zur Discriminante D gehörigen Irrationalzahl ω entsprechen nach der Gauss'schen Bezeichnung zwei primitive quadratische Formen der Determinante D,

$$\pm\psi = \pm(A, B, C)$$

so dass ω eine Wurzel von $\psi = 0$ ist.

Zwei conjugirte Zahlen ω, ω' entsprechen denselben Formen $\pm\psi$. Sonst aber gehören zu verschiedenen Zahlen ω auch verschiedene Formen ψ. Aequivalenten Zahlen ω entsprechen eigentlich oder uneigentlich äquivalente Formen ψ.

Da nun zwei Zahlen ω, $-\omega$ uneigentlich und zugleich ganz äquivalent sind, so können wir in jeder Classe der Zahlen ω einen Repräsentanten auswählen, in dem der irrationale Theil ein bestimmtes Vorzeichen hat, so dass von zwei conjugirten Zahlen nur die eine zur Verwendung kommt. Es ergiebt sich nun für die drei Fälle Folgendes.

1. Wenn die Discriminante negativ ist, so sind zwei Formen $+\psi$, $-\psi$ nicht äquivalent. Wir beschränken uns auf die Formen mit positiven äusseren Coefficienten. Zwei Zahlen ω mit positivem imaginärem Bestandtheil können niemals uneigentlich äquivalent sein, und wenn wir uns also auf Zahlen ω mit positivem imaginärem Bestandtheil beschränken, so entsprechen sich die Zahlen ω und die Form ψ gegenseitig eindeutig. Aequivalente Zahlen ω entsprechen eigentlich äquivalenten Formen ψ und umgekehrt. Es ist also die Anzahl der Classen positiver Formen gleich der Anzahl der Classen der Form ω.

2. Wenn die Discriminante positiv ist und die Periode der Kettenbruchentwickelung von ω aus einer ungeraden Gliederzahl besteht, so ist die Form (A, B, C) mit $(-A, B, -C)$ eigentlich äquivalent, und da $(-A, B, -C)$ mit $(-A, -B, -C)$ uneigentlich äquivalent ist, so ist in diesem Fall ψ mit $-\psi$ uneigentlich äquivalent. Ist daher $C = \omega, \omega_1, , . .$ eine Classe äquivalenter quadratischer Irrationalzahlen, so erhalten wir entsprechend ein System von Formen $F = \pm\psi, \pm\psi_1, \ldots$

die mit einander eigentlich oder uneigentlich äquivalent sind; und die also eine oder zwei Gauss'sche Classen vertreten, je nachdem ψ zu einer Anceps-Classe gehört oder nicht. Die zu C conjugirte Classe C' ergiebt nun dasselbe System S; und da die Formen der Anceps-Classe dadurch charakterisirt sind, dass bei ihnen ω und ω' uneigentlich äquivalent sind, so folgt, dass C' mit C identisch ist, oder nicht, je nachdem F eine oder zwei Gauss'sche Classen umfasst. Es stimmt also auch hier die Anzahl der Gauss'schen Classen mit der Anzahl der Classen C überein. Einer Anceps-Classe entspricht eine Classe C, und einem Paar entgegengesetzter Formenclassen ψ, ψ' ein Paar conjugirter Classen, C, C'. Es ist jedoch hierdurch trotz der Uebereinstimmung der Anzahl, keine *eindeutige* Zuordnung der Formenclassen zu den Zahlenclassen (oder Idealclassen) gegeben.

3. Der dritte Fall unterscheidet sich von dem zweiten dadurch, dass ψ und $-\psi$ *nicht äquivalent* sind. Daher entsprechen jedem conjugirten Classenpaar C, C' vier Gauss'sche Formenclassen, oder, wenn C mit C' identisch ist, zwei Anceps-Classen. Die Gauss'sche Classenzahl stimmt mit der Anzahl der Classen der Ganz-Aequivalenz überein. Wir erhalten daher das Ergebniss.

Die Gauss'sche Classenzahl primitiver quadratischer Formen stimmt in allen Fällen überein mit der Anzahl der Idealclassen in der Ordnung o' bei der Aequivalenz nach O'_+.

Dabei ist noch zu bemerken, dass die eigentlich primitiven Formen (Formen erster Art) dann auftreten, wenn b gerade, also $D \equiv 0 \pmod 4$ und die Gauss'sche Determinante $\frac{1}{4}D$ ist, die uneigentlich primitiven Formen oder Formen zweiter Art, wenn b ungerade, also $D \equiv 1 \pmod 4$, und D selbst die Gauss'sche Determinante ist.

Um eine eindeutige Zuordnung der Idealclassen zu den Formenclassen zu erhalten, schlagen wir folgenden Weg ein.

Wir betrachten die Ideale $\mathfrak{a}$, die relativ prim zu Q sind, und wollen auch (zur Vereinfachung) annehmen, dass $\mathfrak{a}$ keinen rationalen Factor hat, dass also die oben mit e bezeichnete Zahl $= 1$ sei; dies ist genügend, da durch Wegnahme eines rationalen Factors die Classeneintheilung, auch bei der Aequivalenz nach O'_+, nicht geändert wird. Dann ist c die kleinste durch $\mathfrak{a}$ theilbare natürliche Zahl, und die rationale Zahl b wird durch die Bedingung, dass $\frac{1}{2}(b + \sqrt{D})$ eine durch $\mathfrak{a}$ theilbare ganze Zahl sein soll, nach den Modul $2c$ bestimmt. Hierbei ist $\sqrt{D}$ in der früher festgesetzten Weise bestimmt. Es ergiebt sich dann eine Irrationalzahl

$$\omega = \frac{b + \sqrt{D}}{2c}$$

die die Wurzel einer Form

$$\psi = (c, -b, -a)$$

ist, in der der erste Coefficient c *positiv* ist.

Hierdurch ist eine bestimmte Form ψ (genauer eine Schaar paralleler Formen) dem Ideal $\mathfrak{a}$ eindeutig zugeordnet.

Wir nehmen nun ein volles Repräsentantensystem der Idealclasse nach O'_+

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_h$$

und wollen noch, zur Vereinfachung des Folgenden, annehmen, was gestattet ist, dass von den Zahlen

$$c_1, c_2, \ldots, c_h$$

keine zwei einen gemeinschaftlichen Theiler haben. Daraus leiten wir ein volles Repräsentantensystem von Zahlen ω her

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h$$

von denen keine zwei äquivalent sind. Diese Zahlen sind Wurzeln der Formen

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_h,$$

und diese Formen sind inäquivalent nach der Gauss'schen Definition. Denn zwei dieser Formen ψ_1, ψ_2 könnten nur dann äquivalent sein, wenn die entsprechenden Zahlen ω_1, ω_2 halbäquivalent wären, was im Falle 3 möglich ist. Ist aber ω_1 mit ω_2 halbäquivalent, so kann die Aequivalenz nur eine uneigentliche sein (wegen des Vorzeichens von c_1, c_2 und $\sqrt{D}$) und es ist ψ_1 mit $-\psi_2$ uneigentlich äquivalent. Wären also ψ_1 und ψ_2 eigentlich äquivalent, so wäre ψ_2 mit $-\psi_2$ uneigentlich äquivalent, und daraus könnte man eine Lösung der Pell'schen Gleichung $T^2 - Du^2 = -4$ ableiten*), die im Falle 3 nicht existirt.

Setzen wir

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2,$$

so ist nach unserer Voraussetzung, dass c_1, c_2 ohne gemeinsamen Theiler sind

$$c = c_1 c_2$$

die kleinste durch $\mathfrak{a}$ theilbare natürliche Zahl, und wenn wir b aus den Congruenzen

$$b \equiv b_1 \pmod{2c_1}, \quad b \equiv b_2 \pmod{2c_2}$$

bestimmen, so ist

$$\omega = \frac{b + \sqrt{D}}{2c}$$

eine durch $\mathfrak{a}$ theilbare ganze Zahl. Die Form ψ, deren Wurzel ω ist,

*) Ebenso wie bei Dirichlet-Dedekind, Zahlentheorie 4. Aufl. § 62.

ist dann aus den *beiden* Formen ψ_1, ψ_2 *componirt* und *die Composition der Formen und Formenclassen entspricht daher der Multiplication der Ideale und der Composition der Idealclassen.*

§ 6.

Genera in den Ordnungen.

Wir kehren nun wieder zu allgemeineren Betrachtungen zurück, indem wir unter Ω einen beliebigen Normalkörper, unter $\mathfrak{o}'$ eine darin enthaltene Normalordnung von der in § 4 betrachteten Art mit dem Führer $\mathfrak{k}$, und unter Q die kleinste durch $\mathfrak{k}$ theilbare natürliche Zahl verstehen. Aus $\mathfrak{o}'$ leiten wir die Gruppe O'_+ her, und bezeichnen mit $\bar{O}$ die Gruppe aller zu $\mathfrak{k}$ theilerfremden (ganzen und gebrochenen) Ideale des Körpers Ω. Unter Aequivalenz soll in diesem Paragraphen immer die Aequivalenz noch O'_+ verstanden sein.

Wir nehmen irgend eine natürliche Zahl m, und bezeichnen die endliche Gruppe vom Grade $\varphi(m) = \mu$ der nach dem Modul m genommenen rationalen Zahlclassen, die nur *relative Primzahlen zu* m enthalten, mit M.

Alle Zahlclassen der Gruppe M, deren Zahlen mit *Normen von Zahlen* ω' *aus* $\mathfrak{o}'$ nach dem Modul m congruent sein können, bilden eine in M enthaltene Gruppe M', deren Grad μ' sei, und wir bezeichnen die Gruppe M' durch die symbolische Congruenz

$$N(\omega') \equiv M' \pmod{m}. \tag{1}$$

Unter den Idealen der Gruppe $\bar{O}$ werden nun solche enthalten sein, deren Normen in M' enthalten sind, für die also, wenn $\mathfrak{a}$ ein solches Ideal ist, eine Zahl ω' in O'_+ existirt, die der Bedingung

$$N(\mathfrak{a}) \equiv N(\omega') \pmod{m} \tag{2}$$

genügt.

Diese Ideale $\mathfrak{a}$ bilden eine in $\bar{O}$ enthaltene Gruppe $\mathfrak{A}_m$, die wir das *Hauptgeschlecht für den Modul* m nennen wollen.

In der Gruppe $\mathfrak{A}_m$ ist die Gruppe der Hauptideale $\bar{E}\,O'_+$ enthalten, und wenn $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{A}_m$ enthalten ist, so sind auch alle mit $\mathfrak{a}$ nach O'_+ äquivalenten Ideale zugleich darin enthalten. Das Hauptgeschlecht $\mathfrak{A}_m$ enthält also nur vollständige Idealclassen nach O'_+, und wir fassen daher $\mathfrak{A}_m$ jetzt nicht mehr als Gruppen von Idealen, sondern als *Gruppen von Idealclassen* auf, die in der Gesammtgruppe der Idealclassen

$$\mathfrak{G} = \bar{O} \,|\, \bar{E}\,O'_+ \tag{3}$$

enthalten ist*). Da $\mathfrak{a}\omega'^{-1}$ mit $\mathfrak{a}$ äquivalent ist, so können wir die Definition nach (2) so fassen:

*) Die Unterscheidung von O'_+ und O' ist, wie schon oben bemerkt, nur in dem Falle nöthig, wo es Zahlen, aber darunter keine Einheiten, mit negativer

1. *Eine Idealclasse A der Gruppe $\mathfrak{G}$ gehört der Gruppe $\mathfrak{A}_m$, oder dem Hauptgeschlecht für den Modul m an, wenn in A ein Repräsentant $\mathfrak{a}$ existirt, der der Bedingung*

$$N(\mathfrak{a}) \equiv 1 \pmod{m} \tag{}$$

genügt.

Setzen wir nun

$$h = (\bar{O}, \bar{E}O'_+), \quad k_m = (\bar{O}, \mathfrak{A}_m), \quad h_m = (\mathfrak{A}_m, \bar{E}O'_+),$$

ist

$$h = h_m k_m, \tag{}$$

ıd k_m ist die *Anzahl der Geschlechter* für den Modul m, h_m die Anhl der in jedem Geschlechte enthaltenen Classen.

Bezeichnen wir mit M'' die Gruppe der zu m theilerfremden, nach m Modul m genommenen Zahlclassen, deren Zahlen mit *Normen von lealen aus* $\bar{O}$ nach dem Modul m congruent sind, so ist M'' ein ıeiler von M und M' ein Theiler von M'', und es ist

$$k_m = (M'', M') = \frac{(M, M')}{(M, M'')}. \tag{}$$

ı eine Congruenz (4) nach dem Modul m die gleiche Congruenz für den Theiler von m zur Folge hat, so gilt der Satz:

2. *Ist m_1 ein Theiler von m, so ist $\mathfrak{A}_m$ ein Theiler von $\mathfrak{A}_{m_1}$.*

Daraus ziehen wir noch weitere Schlüsse.

3. *In der Gruppe $\mathfrak{G}$ der Idealclassen ist eine Gruppe $\mathfrak{A}$ enthalten, die aus allen Idealclassen A von $\mathfrak{G}$ besteht, die die Eigenschaft haben, dass für jeden beliebigen Modul m ein der Bedingung*

$$N(\mathfrak{a}) \equiv 1 \pmod{m} \tag{}$$

genügender Repräsentant $\mathfrak{a}$ von A existirt.

Dass eine solche Gruppe $\mathfrak{A}$ immer existirt, ist von vorn herein ar, da ja die Hauptclasse $\bar{E}O'_+$ gewiss diese Eigenschaft hat.

Diese Gruppe $\mathfrak{A}$ nennen wir das *absolute Hauptgeschlecht* und die ıbengruppen zu $\mathfrak{A}$ die *absoluten Geschlechter*. Aus der Definition giebt sich unmittelbar, dass $\mathfrak{A}$ in jeder Gruppe $\mathfrak{A}_m$ enthalten ist,

---

rm giebt. Wollte man die Unterscheidung nicht machen, so würde $\bar{E}O'$ nicht mer in $\mathfrak{A}_m$ enthalten sein, und es würden dann durch die Geschlechtereinteilung die Classen nach O' von selbst in zwei Theile zerlegt werden. Wollte ın das vermeiden, so müsste man die Gruppe M' durch die Congruenz

$$N_a(\omega') \equiv M' \pmod{m}$$

finiren, wenn N_a die absolute Norm bedeutet, erhielte aber dann eine minder ıarfe Eintheilung.

und dass umgekehrt jede Classe, die in allen $\mathfrak{A}_m$ vorkommt, auch in $\mathfrak{A}$ enthalten ist.

4. *Das absolute Hauptgeschlecht ist daher der Durchschnitt aller relativen Hauptgeschlechter.*

Wenn wir m durch Hinzufügung eines Factors zu m_1 erweitern, so verengert sich die Gruppe $\mathfrak{A}_m$, wenn nicht $\mathfrak{A}_m = \mathfrak{A}_{m_1}$ ist. Schliesslich müssen wir also zu einem Modul m_0 kommen, so dass durch weitere Hinzufügung von Factoren zu m_0 die Gruppe $\mathfrak{A}_{m_0}$ nicht mehr eingeengt werden kann. Dann ist $\mathfrak{A}_{m_0} = \mathfrak{A}$. Es giebt also gewisse Moduln m_0 für die das *relative* Hauptgeschlecht mit dem *absoluten* übereinstimmt, und wenn m_0 ein solcher Modul ist, so hat jedes Vielfache von m_0 die gleiche Eigenschaft. Man könnte einen, etwa den kleinsten unter diesen Moduln m_0 vor den andern auszeichnen, jedoch spricht dafür kein innerer Grund, da es z. B. vorkommen kann, dass $\mathfrak{A}_p = \mathfrak{A}_q = \mathfrak{A}$ ist, wenn p und q zwei verschiedene völlig gleichberechtigte Primzahlen sind.

Es gilt aber auch der folgende Satz:

5. *Sind m_1, m_2 relativ prim, so ist $\mathfrak{A}_{m_1 m_2}$ der grösste gemeinschaftliche Theiler von $\mathfrak{A}_{m_1}$ und $\mathfrak{A}_{m_2}$.*

Nach 2. ist zunächst $\mathfrak{A}_{m_1 m_2}$ ein Theiler, sowohl von $\mathfrak{A}_{m_1}$ als von $\mathfrak{A}_{m_2}$. Es ist also noch zu zeigen, dass eine Idealclasse A, die sowohl in $\mathfrak{A}_{m_1}$ als in $\mathfrak{A}_{m_2}$ vorkommt, auch in $\mathfrak{A}_{m_1 m_2}$ enthalten sein muss, oder dass, wenn es in A zwei Ideale $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ giebt, die den Bedingungen

$$N(\mathfrak{a}_1) \equiv 1 \pmod{m_1}, \qquad N(\mathfrak{a}_2) \equiv 1 \pmod{m_2} \tag{7}$$

genügen, in A auch ein Ideal $\mathfrak{a}$ existirt, so dass

$$N(\mathfrak{a}) \equiv 1 \pmod{m_1 m_2} \tag{8}$$

ist. Da $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ äquivalent sind, so giebt es eine *Zahl* ω' in 0_+ so dass

$$\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1 \omega'$$

ist. Bestimmen wir nun die ganzen rationalen Zahlen x_1, x_2 so dass

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv 1 \pmod{m_1}, & x_2 &\equiv 0 \pmod{m_1}, \\ &\equiv 0 \pmod{m_2}, & &\equiv 1 \pmod{m_2} \end{aligned} \tag{9}$$

und dass $N(x_1 + x_2\omega')$ positiv wird, und setzen

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1(x_1 + x_2\omega'),$$

so ist $\mathfrak{a}$ in der Classe A enthalten, und

$$N(\mathfrak{a}) \equiv N(\mathfrak{a}_1) \pmod{m_1}, \quad N(\mathfrak{a}) \equiv N(\mathfrak{a}_2) \pmod{m_2}$$

also ist auch, wie verlangt, die Congruenz (8) befriedigt und das Theorem 5. bewiesen.

Um über die Anzahl der Genera näheren Aufschluss zu erhalten, betrachten wir zunächst die Gruppen der Zahlclassen M, M' nach einen beliebigen Modul m.

Es sei

$$m = m_1 m_2$$

und m_1, m_2 relative Primzahlen. Es mögen ferner M_1, M_1'; M_2, M_2' dieselbe Bedeutung für m_1, m_2 haben, wie M, M' für m. Dann ist der Grad von M gleich dem Product der Grade von M_1 und M_2 und dasselbe gilt von den Gruppen M', M_1', M_2'. Das erstere ist bekannt; um auch das zweite einzusehen, braucht man nur zu erwägen, dass eine Zahl a, die zu M gehört auch in M_1 und in M_2 enthalten ist, dass aber auch umgekehrt eine Zahl a, die zugleich zu M_1 und zu M_2 gehört, in M enthalten sein muss. Denn ist

$$N(\omega_1) \equiv a \pmod{m_1}. \quad N(\omega_2) \equiv a \pmod{m_2}$$

so ist, wenn wir x_1, x_2 durch (9) bestimmen,

$$N(x_1\omega_1 + x_2\omega_2) \equiv a \pmod{m},$$

also a auch in M enthalten. Hieraus folgt (§ 1, III)

$$(M, M') = (M_1, M_1')\,(M_2, M_2'). \tag{10}$$

Ist nun $m = p^\lambda$ eine Primzahlpotenz, so bezeichnen wir die entsprechenden Gruppen M, M' mit P_λ, P_λ' und ihre Grade mit π_λ, π_λ'. Dann ist bekanntlich, so lange $\lambda > 1$ ist, $\pi_\lambda = p\pi_{\lambda-1}$. Ferner ist jede Zahl a, die in P_λ' enthalten ist, auch in $P_{\lambda-1}'$ enthalten. Ist nun a eine Zahl aus $P_{\lambda-1}'$, so giebt es eine Zahl ω, die der Bedingung

$$N(\omega) \equiv a \pmod{p^{\lambda-1}}$$

genügt. Wenn nun für jedes a aus dieser Congruenz auch die Möglichkeit der Congruenz

$$N(\omega) \equiv a \pmod{p^\lambda}$$

folgt, so ergeben sich zu jedem a nach dem Modul $p^{\lambda-1}$ p verschiedene Zahlen nach dem Modul p^λ, d. h. es ist in diesem Fall

$$\pi_\lambda' = p\pi_{\lambda-1}'$$

in den anderen Fällen ist π_λ' kleiner als $p\pi_{\lambda-1}'$, und da $\pi_{\lambda-1}'$ ein Theiler von π_λ' sein muss, so ist in diesen Fällen $\pi_\lambda' = \pi_{\lambda-1}'$. Hieraus ergiebt sich im ersten Fall

$$(P_\lambda, P_\lambda') = (P_{\lambda-1}, P_{\lambda-1}'),$$

im anderen Falle

$$(P_\lambda, P_\lambda') = p\,(P_{\lambda-1}, P_{\lambda-1}').$$

6. Definition. *Wir nennen eine Primzahl p, bei der für irgend eine Potenz p^λ die Gruppe P_λ' von P_λ verschieden ist, eine charakteristische Primzahl der Ordnung $\mathfrak{o}'$, und die höchste Potenz p^λ, bei der (P_λ, P_λ') noch von $(P_{\lambda-1}, P_{\lambda-1}')$ verschieden ist, die charakteristische Potenz von p.*

Nehmen wir einen Modul m, der alle charakteristischen Primzahlpotenzen (deren Anzahl, wie sich gleich zeigen wird, endlich ist) als Theiler enthält, so ist

(11) $$(M, M') = \prod\prod (P_i, P_i'),$$

das Product Π ausgedehnt über alle charakteristischen Primzahlpotenzen von $\mathfrak{o}'$. Dieser Ausdruck ist aber unabhängig von der sonstigen Beschaffenheit von m und ist der Zähler in dem Ausdruck für die Anzahl der absoluten Geschlechter. Der Nenner dieses Ausdrucks (M, M') ist daher in demselben Umfang von m unabhängig.

§ 7.

Die charakteristischen Primzahlen.

Zur näheren Bestimmung der charakteristischen Primzahlen und ihrer Potenzen führen die folgenden Sätze, in denen der Grad des Körpers Ω immer mit n bezeichnet ist.

Es handelt sich zunächst darum, zu entscheiden, wenn p eine natürliche Primzahl und a eine durch p nicht theilbare rationale Zahl ist, unter welchen Umständen die Congruenz

(1) $$N(\omega) \equiv a \pmod{p}$$

durch eine Zahl ω in $\mathfrak{o}'$ lösbar ist.

1. *Wenn p in Q aufgeht, so kann die Congruenz* (1) *dann und nur dann durch eine Zahl in $\mathfrak{o}'$ gelöst werden, wenn a mit der n^{ten} Potenz einer andern rationalen Zahl b congruent ist:*

(2) $$a \equiv b^n \pmod{p}$$

oder was dasselbe ist, wenn δ den grössten gemeinschaftlichen Theiler von $p-1$ und n bedeutet unter der Bedingung

(3) $$a^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Denn ist erstens die Bedingung (2) erfüllt, so wird (1) durch die in $\mathfrak{o}'$ enthaltene Zahl $\omega = b$ befriedigt. Ist umgekehrt (1) befriedigt, und $\mathfrak{f}$ der Führer von $\mathfrak{o}'$, so giebt es nach der Definition von $\mathfrak{o}'$ ein rationales b, so dass

$$\omega \equiv b \pmod{\mathfrak{f}},$$

also auch, wenn ω_i die mit ω conjugirten Zahlen sind

$$\omega_i \equiv b \pmod{\mathfrak{f}},$$

Also, indem man hiervon das Product nimmt

$$N(\omega_i) \equiv b^n \pmod{\mathfrak{f}}$$

und diese Congruenz besteht auch nach den Modul p.

Wenn zweitens p nicht in Q aufgeht, also relativ prim zu $\mathfrak{f}$ ist, so ist jede Zahl in $\mathfrak{o}$ nach den Modul p mit einer Zahl in $\mathfrak{o}'$ congruent. Denn wir können dann die Congruenz

$$Q\xi \equiv \omega \pmod{p}$$

durch eine Zahl ξ in $\mathfrak{o}$ befriedigen und $Q\xi$ ist in $\mathfrak{o}'$ enthalten. Ist also die Congruenz (1) in $\mathfrak{o}$ zu befriedigen, so kann sie auch in $\mathfrak{o}'$ befriedigt werden. Wir zerlegen p in seine Primideale

$$p = (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_e)^g, \quad efg = n^*) \tag{4}$$

worin $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_e$ von einander verschiedene Primideale f^{ten} Grades sind, *und worin g ein Theiler von n ist, der nur dann grösser als* 1 *ist, wenn p in der Grundzahl Δ des Körpers Ω aufgeht.*

In der Gruppe Φ des Körpers Ω ist eine Gruppe X vom Grade g enthalten, deren Substitutionen χ für jede Zahl ω in $\mathfrak{o}$ der Bedingung

$$\omega|\chi \equiv \omega \pmod{\mathfrak{p}} \tag{5}$$

genügen, wenn $\mathfrak{p}$ irgend einer der Primfactoren von p ist. Ausserdem giebt es eine Substitution f^{ten} Grades, ψ_0, für die

$$\omega|\psi_0 \equiv \omega^p \pmod{\mathfrak{p}},$$

also für jeden Exponenten λ

$$\omega|\psi_0^\lambda \equiv \omega^{p^\lambda} \pmod{\mathfrak{p}}. \tag{6}$$

Die Gruppe gf^{ten} Grades

$$\Psi = \mathsf{X} + \mathsf{X}\psi_0 + \cdots + \mathsf{X}\psi_0^{f-1}$$

ist dann die Gruppe des Primideals $\mathfrak{p}$; ihre Substitutionen werden mit ψ bezeichnet. Aus (5) und (6) aber folgt für jedes ω

$$\prod^{\psi} \omega|\psi \equiv \omega^{g(1+p+\cdots+p^{f-1})} \pmod{\mathfrak{p}},$$

und wenn wir

$$\eta = \omega^{1+p+\cdots+p^{f-1}}$$

setzen, so ist

$$\eta^p \equiv \eta \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Das ist aber (vgl. Algebra Bd. II, § 150) die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass η mit einer rationalen Zahl c congruent ist. Also:

$$\prod^{\psi} \omega|\psi \equiv c^g \pmod{\mathfrak{p}}. \tag{7}$$

Eine solche Congruenz gilt für jedes ω, und wenn daher φ eine nicht in Ψ enthaltene Substitution von ω ist, so ist auch

$$\prod^{\psi} \omega|\varphi\psi \equiv c_1^g \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Multiplicirt man alle diese Congruenzen mit einander, und bezeichnet mit b eine rationale Zahl, so folgt für jede Zahl in $\mathfrak{o}$

*) Algebra, Bd. II, § 160, 168.

(9) $$N(\omega) \equiv b^g \pmod{\mathfrak{p}},$$

und diese Congruenz besteht daher auch für den Modul p.

Aber es gilt auch umgekehrt, dass eine Congruenz (9), wenn b eine beliebige rationale Zahl ist, immer in $\mathfrak{o}$ lösbar ist. Wenn nämlich b durch p nicht theilbar ist und γ eine primitive Wurzel von $\mathfrak{p}_1$ bedeutet, so kann man den Exponenten x immer so bestimmen, dass

$$b \equiv \gamma^{x(1+p+\cdots+p^{f-1})} \pmod{\mathfrak{p}_1}$$

wird. Nun nehmen wir eine Zahl ω an, die den Congruenzbedingungen

$$\omega \equiv \gamma^x \pmod{\mathfrak{p}_1},$$
$$\omega \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3 \ldots, \mathfrak{p}_e}$$

genügt.

Um eine solche Zahl zu finden, nehme man eine Zahl α, die durch $\mathfrak{p}_1$ theilbar, durch $\mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_e$ nicht theilbar ist, und bestimme die Zahl ξ aus

$$\omega = \alpha\xi + \gamma^x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_e}.$$

Dann ist

$$\omega|\chi\psi_0{}^\lambda \equiv \gamma^{x p^\lambda} \pmod{\mathfrak{p}_1},$$

und für jede nicht in Ψ enthaltene Substitution φ

$$\omega|\varphi \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_1},$$

folglich

$$N(\omega) \equiv \gamma^{g x(1+p+\cdots+p^{f-1})} \equiv b^g \pmod{\mathfrak{p}_1}.$$

Wir haben also

2. *Wenn p nicht in Q aufgeht, so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit der Congruenz* (1) *in* $\mathfrak{o}'$ *die, dass*

$$a \equiv b^g \pmod{p}$$

oder also, wenn δ der grösste gemeinschaftliche Theiler von g und $p-1$ ist

$$a^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Wenn die Congruenz

(10) $$N(\omega') \equiv a \pmod{p^\lambda}$$

für irgend einen positiven Exponenten λ durch eine Zahl in $\mathfrak{o}'$ lösbar ist, so setzen wir

$$N(\omega') = a + p^\lambda a'$$

und bilden eine Zahl

$$\eta = \omega'(p^\lambda x\xi + 1),$$

worin x rational, und ξ eine Zahl in $\mathfrak{o}$ sein soll, deren Spur $S(\xi)$ nicht durch p theilbar ist (wenn eine solche Zahl existirt). Dann ist

$$N(\eta) \equiv a + p^\lambda \left(a' + x\,S(\xi)\right) \pmod{p^{\lambda+1}}$$

und daher, wenn x der Congruenz

$$x S(\xi) + a' \equiv 0 \pmod{p} \tag{11}$$

genügt,

$$N(\eta) \equiv a \pmod{p^{\lambda+1}}.$$

Wenn sich also ξ und x so bestimmen lassen, dass $1 + p^\lambda x \xi$ zu $\mathfrak{o}'$ gehört, so folgt, dass wenn die Congruenz (10) in $\mathfrak{o}'$ lösbar ist, auch

$$N(\omega') \equiv a \pmod{p^{\lambda+1}} \tag{12}$$

lösbar ist.

Die Zahlen ξ, x, wie sie hier vorausgesetzt sind, existiren immer, wenn p theilerfremd zum Führer $\mathfrak{k}$ von $\mathfrak{o}'$ und zur Grundzahl Δ des Körpers ist, oder wenn p nicht im Grade n des Körpers Ω aufgeht.

Denn die Grundzahl Δ ist, wenn $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ eine Basis der ganzen Zahlen von Ω bedeutet, gleich der Determinante

$$\Delta = |S(\omega_\iota \omega_\varkappa)|,$$

und wenn also alle Spuren durch p theilbar sind, so ist auch Δ durch p theilbar. Folglich giebt es, wenn p nicht in Δ aufgeht, eine Zahl ξ in Ω, deren Spur nicht durch p theilbar ist. Geht dann aber auch p nicht in Q auf, so kann man x aus

$$x \equiv 0 \pmod{Q}, \quad x S(\xi) + a' \equiv 0 \pmod{p}$$

bestimmen, und dann ist $1 + p^\lambda x \xi$ in $\mathfrak{o}'$ enthalten.

Geht aber p nicht im Körpergrad n auf, so kann man $\xi = 1$, also $S(\xi) = n$ annehmen, und hat x aus der Congruenz

$$nx \equiv a' \pmod{p}$$

zu bestimmen, und $1 + p^\lambda x$ ist als rationale Zahl immer in $\mathfrak{o}'$ enthalten. Wir sprechen also den Satz aus:

5. *Geht p nicht in $Q\Delta$ oder nicht in n auf, und ist die Congruenz*

$$N(\omega') \equiv a \pmod{p}$$

lösbar, so ist auch

$$N(\omega') \equiv a \pmod{p^\lambda}$$

für jedes positive λ lösbar.

Wir haben daher den folgenden Satz:

6. *Die Primzahlen, die nicht in $Q\Delta$ aufgehen, kommen nicht unter den charakteristischen Primzahlen der Ordnung $\mathfrak{o}'$ vor. Ein Primfactor p, der in Q oder in Δ aber nicht in n aufgeht, kommt nur dann unter den charakteristischen Primzahlen vor, wenn $p - 1$ und n oder $p - 1$ und g nicht relativ prim sind, und von diesen Primzahlen ist die erste Potenz die charakteristische Potenz. Es ist, wenn δ der grösste gemeinschaftliche Theiler von $p - 1$ und n oder von $p - 1$ und g ist*

$$(P, P') = \delta. \tag{13}$$

Wenn aber p in $Q\Delta$ und zugleich in n aufgeht, so können wir für die charakteristische Potenz von p im Allgemeinen eine obere Grenze angeben. Es sei

$$n = p^{\varkappa} n' \tag{14}$$

und n' nicht durch p theilbar. Die Aufgabe ist dann die, den niedrigsten Exponenten λ zu bestimmen, so dass aus der Congruenz

$$N(\omega) \equiv a \pmod{p^{\lambda}} \tag{15}$$

die Möglichkeit derselben Congruenz für jede höhere Potenz von p als Modul folgt.

Ist ω' eine Lösung von (15) in $\mathfrak{o}'$, so setzen wir

$$\eta = \omega'(1 + p^{\lambda-\varkappa} x),$$

worin x eine rationale Zahl bedeutet. Wenn ω' in $\mathfrak{o}'$ enthalten ist, so ist auch η darin enthalten. Ist nun

$$N(\omega') = a + a' p^{\lambda},$$

so folgt

$$N(\eta) = (a + a' p^{\lambda})(1 + p^{\lambda-\varkappa} x)^{n},$$

und wenn wir λ so annehmen, dass $2(\lambda - \varkappa) > \lambda$, also

$$\lambda > 2\varkappa \tag{16}$$

ist, so folgt

$$N(\eta) = a + (n' a x + a') p^{\lambda} \pmod{p^{\lambda+1}}. \tag{17}$$

Wenn also x aus

$$n' a x + a' \equiv 0 \pmod{p}$$

bestimmt wird, so folgt

$$N(\eta) \equiv a \pmod{p^{\lambda+1}}.$$

Hiervon ist (16) die einzige Bedingung, und es ergiebt sich:

7. Ist p in n und in $Q\Delta$ enthalten, und ist n durch $p^{\varkappa}$, aber durch keine höhere Potenz von p theilbar, so ist der Exponent der charakteristischen Potenz p^{λ} höchstens gleich $2\varkappa + 1$.

Die Grenze für λ lässt sich unter Umständen noch etwas weiter herunterdrücken. Bemerkt man nämlich, dass in der Entwickelung der n^{ten} Potenz des Binoms $1 + p^{\lambda-\varkappa} x$ alle auf den ersten folgenden Binomialcoefficienten bis zum p^{ten} einschliesslich durch $p^{\varkappa}$ theilbar sind, so erkennt man, dass die Congruenz (17) auch noch unter der Voraussetzung

$$p(\lambda - \varkappa) > \lambda$$

gilt.

Es ist also λ *höchstens* gleich der zunächst über

$$\frac{p\varkappa}{p-1} \tag{18}$$

gelegenen ganzen Zahl. Dies ist für $\varkappa = 1$, $p = 2$, in Uebereinstimmung

stimmung mit dem Satze 7 die Zahl 3; dagegen für $\varkappa = 1$, $p > 2$ die Zahl 2.

Aber auch für $p = 2$ lässt sich in manchen Fällen die Grenze für λ noch erniedrigen. Für $p = 2$ giebt der Ausdruck (18) $2\varkappa + 1$ als obere Grenze für λ. Wir wollen untersuchen, ob nicht $\lambda = 2\varkappa$ schon genügen kann.

Da Ω ein Normalkörper ist, so gehört die Quadratwurzel aus der Grundzahl, $\sqrt{\Delta}$, dem Körper selbst an. Diese Wurzel kann rational sein, und muss es immer sein, wenn n ungerade ist. Bei geradem n kann $\sqrt{\Delta}$ auch irrational sein, und dann hat die Gruppe Φ einen Theiler Φ' vom Grade $\frac{1}{2}n$, durch deren Substitutionen $\sqrt{\Delta}$ ungeändert bleibt, während es durch die andere Hälfte der Substitutionen Φ sein Zeichen ändert. Es sei unter dieser Voraussetzung

$$n = 2^{\varkappa} n', \quad Q = 2^{\varkappa_1} Q', \quad \Delta = 2^{\varkappa_2} \Delta' \tag{19}$$

worin n', Q', Δ' ungerade sind.

Es handelt sich also noch um die Frage, unter welchen Voraussetzungen aus der Congruenz

$$N(\omega') \equiv a \pmod{2^{2\varkappa}}$$

die Möglichkeit derselben Congruenz für den Modul $2^{2\varkappa+1}$ folgt. Hierin bedeutet ω' eine Zahl in $\mathfrak{o}'$, und wir setzen

$$N(\omega') = a + 2^{2\varkappa} a', \tag{20}$$

$$\eta = \omega'(1 + 2^{\frac{\varkappa - \varkappa_2 + 1}{2}} Q' \sqrt{\Delta}\, x). \tag{21}$$

Diese Zahl gehört für jedes rationale x dem Körper Ω an, wenn $(\varkappa - \varkappa_2 + 1) : 2$ eine ganze Zahl, also

$$\varkappa_2 \equiv \varkappa + 1 \pmod{2} \tag{22}$$

vorausgesetzt wird. Die Zahl η wird aber auch der Ordnung $\mathfrak{o}'$ angehören, wenn

$$2^{\frac{\varkappa - \varkappa_2 + 1}{2}} Q' \sqrt{\Delta} = 2^{\frac{\varkappa + 1}{2}} Q' \sqrt{\Delta'}$$

eine nach den Modul Q mit einer rationalen Zahl congruente ganze Zahl ist, oder wenn

$$2^{\frac{\varkappa+1}{2}} \sqrt{\Delta'}$$

nach dem Modul $2^{\varkappa_1}$ mit einer rationalen Zahl congruent ist. Es ist hierbei zu unterscheiden, ob $\Delta' \equiv 1$ oder $\equiv 3 \pmod 4$ ist; denn im ersten Fall ist $\frac{1}{2}(\sqrt{\Delta'} - 1)$ eine ganze Zahl, im zweiten Falle nicht.

Es muss daher im ersten Fall

$$2^{\frac{\varkappa+3}{2}}\frac{\sqrt{\Delta'}-1}{2}$$

nach dem Modul $2^{\varkappa_1}$ mit einer rationalen Zahl congruent sein, was nur möglich ist, wenn

$$\frac{\varkappa+3}{2} \geqq \varkappa_1$$

und im zweiten muss

$$\frac{\varkappa+1}{2} > \varkappa_1$$

sein. Man hat also zwei Fälle

$$(23)\quad \begin{aligned} &\text{a)}\ \ \Delta' \equiv 1 \pmod 4,\quad \varkappa_2 \equiv \varkappa+1 \pmod 2,\quad \varkappa_1 \leqq \tfrac{\varkappa+3}{2},\\ &\text{b)}\ \ \Delta' \equiv 3 \pmod 4,\quad \varkappa_2 \equiv \varkappa+1 \pmod 2,\quad \varkappa_1 \leqq \tfrac{\varkappa+1}{2}, \end{aligned}$$

In beiden Fällen ist nach (21)

$$\begin{aligned} N(\eta) &= N(\omega')(1-2^{\varkappa+1}Q'^2\Delta' x^2)^{\frac{n}{2}},\\ N(\eta) &\equiv (a+2^{2\varkappa}a')\,(1-2^{2\varkappa}Q'^2\Delta' n' x^2) \pmod{2^{2\varkappa+1}}\\ &\equiv a+2^{2\varkappa}(a'-aQ'^2\Delta' n' x^2) \pmod{2^{2\varkappa+1}} \end{aligned}$$

und es wird also, wenn $x \equiv a' \pmod 2$ angenommen wird,

$$N(\eta) \equiv a \pmod{2^{2\varkappa+1}}.$$

In diesen Fällen ist also die charakteristische Potenz von 2 höchstens $2^{2\varkappa}$.

Nehmen wir $\varkappa = 1$ an, so ergeben sich folgende Fälle, in denen die charakteristische Potenz von 2 höchstens $= 4$ ist.

$$(24)\quad \begin{aligned} &\text{a)}\ \ \Delta' \equiv 1 \pmod 4,\quad \varkappa_2 \equiv 0 \pmod 2,\quad \varkappa_1 = 0, 1, 2,\\ &\text{b)}\ \ \Delta' \equiv 3 \pmod 4,\quad \varkappa_2 \equiv 0 \pmod 2,\quad \varkappa_1 = 0, 1. \end{aligned}$$

Im Falle a) scheiden aber noch die Werthe $\varkappa_1 = 0, 1$ aus, in denen 2 überhaupt nicht unter den charakteristischen Primzahlen vorkommt. Denn in diesen Fällen ist

$$\omega = x + yQ'\sqrt{\Delta'}$$

für jedes ganze rationale x, y eine Zahl in $\mathfrak{o}'$ und es ist

$$N(\omega) = (x^2 - y^2Q'^2\Delta')^{n'}.$$

Je nachdem man nun x gerade und y ungerade oder x ungerade und y gerade annimmt, ist

$$N(\omega) \equiv -1 \quad \text{oder} \quad \equiv +1 \pmod 4.$$

Folglich ist die Congruenz

$$N(\omega) \equiv a \pmod 4$$

für jedes ungerade a in $\mathfrak{o}'$ lösbar.

Für einen *quadratischen Körper* Ω ist im Falle a) $\varkappa_2 = 0$, im Falle b) $\varkappa_2 = 2$, und es ergeben sich folgende drei Fälle, in denen 4 die charakteristische Potenz von 2 ist.

1) $\Delta' \equiv 1, \quad \Delta = \Delta', \quad Q = 4Q', \quad D = Q^2\Delta = 16Q'^2\Delta',$
2) $\Delta' \equiv 3, \quad \Delta = 4\Delta', \quad Q = Q', \quad D = Q^2\Delta = 4Q'^2\Delta',$
3) $\Delta' \equiv 3, \quad \Delta = 4\Delta', \quad Q = 2Q', \quad D = Q^2\Delta = 16Q'^2\Delta'.$

Die Gauss'sche Determinante ∇ der entsprechenden quadratischen Formen ist in diesen Fällen, wo D und also auch b gerade ist, gleich $\frac{1}{4}D$ (§ 5), und wir bekommen also

im Falle 1. $\nabla = 4Q'^2\Delta' \equiv 4 \pmod{16}$,
im Falle 2. $\nabla = Q'^2\Delta' \equiv 3 \pmod{4}$,
im Falle 3. $\nabla = 4Q'^2\Delta' \equiv 12 \pmod{16}$,

in denen 4 die charakteristische Potenz von 2 ist (in vollkommener Uebereinstimmung mit den Sätzen von Gauss über die Classencharaktere. Disq. ar. art. 228 f., Dirichlet-Dedekind, Zahlentheorie, 4. Auflage § 121).

Strassburg, 31. August 1896.

Sulle equazioni a derivate parziali del second' ordine a tre variabili indipendenti.

Di

G. Vivanti.

Il presente lavoro è un tentativo d'estensione alle equazioni con tre variabili indipendenti del metodo d'integrazione di Monge e Ampère. In questo caso — almeno fintantochè la geometria differenziale dello spazio rigato non sia più progredita — ci manca il prezioso concorso dell' intuizione geometrica, che ha permesso di raggiungere nella teoria delle equazioni a due variabili indipendenti la più grande semplicità ed eleganza*). Ciò valga a scusare la lunghezza dei calcoli che si dovranno sviluppare nel seguito.

Nel § 1 si stabilisce la forma generale delle equazioni che ammettono un integrale intermedio contenente una funzione di due argomenti.

Nel § 2 si riduce il problema della ricerca d'un integrale intermedio a quello dell' integrazione d'un sistema d'equazioni a differenziali totali non lineari.

Nel § 3 si determinano le condizioni sotto le quali questo sistema può ridursi ad un sistema lineare, e si effettua tale riduzione; nel successivo § 4 si passa da questo ad un sistema d'equazioni lineari omogenee a derivate parziali, e si studiano le proprietà di questo sistema e le sue condizioni d'integrabilità.

Nel § 5 si dimostra come i risultati ottenuti sieno validi anche quando, per l'annullarsi di qualche coefficiente, taluni dei passaggi analitici effettuati cessino di essere legittimi. Si studiano pure le trasformazioni di Legendre e di Ampère.

Nei §§ 6 e 7 si esaminano certi casi speciali, in cui è possibile la riduzione ad uno o più sistemi lineari anche sotto condizioni diverse

*) Vedasi l'eccellente opera di Goursat: *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes*, T. I, Paris 1896.

da quelle trovate in generale. Il secondo di tali casi è quello dell' equazione lineare rispetto alle derivate seconde.

Finalmente nel § 8 si sviluppano due esempi ad illustrazione delle teorie esposte*).

---

*) Devo alla cortesia del Dott. Ed. von Weber dell' Università di Monaco l'indicazione di alcuni lavori che hanno qualche attinenza coll' argomento del presente scritto.

A. V. Bäcklund (*Ueber partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung, die intermediäre erste Integrale besitzen*, Math. Ann. XI p. 199—241, XIII p. 68—108; *Zur Theorie der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Math. Ann. XIII p. 411—428) studia con metodo essenzialmente geometrico le equazioni a derivate parziali d'ordine qualunque e con un numero qualunque di variabili. Sia:

$F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots, p_{k_1, k_2, \ldots}, \ldots, p_{k_1, k_2, \ldots, k_m}, \ldots) = 0$

un' equazione d'ordine m con n variabili indipendenti, essendo:

$$p_{k_1, k_2, \ldots, k_r} = \frac{\partial^r z}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_r}}.$$

Si indichi con f una funzione incognita delle z, x_i e delle derivate parziali di z sino all' ordine $(m-1)$-esimo, con $\frac{df}{dx_i}$ la derivata *totale* di f rispetto ad x_i, cioè la derivata presa tenendo conto che z e le sue derivate sono funzioni di x_i; $\frac{df}{dx_i}$ sarà una funzione lineare omogenea delle derivate parziali prime di f rispetto ai suoi argomenti avente per coefficienti derivate parziali di z sino all' ordine m. Fra le:

$$F = 0, \quad \frac{df}{dx_1} = 0, \quad \frac{df}{dx_2} = 0, \quad \cdots, \quad \frac{df}{dx_n} = 0$$

si eliminino n delle derivate di z d'ordine m, e si esprima che l'equazione risultante è soddisfatta identicamente rispetto alle restanti derivate di quest' ordine. Si otterrà così un sistema (A) d'equazioni omogenee a derivate parziali del primo ordine rispetto ad f considerata come funzione de' suoi argomenti. Perchè $F = 0$ ammetta un integrale primo generale, devono aver luogo le seguenti circostanze:

1° Il numero delle equazioni del sistema (A) dev' essere eguale a quello delle derivate di z d'ordine $m-1$;

2° Le equazioni del sistema (A) devono ammettere ∞^n integrali comuni.

Se queste equazioni sono soddisfatte, *ciò che si può verificare per via puramente algebrica*, le ∞^n soluzioni del sistema (A) costituiscono l'integrale primo generale della $F = 0$.

V. Sersawy (*Die Integration der partiellen Differentialgleichungen. Grundlinien einer allgemeinen Integrationsmethode*, Denkschr. d. Wiener Akad., Math.-Naturw. Cl., B. XLIX, T. II, p. 1—104) espone un metodo generale per l'integrazione d'una equazione a derivate parziali d'ordine qualunque e con un numero qualunque di variabili. Egli tenta di ridurre in ogni caso il problema all' integrazione d'un sistema d'equazioni ordinarie simultanee. Ciò però non è possibile in generale se non per le equazioni del primo ordine con un numero qualunque

§ 1.

Sia z una funzione delle tre variabili x_1, x_2, x_3, e poniamo:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} = p_{ik} = p_{ki}.$$

Sieno inoltre u, v, w tre funzioni delle z, x_i, p_i, φ una funzione arbitraria di due argomenti. Noi ci proponiamo di costruire l'equazione a derivate parziali del secondo ordine avente *l'integrale intermedio generale:*

(1) $$u = \varphi(v, w).$$

Perciò stabiliamo le seguenti notazioni:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial u}{\partial z} = u_{x_i}, \quad \frac{\partial v}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial v}{\partial z} = v_{x_i}, \quad \frac{\partial w}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial w}{\partial z} = w_{x_i};$$

$$\frac{\partial u}{\partial p_i} = u_{p_i}, \quad \frac{\partial v}{\partial p_i} = v_{p_i}, \quad \frac{\partial w}{\partial p_i} = w_{p_i};$$

$$\begin{vmatrix} u_{x_1} & u_{x_2} & u_{x_3} \\ v_{x_1} & v_{x_2} & v_{x_3} \\ w_{x_1} & w_{x_2} & w_{x_3} \end{vmatrix} = a, \qquad \begin{vmatrix} u_{p_1} & u_{p_2} & u_{p_3} \\ v_{p_1} & v_{p_2} & v_{p_3} \\ w_{p_1} & w_{p_2} & w_{p_3} \end{vmatrix} = d,$$

$$\begin{vmatrix} u_{x_2} & u_{x_3} & u_{p_i} \\ v_{x_2} & v_{x_3} & v_{p_i} \\ w_{x_2} & w_{x_3} & w_{p_i} \end{vmatrix} = b_{1i}, \qquad \begin{vmatrix} u_{x_3} & u_{x_1} & u_{p_i} \\ v_{x_3} & v_{x_1} & v_{p_i} \\ w_{x_3} & w_{x_1} & w_{p_i} \end{vmatrix} = b_{2i}, \qquad \begin{vmatrix} u_{x_1} & u_{x_2} & u_{p_i} \\ v_{x_1} & v_{x_2} & v_{p_i} \\ w_{x_1} & w_{x_2} & w_{p_i} \end{vmatrix} = b_{3i},$$

$$\begin{vmatrix} u_{p_2} & u_{p_3} & u_{x_i} \\ v_{p_2} & v_{p_3} & v_{x_i} \\ w_{p_2} & w_{p_3} & w_{x_i} \end{vmatrix} = c_{1i}, \qquad \begin{vmatrix} u_{p_3} & u_{p_1} & u_{x_i} \\ v_{p_3} & v_{p_1} & v_{x_i} \\ w_{p_3} & w_{p_1} & w_{x_i} \end{vmatrix} = c_{2i}, \qquad \begin{vmatrix} u_{p_1} & u_{p_2} & u_{x_i} \\ v_{p_1} & v_{p_2} & v_{x_i} \\ w_{p_1} & w_{p_2} & w_{x_i} \end{vmatrix} = c_{3i}.$$

Deriviamo ora la (1) rispetto alle tre variabili indipendenti x_1, x_2, x_3; avremo:

---

di variabili, e per quelle d'ordine qualunque con due variabili indipendenti; negli altri casi devono essere soddisfatte certe equazioni di condizione.

I rapporti tra il contenuto del presente lavoro e le ricerche di Bäcklund non sarebbero difficili a porsi in luce. Assai meno facile sarebbe un raffronto col metodo di Sersawy che, per la sua molta generalità, si fonda su sviluppi lunghi e complicati, l'analisi dei quali esigerebbe assai maggior spazio di quello di cui si possa qui disporre.

Citiamo ancora:

Hamburger, *Anwendung einer gewissen Determinantenrelation auf die Integration partieller Differentialgleichungen*, Journ. für die r. u. ang. Math. C, p. 390—404.

Beudon, *Sur l'extension de la méthode de Cauchy aux systèmes d'équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque*, Comptes Rendus de l'Ac. de Paris CXII, p. 808—811.

$$u_{x_1} + p_{11}u_{p_1} + p_{12}u_{p_2} + p_{13}u_{p_3} = \frac{\partial\varphi}{\partial v}[v_{x_1} + p_{11}v_{p_1} + p_{12}v_{p_2} + p_{13}v_{p_3}] + \frac{\partial\varphi}{\partial w}[w_{x_1} + p_{11}w_{p_1} + p_{12}w_{p_2} + p_{13}w_{p_3}],$$

$$u_{x_2} + p_{12}u_{p_1} + p_{22}u_{p_2} + p_{23}u_{p_3} = \frac{\partial\varphi}{\partial v}[v_{x_2} + p_{12}v_{p_1} + p_{22}v_{p_2} + p_{23}v_{p_3}] + \frac{\partial\varphi}{\partial w}[w_{x_2} + p_{12}w_{p_1} + p_{22}w_{p_2} + p_{23}w_{p_3}],$$

$$u_{x_3} + p_{13}u_{p_1} + p_{23}u_{p_2} + p_{33}u_{p_3} = \frac{\partial\varphi}{\partial v}[v_{x_3} + p_{13}v_{p_1} + p_{23}v_{p_2} + p_{33}v_{p_3}] + \frac{\partial\varphi}{\partial w}[w_{x_3} + p_{13}w_{p_1} + p_{23}w_{p_2} + p_{33}w_{p_3}],$$

da cui eliminando $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial w}$ e scambiando, per maggior evidenza, le linee colle colonne nel determinante risultante:

$$(2)\quad \begin{vmatrix} u_{x_1} + p_{11}u_{p_1} + p_{12}u_{p_2} + p_{13}u_{p_3}, & u_{x_2} + p_{12}u_{p_1} + p_{22}u_{p_2} + p_{23}u_{p_3}, & u_{x_3} + p_{13}u_{p_1} + p_{23}u_{p_2} + p_{33}u_{p_3}, \\ v_{x_1} + p_{11}v_{p_1} + p_{12}v_{p_2} + p_{13}v_{p_3}, & v_{x_2} + p_{12}v_{p_1} + p_{22}v_{p_2} + p_{23}v_{p_3}, & v_{x_3} + p_{13}v_{p_1} + p_{23}v_{p_2} + p_{33}v_{p_3}, \\ w_{x_1} + p_{11}w_{p_1} + p_{12}w_{p_2} + p_{13}w_{p_3}, & w_{x_2} + p_{12}w_{p_1} + p_{22}w_{p_2} + p_{23}w_{p_3}, & w_{x_3} + p_{13}w_{p_1} + p_{23}w_{p_2} + p_{33}w_{p_3} \end{vmatrix} = 0,$$

che è l'equazione del second' ordine cercata.

Poniamo:

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = \Delta,$$

ed indichiamo con P_{ik} il minore complementare dell' elemento p_{ik} del determinante Δ; sarà $P_{ik} = P_{ki}$. Dopo ciò si ottiene sviluppando la (2):

$$a + b_{11}p_{11} + b_{22}p_{22} + b_{33}p_{33} + (b_{12} + b_{21})p_{12} + (b_{13} + b_{31})p_{13} + (b_{23} + b_{32})p_{23} + c_{11}P_{11} + c_{22}P_{22} + c_{33}P_{33} + (c_{12} + c_{21})P_{12} + (c_{13} + c_{31})P_{13} + (c_{23} + c_{32})P_{23} + d\Delta = 0.$$

Pertanto la forma generale delle equazioni considerate è:

$$(3)\quad R_{11}p_{11} + R_{22}p_{22} + R_{33}p_{33} + 2R_{12}p_{12} + 2R_{13}p_{13} + 2R_{23}p_{23} + S_{11}P_{11} + S_{22}P_{22} + S_{33}P_{33} + 2S_{12}P_{12} + 2S_{13}P_{13} + 2S_{23}P_{23} + T\Delta + U = 0;$$

e, se (1) è l'integrale intermedio, si ha:

$$(4)\quad \frac{R_{ii}}{b_{ii}} = \frac{2R_{ik}}{b_{ik} + b_{ki}} = \frac{S_{ii}}{c_{ii}} = \frac{2S_{ik}}{c_{ik} + c_{ki}} = \frac{T}{d} = \frac{U}{a}.$$

Reciprocamente, data un' equazione (3), se si possono trovare tre funzioni u, v, w delle s, x_i e p_i le quali soddisfacciano alle (4), la (1) è un integrale intermedio della (3). Infatti in virtù delle (4) la (3) assume immediatamente la forma (2); ma, poichè il determinante funzionale delle u, v, w è nullo, deve esistere tra esse una relazione della forma (1).

Il problema della ricerca d'un integrale intermedio della (3) è ridotto così a quello della determinazione di tre funzioni u, v, w che soddisfacciano alle (4).

§ 2.

Dalle:

$$dp_i = p_{i1}dx_1 + p_{i2}dx_2 + p_{i3}dx_3$$

segue:

$$p_{11} = \frac{1}{dx_1}(dp_1 - p_{12}dx_2 - p_{13}dx_3),$$

$$p_{22} = \frac{1}{dx_2}(dp_2 - p_{23}dx_3 - p_{21}dx_1),$$

$$p_{33} = \frac{1}{dx_3}(dp_3 - p_{31}dx_1 - p_{32}dx_2).$$

Introducendo queste espressioni nelle P_{ik}, e ponendo:

$$p_{12}p_{13}dx_1 + p_{23}p_{21}dx_2 + p_{31}p_{32}dx_3 = \delta\Theta,$$

si trova:

$$P_{11} = \frac{1}{dx_2dx_3}[dp_2dp_3 - dp_2(p_{13}dx_1 + p_{23}dx_2) - dp_3(p_{12}dx_1 + p_{32}dx_3) + \delta\Theta\, dx_1],$$

$$P_{22} = \frac{1}{dx_3dx_1}[dp_3dp_1 - dp_3(p_{21}dx_2 + p_{31}dx_3) - dp_1(p_{23}dx_2 + p_{13}dx_1) + \delta\Theta\, dx_2],$$

$$P_{33} = \frac{1}{dx_1dx_2}[dp_1dp_2 - dp_1(p_{32}dx_3 + p_{12}dx_1) - dp_2(p_{31}dx_3 + p_{21}dx_2) + \delta\Theta\, dx_3],$$

$$P_{23} = \frac{1}{dx_1}[-p_{23}dp_1 + \delta\Theta],$$

$$P_{31} = \frac{1}{dx_2}[-p_{31}dp_2 + \delta\Theta],$$

$$P_{12} = \frac{1}{dx_3}[-p_{12}dp_3 + \delta\Theta],$$

inoltre:

$$\Delta = \frac{1}{dx_1}\begin{vmatrix} p_{11}dx_1 & p_{12} & p_{13} \\ p_{12}dx_1 & p_{22} & p_{23} \\ p_{13}dx_1 & p_{23} & p_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{dx_1}\begin{vmatrix} dp_1 & p_{12} & p_{13} \\ dp_2 & p_{22} & p_{23} \\ dp_3 & p_{23} & p_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{dx_1}(P_{11}dp_1 + P_{12}dp_2 + P_{13}dp_3)$$

$$= \frac{1}{dx_1dx_2dx_3}\{dp_1dp_2dp_3 - (p_{21}dx_2 + p_{31}dx_3)dp_2dp_3 - (p_{32}dx_3 + p_{12}dx_1)dp_3dp_1 - (p_{13}dx_1 + p_{23}dx_2)dp_1dp_2 + (dp_1dx_1 + dp_2dx_2 + dp_3dx_3)\delta\Theta\}.$$

Fatte queste sostituzioni, il primo membro della (3) non conterrà più altre derivate seconde che p_{12}, p_{13}, p_{23}, e sarà una funzione del 2° grado di queste. Scriviamo brevemente il risultato della sostituzione, moltiplicato per $dx_1\,dx_2\,dx_3$, così:

$$A + B + C = 0,$$

dove con A, B, C vogliamo indicare le parti del primo membro che sono rispettivamente dei gradi 0, 1, 2 rispetto alle p_{12}, p_{13}, p_{23}.

Troveremo

$$A = R_{11}dp_1dx_2dx_3 + R_{22}dp_2dx_3dx_1 + R_{33}dp_3dx_1dx_2 + S_{11}dx_1dp_2dp_3 + S_{22}dx_2dp_3dp_1 + S_{33}dx_3dp_1dp_2 + Tdp_1dp_2dp_3 + Udx_1dx_2dx_3,$$

$$C = \delta\Theta[S_{11}dx_1^2 + S_{22}dx_2^2 + S_{33}dx_3^2 + 2S_{12}dx_1dx_2 + 2S_{13}dx_1dx_3 + 2S_{23}dx_2dx_3 + T(dp_1dx_1 + dp_2dx_2 + dp_3dx_3)] = K\delta\Theta,$$

$$B = -H_1p_{23} - H_2p_{31} - H_3p_{12},$$

dove:

$$H_1 = R_{22}dx_1dx_3^2 + R_{33}dx_1dx_2^2 - 2R_{23}dx_1dx_2dx_3 + S_{11}dx_1(dp_2dx_2 + dp_3dx_3) + S_{22}dp_1dx_2^2 + S_{33}dp_1dx_3^2 + 2S_{23}dp_1dx_2dx_3 + Tdp_1(dp_2dx_2 + dp_3dx_3),$$

e H_2, H_3 si deducono da H_1 permutando ciclicamente gli indici 1, 2, 3 e convenendo che R_{ik} ed R_{ki} abbiano lo stesso significato, e così S_{ik} ed S_{ki}.

Se formiamo la combinazione $H_1 - Kdp_1$, troviamo che essa contiene il fattore dx_1; indicandone il valore con $L_1\,dx_1$, si ha:

$$L_1 = \frac{1}{dx_1}[H_1 - Kdp_1] = R_{22}dx_3^2 + R_{33}dx_2^2 - 2R_{23}dx_2dx_3 + S_{11}(-dp_1dx_1 + dp_2dx_2 + dp_3dx_3) - 2S_{12}dp_1dx_2 - 2S_{13}dp_1dx_3 - Tdp_1^2.$$

Analogamente:

$$L_2 = \frac{1}{dx_2}[H_2 - Kdp_2] = R_{33}dx_1^2 + R_{11}dx_3^2 - 2R_{31}dx_3dx_1 + S_{22}(-dp_2dx_2 + dp_3dx_3 + dp_1dx_1) - 2S_{23}dp_2dx_3 - 2S_{21}dp_2dx_1 - Tdp_2^2,$$

$$L_3 = \frac{1}{dx_3}[H_3 - Kdp_3] = R_{11}dx_2^2 + R_{22}dx_1^2 - 2R_{12}dx_1dx_2 + S_{33}(-dp_3dx_3 + dp_1dx_1 + dp_2dx_2) - 2S_{31}dp_3dx_1 - 2S_{32}dp_3dx_2 - Tdp_3^2.$$

Vogliamo dimostrare che, se:

(5) $$u = \text{cost.}, \quad v = \text{cost.}, \quad w = \text{cost.}$$

sono tre integrali del sistema d'equazioni a differenziali totali:

(6) $A=0,\ L_1=0,\ L_2=0,\ L_3=0,\ dz-p_1dx_1-p_2dx_2-p_3dx_3=0,$

le $u,\ v,\ w$ soddisfanno alle relazioni (4).

Dalla prima delle (5) segue:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial u}{\partial x_3}dx_3+\frac{\partial u}{\partial z}dz+\frac{\partial u}{\partial p_1}dp_1+\frac{\partial u}{\partial p_2}dp_2+\frac{\partial u}{\partial p_3}dp_3=0,$$

ossia, tenendo conto dell' ultima delle (6):

$$u_{x_1}dx_1+u_{x_2}dx_2+u_{x_3}dx_3+u_{p_1}dp_1+u_{p_2}dp_2+u_{p_3}dp_3=0.$$

Analogamente:

$$v_{x_1}dx_1+v_{x_2}dx_2+v_{x_3}dx_3+v_{p_1}dp_1+v_{p_2}dp_2+v_{p_3}dp_3=0,$$
$$w_{x_1}dx_1+w_{x_2}dx_2+w_{x_3}dx_3+w_{p_1}dp_1+w_{p_2}dp_2+w_{p_3}dp_3=0.$$

Risolvendo rispetto a $dp_1,\ dp_2,\ dp_3$ si ha, colle notazioni del paragrafo precedente:

$$dp_1=-\frac{1}{d}(c_{11}dx_1+c_{12}dx_2+c_{13}dx_3),$$
$$dp_2=-\frac{1}{d}(c_{21}dx_1+c_{22}dx_2+c_{23}dx_3),$$
$$dp_3=-\frac{1}{d}(c_{31}dx_1+c_{32}dx_2+c_{33}dx_3).$$

Introduciamo queste espressioni nella L_1; avremo:

$$\begin{aligned}L_1d^2=&(S_{11}c_{11}d-Tc_{11}^2)dx_1^2+(R_{33}d^2-S_{11}c_{22}d+2S_{12}c_{12}d-Tc_{12}^2)dx_2^2\\&+(R_{22}d^2-S_{11}c_{33}d+2S_{13}c_{13}d-Tc_{13}^2)dx_3^2\\&+\big(S_{11}(c_{12}-c_{21})d+2S_{12}c_{11}d-2Tc_{11}c_{12}\big)dx_1dx_2\\&+\big(S_{11}(c_{13}-c_{31})d+2S_{13}c_{11}d-2Tc_{11}c_{13}\big)dx_1dx_3\\&+\big(-2R_{23}d^2-S_{11}(c_{23}+c_{32})d+2S_{12}c_{13}d+2S_{13}c_{12}d\\&\qquad-2Tc_{12}c_{13}\big)dx_2dx_3.\end{aligned}$$

I coefficienti dei vari prodotti e potenze delle $dx_1,\ dx_2,\ dx_3$ dovendo essere nulli, si avrà:

$$S_{11}c_{11}d-Tc_{11}^2=0, \tag{7}$$
$$R_{33}d^2-S_{11}c_{22}d+2S_{12}c_{12}d-Tc_{12}^2=0, \tag{8}$$
$$R_{22}d^2-S_{11}c_{33}d+2S_{13}c_{13}d-Tc_{13}^2=0, \tag{9}$$
$$S_{11}(c_{12}-c_{21})d+2S_{12}c_{11}d-2Tc_{11}c_{12}=0, \tag{10}$$
$$S_{11}(c_{13}-c_{31})d+2S_{13}c_{11}d-2Tc_{11}c_{13}=0, \tag{11}$$
$$-2R_{23}d^2-S_{11}(c_{23}+c_{32})d+2S_{12}c_{13}d+2S_{13}c_{12}d-2Tc_{12}c_{13}=0. \tag{12}$$

Dalla (7) segue:

$$\frac{S_{11}}{c_{11}} = \frac{T}{d}; \tag{13}$$

mediante questa relazione si ha tosto dalle (10), (11):

$$\frac{2S_{12}}{c_{12}+c_{21}} = \frac{2S_{13}}{c_{13}+c_{31}} = \frac{T}{d}. \tag{14}$$

Sostituendo nelle (8), (9), esse divengono:

$$R_{33}d^2 - T(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) = 0, \quad R_{22}d^2 - T(c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31}) = 0.$$

Per trasformare queste espressioni, possiamo ricorrere alla nota identità simbolica:

$$(\alpha\beta\gamma)(\alpha\delta\varepsilon) + (\alpha\gamma\delta)(\alpha\beta\varepsilon) + (\alpha\delta\beta)(\alpha\gamma\varepsilon) = 0\ ^*). \tag{15}$$

Ponendo in questa identità, dapprima:

$$\alpha_1 = u_{p_1}, \quad \alpha_2 = v_{p_1}, \quad \alpha_3 = w_{p_1}; \quad \beta_1 = u_{p_2}, \quad \beta_2 = v_{p_2}, \quad \beta_3 = w_{p_2};$$
$$\gamma_1 = u_{p_3}, \quad \gamma_2 = v_{p_3}, \quad \gamma_3 = w_{p_3}; \quad \delta_1 = u_{x_1}, \quad \delta_2 = v_{x_1}, \quad \delta_3 = w_{x_1};$$
$$\varepsilon_1 = u_{x_2}, \quad \varepsilon_2 = v_{x_2}, \quad \varepsilon_3 = w_{x_2},$$

poscia:

$$\alpha_1 = u_{p_2}, \quad \alpha_2 = v_{p_2}, \quad \alpha_3 = w_{p_2}; \quad \beta_1 = u_{p_3}, \quad \beta_2 = v_{p_3}, \quad \beta_3 = w_{p_3};$$
$$\gamma_1 = u_{p_1}, \quad \gamma_2 = v_{p_1}, \quad \gamma_3 = w_{p_1}; \quad \delta_1 = u_{x_2}, \quad \delta_2 = v_{x_2}, \quad \delta_3 = w_{x_2};$$
$$\varepsilon_1 = u_{x_1}, \quad \varepsilon_2 = v_{x_1}, \quad \varepsilon_3 = w_{x_1},$$

si ottiene:

$$c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = db_{33}, \quad c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31} = db_{22},$$

sicchè le relazioni precedenti divengono:

$$\frac{R_{33}}{b_{33}} = \frac{R_{22}}{b_{22}} = \frac{T}{d}. \tag{16}$$

Infine la (12) diviene, in virtù delle (13), (14):

$$2R_{23}d^2 = T[(c_{31}c_{12} - c_{11}c_{32}) + (c_{21}c_{13} - c_{11}c_{23})].$$

Poniamo nella identità (15), dapprima:

$$\alpha_1 = u_{p_2}, \quad \alpha_2 = v_{p_2}, \quad \alpha_3 = w_{p_2}; \quad \beta_1 = u_{p_3}, \quad \beta_2 = v_{p_3}, \quad \beta_3 = w_{p_3};$$
$$\gamma_1 = u_{p_1}, \quad \gamma_2 = v_{p_1}, \quad \gamma_3 = w_{p_1}; \quad \delta_1 = u_{x_1}, \quad \delta_2 = v_{x_1}, \quad \delta_3 = w_{x_1};$$
$$\varepsilon_1 = u_{x_2}, \quad \varepsilon_2 = v_{x_2}, \quad \varepsilon_3 = w_{x_2},$$

poscia:

$$\alpha_1 = u_{p_3}, \quad \alpha_2 = v_{p_3}, \quad \alpha_3 = w_{p_3}; \quad \beta_1 = u_{p_1}, \quad \beta_2 = v_{p_1}, \quad \beta_3 = w_{p_1};$$
$$\gamma_1 = u_{p_2}, \quad \gamma_2 = v_{p}, \quad \gamma_3 = w_{p_2}; \quad \delta_1 = u_{x_2}, \quad \delta_2 = v_{x_2}, \quad \delta_3 = w_{x_1};$$
$$\varepsilon_1 = u_{x_1}, \quad \varepsilon_2 = v_{x_1}, \quad \varepsilon_3 = w_{x_1};$$

*) Essa si otterrebbe p. es. facendo $U_1 = \beta$, $U_2 = \gamma$, $U_3 = \delta$, $U_4 = W = \alpha$, $V = \varepsilon$ nell' identità $B' = 0$ a pag. 75 dell' opera: Study, *Methoden zur Theorie der ternären Formen*, Leipzig 1889.

otterremo:

$$c_{31}c_{12} - c_{11}c_{32} = db_{32}, \qquad c_{21}c_{13} - c_{11}c_{23} = db_{23},$$

e quindi:

$$\frac{2R_{23}}{b_{23}+b_{32}} = \frac{T}{d}. \tag{17}$$

Raccogliendo le (13), (14), (16), (17), e le analoghe che si otterrebbero mediante la considerazione delle equazioni $L_2 = 0$, $L_3 = 0$, si ha:

$$\frac{S_{ii}}{c_{ii}} = \frac{2S_{ik}}{c_{ik}+c_{ki}} = \frac{R_{ii}}{b_{ii}} = \frac{2R_{ik}}{b_{ik}+b_{ki}} = \frac{T}{d}. \tag{18}$$

Dobbiamo ancora introdurre le espressioni trovate per dp_1, dp_2, dp_3 nell' equazione $A = 0$. Il suo primo membro diventa una forma del 3^0 grado nei differenziali dx_1, dx_2, dx_3, ed è facile verificare che i coefficienti dei termini dx_i^3, $dx_i^2 dx_k$ sono identicamente nulli in virtù delle (18). L'unico restante, cioè il coefficiente di $dx_1 dx_2 dx_3$, è:

$$\begin{aligned}
&- R_{11}c_{11}d^2 - R_{22}c_{22}d^2 - R_{33}c_{33}d^2 + S_{11}(c_{22}c_{33} + c_{23}c_{32})\,d \\
&+ S_{22}(c_{33}c_{11} + c_{31}c_{13})\,d + S_{33}(c_{11}c_{22} + c_{12}c_{21})\,d \\
&- T(c_{11}c_{22}c_{33} + c_{11}c_{23}c_{32} + c_{12}c_{21}c_{33} + c_{12}c_{23}c_{31} + c_{13}c_{21}c_{32} + c_{13}c_{22}c_{31}) \\
&+ Ud^3.
\end{aligned}$$

Mediante le (18) esso diviene:

$$\begin{aligned}
T\{&- b_{11}c_{11}d - b_{22}c_{22}d - b_{33}c_{33}d + c_{11}(c_{22}c_{33} + c_{23}c_{32}) \\
&+ c_{22}(c_{33}c_{11} + c_{31}c_{13}) + c_{33}(c_{11}c_{22} + c_{12}c_{21}) \\
&- (c_{11}c_{22}c_{33} + c_{11}c_{23}c_{32} + c_{12}c_{21}c_{33} + c_{12}c_{23}c_{31} + c_{13}c_{21}c_{32} + c_{13}c_{22}c_{31})\} \\
&+ Ud^3,
\end{aligned}$$

ossia:

$$T\left\{c_{11}\begin{pmatrix}-b_{11}d + c_{22}c_{33}\\ -c_{23}c_{32}\end{pmatrix} + c_{22}\begin{pmatrix}-b_{22}d + c_{33}c_{11}\\ -c_{31}c_{13}\end{pmatrix} + c_{33}\begin{pmatrix}-b_{33}d + c_{11}c_{22}\\ -c_{11}c_{21}\end{pmatrix} - \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{vmatrix}\right\} + Ud^3.$$

Ora, come si è trovato poc'anzi, le quantità che moltiplicano c_{11}, c_{22}, c_{33} sono nulle, sicchè eguagliando a zero il coefficiente considerato si ha:

$$Ud^3 = T\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{vmatrix}.$$

Indichiamo per un momento con ξ_i, η_i, ζ_i i minori complementari degli elementi u_{p_i}, v_{p_i}, w_{p_i} del determinante d; sarà:

$$c_{ik} = \xi_i u_{x_k} + \eta_i v_{x_k} + \zeta_i w_{x_k},$$

e il determinante che moltiplica T nell' ultima equazione risulterà essere il prodotto dei due determinanti:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u_{x_1} & u_{x_2} & u_{x_3} \\ v_{x_1} & v_{x_2} & v_{x_3} \\ w_{x_1} & w_{x_2} & w_{x_3} \end{vmatrix}.$$

Il secondo di questi è a, il primo ha il valore d^2, sicchè si ha infine:

$$\frac{U}{a} = \frac{T}{d}. \tag{19}$$

Le equazioni (18), (19), che sono identiche alle (4), provano il nostro asserto.

§ 3.

Ridotto così il problema all' integrazione del sistema (6) d'equazioni a differenziali totali, conviene esaminare se e sotto quali condizioni sia possibile trasformare questo sistema in uno o più sistemi d'equazioni *lineari* a differenziali totali.

Cerchiamo di formare una combinazione lineare di due delle L, p. es. L_2 ed L_3, la quale sia decomponibile in due fattori lineari. È chiaro che, affinchè ciò abbia luogo, devono anzitutto elidersi i due termini contenenti dp_1; quindi, in generale, l'unica combinazione che potrà essere decomponibile sarà $-S_{33}L_2 + S_{22}L_3$. Poniamo:

$$\begin{aligned} -S_{33}L_2 + S_{22}L_3 = {} & (S_{22}R_{22} - S_{33}R_{33})dx_1^2 + S_{22}R_{11}dx_2^2 - S_{33}R_{11}dx_3^2 \\ & + S_{33}Tdp_2^2 - S_{22}Tdp_3^2 - 2S_{22}R_{12}dx_1dx_2 \\ & + 2S_{33}R_{13}dx_1dx_3 + 2S_{33}S_{12}dx_1dp_2 \\ & - 2S_{22}S_{13}dx_1dp_3 + 2S_{22}S_{33}dx_2dp_2 \\ & - 2S_{22}S_{23}dx_2dp_3 + 2S_{33}S_{23}dx_3dp_2 \\ & - 2S_{22}S_{33}dx_3dp_3 \\ = {} & \frac{S_{22}}{T}(\alpha\,dx_1 + \beta\,dx_2 + \gamma\,dx_3 + Tdp_2 + \delta\,dp_3) \\ & (\alpha'dx_1 + \beta'dx_2 + \gamma'dx_3 + Tdp_2 + \delta'dp_3). \end{aligned}$$

Si avranno le seguenti equazioni di condizione:

$$\frac{S_{22}}{T}\alpha\alpha' = S_{22}R_{22} - S_{33}R_{33}, \tag{20}$$

$$\frac{S_{22}}{T}\beta\beta' = S_{22}R_{11}, \tag{21}$$

$$\frac{S_{22}}{T}\gamma\gamma' = -S_{33}R_{11}, \tag{22}$$

(23) $$\frac{S_{22}}{T}\delta\delta' = -S_{22}T,$$

(24) $$\frac{S_{22}}{T}(\alpha\beta' + \alpha'\beta) = -2S_{22}R_{12},$$

(25) $$\frac{S_{22}}{T}(\alpha\gamma' + \alpha'\gamma) = 2S_{33}R_{13},$$

(26) $$S_{33}(\alpha + \alpha') = 2S_{33}S_{12},$$

(27) $$\frac{S_{22}}{T}(\alpha\delta' + \alpha'\delta) = -2S_{22}S_{13},$$

(28) $$\frac{S_{22}}{T}(\beta\gamma' + \beta'\gamma) = 0,$$

(29) $$S_{33}(\beta + \beta') = 2S_{22}S_{23},$$

(30) $$\frac{S_{22}}{T}(\beta\delta' + \beta'\delta) = -2S_{22}S_{23},$$

(31) $$S_{33}(\gamma + \gamma') = 2S_{33}S_{23},$$

(32) $$\frac{S_{22}}{T}(\gamma\delta' + \gamma'\delta) = -2S_{22}S_{33},$$

(33) $$S_{33}(\delta + \delta') = 0.$$

Facciamo:

$$\frac{S_{22}}{S_{33}} = \lambda_1^2.$$

Dalle (23), (33) segue:

$$\delta = \lambda_1 T, \quad \delta' = -\lambda_1 T.$$

Dopo ciò le (26), (27) divengono:

$$\alpha + \alpha' = 2S_{12}, \quad -\alpha + \alpha' = -\frac{2S_{13}S_{22}}{S_{33}\lambda_1} = -2\lambda_1 S_{13},$$

e si ha di qui:

$$\alpha = S_{12} + \lambda_1 S_{13}, \quad \alpha' = S_{12} - \lambda_1 S_{13}.$$

Dalle (29), (30) segue:

$$\beta + \beta' = 2S_{22}, \quad -\beta + \beta' = -\frac{2S_{22}S_{23}}{S_{33}\lambda_1} = -2\lambda_1 S_{23},$$

quindi:

$$\beta = S_{22} + \lambda_1 S_{23}, \quad \beta' = S_{22} - \lambda_1 S_{23}.$$

E dalle (31), (32):

$$\gamma + \gamma' = 2S_{23}, \quad -\gamma + \gamma' = -\frac{2S_{22}}{\lambda_1} = -2\lambda_1 S_{33},$$

quindi:

$$\gamma = S_{32} + \lambda_1 S_{33} = \frac{1}{\lambda_1}(S_{22} + \lambda_1 S_{23}) = \frac{\beta}{\lambda_1},$$

$$\gamma' = S_{32} - \lambda_1 S_{33} = -\frac{1}{\lambda_1}(S_{22} - \lambda_1 S_{23}) = -\frac{\beta'}{\lambda_1}.$$

Pertanto la (28) è soddisfatta identicamente, e la (22) è una conseguenza della (21).

Restano le (20), (21), (24), (25). Introducendo le espressioni trovate, si ha dalla (20):

$$S_{33}(S_{12}^2 - \lambda_1^2 S_{13}^2) = T(S_{22}R_{22} - S_{33}R_{33}),$$

ossia, tenendo conto del valore di λ_1^2 e aggiungendo e togliendo nel primo membro $S_{11}S_{22}S_{33}$:

$$S_{22}(S_{11}S_{33} - S_{13}^2) - S_{33}(S_{11}S_{22} - S_{12}^2) = T(S_{22}R_{22} - S_{33}R_{33}).$$

Così dalle (21), (24), (25):

$$S_{22}S_{33} - S_{23}^2 = R_{11}T, \quad S_{12}S_{33} - S_{13}S_{23} = +R_{12}T,$$
$$S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22} = R_{13}T.$$

Per scrivere queste equazioni, ed altre che troveremo in seguito, sotto forma più breve, noi porremo:

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = V, \qquad \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} = W,$$

e denoteremo con X_{ik} i minori del primo determinante, con Y_{ik} quelli del secondo. Le relazioni trovate prendono allora la forma seguente:

$$S_{22}\left[\frac{Y_{22}}{T} - R_{22}\right] = S_{33}\left[\frac{Y_{33}}{T} - R_{33}\right], \tag{34}$$

$$\frac{Y_{11}}{R_{11}} = \frac{Y_{12}}{R_{12}} = \frac{Y_{13}}{R_{13}} = T. \tag{35}$$

Si ha poi:

$$-S_{33}L_2 + S_{22}L_3 = \frac{S_{23}}{T}\{(S_{21} + \lambda_1 S_{31})dx_1 + (S_{22} + \lambda_1 S_{32})dx_2 + (S_{23} + \lambda_1 S_{33})dx_3 + T\,dp_2 + \lambda_1 T\,dp_3\}$$
$$\times\{(S_{21} - \lambda_1 S_{31})dx_1 + (S_{22} - \lambda_1 S_{32})dx_2 + (S_{23} - \lambda_1 S_{33})dx_3 + T\,dp_2 - \lambda_1 T\,dp_3\}.$$

Affinchè anche le combinazioni analoghe:

$$-S_{11}L_3 + S_{33}L_1, \quad -S_{22}L_1 + S_{11}L_{22}$$

sieno decomponibili, dovranno essere soddisfatte le condizioni corrispondenti alle (34), (35). Le seconde possono scriversi:

$$\frac{Y_{ik}}{R_{ik}} = T; \quad (i, k = 1, 2, 3) \tag{36}$$

se queste sono soddisfatte lo è pure la (34), e così le sue analoghe.

Ponendo:

$$\frac{S_{23}}{S_{11}} = \lambda_2^2, \qquad \frac{S_{11}}{S_{23}} = \lambda_3^2,$$

donde segue:

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \pm 1,$$

si avrà:

$$-S_{11}L_3+S_{33}L_1=\frac{S_{11}}{T}\{(S_{31}+\lambda_2 S_{11})dx_1+(S_{32}+\lambda_2 S_{12})dx_2$$
$$+(S_{33}+\lambda_2 S_{13})dx_3+T\,dp_3+\lambda_2 T\,dp_1\}$$
$$\times\{(S_{31}-\lambda_2 S_{11})dx_1+(S_{32}-\lambda_2 S_{12})dx_2$$
$$+(S_{33}-\lambda_2 S_{13})dx_3+T\,dp_3-\lambda_2 T\,dp_1\},$$
$$-S_{22}L_1+S_{11}L_2=\frac{S_{22}}{T}\{(S_{11}+\lambda_3 S_{21})dx_1+(S_{12}+\lambda_3 S_{22})dx_2$$
$$+(S_{13}+\lambda_3 S_{23})dx_3+T\,dp_1+\lambda_3 T\,dp_2\}$$
$$\times\{(S_{11}-\lambda_3 S_{21})dx_1+(S_{12}-\lambda_3 S_{22})dx_2$$
$$+(S_{13}-\lambda_3 S_{22})\,dx_3+T\,dp_1-\lambda_3 T\,dp_2\}.$$

Quindi al sistema d'equazioni $L_1=0$, $L_2=0$, $L_3=0$ potrà sostituirsi il sistema lineare:

$$(S_{21}+\lambda_1 S_{31})\,dx_1+(S_{22}+\lambda_1 S_{32})dx_2+(S_{23}+\lambda_1 S_{33})dx_3+T\,dp_2$$
$$+\lambda_1 T\,dp_3=0,$$
$$(S_{31}+\lambda_2 S_{11})dx_1+(S_{32}+\lambda_2 S_{12})dx_2+(S_{33}+\lambda_2 S_{13})dx_3+T\,dp_3$$
$$+\lambda_2 T\,dp_1=0,$$
$$(S_{11}+\lambda_3 S_{21})dx_1+(S_{12}+\lambda_3 S_{22})dx_2+(S_{13}+\lambda_3 S_{23})dx_3+T\,dp_1$$
$$+\lambda_3 T\,dp_2=0,$$

dove i segni di λ_1, λ_2, λ_3 sono affatto arbitrari.

Moltiplichiamo queste equazioni rispettivamente per $-\lambda_3$, $\lambda_3\lambda_1$, 1 e sommiamo; avremo:

$$(1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3)\,[S_{11}dx_1+S_{12}dx_2+S_{13}dx_3+T\,dp_1]=0;$$

questa relazione sarà soddisfatta per tutte le combinazioni di segni delle λ_1, λ_2, λ_3, se si annulla il secondo fattore.

Tenendo conto anche dei risultati analoghi, si vede che il sistema $L_1=0$, $L_2=0$, $L_3=0$, quando si verificano le condizioni (36), è soddisfatto ogniqualvolta lo sia l' unico sistema lineare:

$$(37)\qquad\begin{cases}dp_1+\frac{1}{T}\,[S_{11}dx_1+S_{12}dx_2+S_{13}dx_3]=0,\\ dp_2+\frac{1}{T}\,[S_{21}dx_1+S_{22}dx_2+S_{23}dx_3]=0,\\ dp_3+\frac{1}{T}\,[S_{31}dx_1+S_{32}dx_2+S_{33}dx_3]=0.\end{cases}$$

Sostituendo in $A=0$, sviluppando e riducendo coll' aiuto delle (36), quest' equazione prende la forma:

$$\frac{1}{T^2}[-(R_{11}S_{11}+R_{22}S_{22}+R_{33}S_{33})\,T+S_{11}(S_{22}S_{33}+S_{23}^2)$$
$$+S_{22}(S_{33}S_{11}+S_{31}^2)+S_{33}(S_{11}S_{22}+S_{12}^2)$$
$$-(S_{11}S_{22}S_{33}+S_{11}S_{23}^2+S_{12}S_{23}S_{13}+S_{12}^2S_{33}+S_{13}S_{12}S_{23}+S_{13}^2S_{22})$$
$$+UT^2]\,dx_1\,dx_2\,dx_3=0.$$

La quantità tra parentesi quadre può scriversi:

$$-(R_{11}S_{11}+R_{22}S_{22}+R_{33}S_{33})T+S_{11}(S_{22}S_{33}-S_{23}^2)+S_{22}(S_{33}S_{11}-S_{31}^2)$$
$$+S_{33}(S_{11}S_{22}-S_{12}^2)-W+UT^2;$$

ma in virtù delle (36) tutti i termini meno i due ultimi si distruggono.

Quindi l'equazione $A=0$ sarà identicamente soddisfatta se:

$$W=UT^2; \tag{38}$$

in caso diverso, essa si decomporrebbe nelle tre: $dx_1=0$, $dx_2=0$, $dx_3=0$, e si avrebbe, oltre alle (37) ed alla $ds-\sum_{i=1}^{3}p_i\,dx_i=0$, un' altra equazione, cioè 5 equazioni indipendenti, il che è impossibile.

Dalle (36), (38) possono dedursi altre equazioni che sono, in qualche modo, ad esse reciproche. Denotiamo per un istante con $|Y|$ il determinante delle Y_{ik}, con $\overline{Y}_{ik}$ il minore complementare di Y_{ik} in questo determinante; segue dalle (36):

$$\overline{Y}_{ik}=T^2X_{ik},\quad |Y|=T^3V.$$

Ma $\overline{Y}_{ik}=WS_{ik}$, $|Y|=W^2$, quindi si ha:

$$WS_{ik}=T^2X_{ik},\quad W^2=T^3V,$$

ossia per la (38):

$$\frac{X_{ik}}{S_{ik}}=U,\quad V=TU^2. \tag{39}$$

Su questa reciprocità ritorneremo più innanzi.

§ 4.

Il sistema d'equazioni a differenziali totali (37), al quale si deve intendere aggiunta l'equazione:

$$ds-p_1dx_1-p_2dx_2-p_3dx_3=0,$$

può trasformarsi in un sistema d'equazioni a derivate parziali*).

Sia $f(x_1, x_2, x_3, s, p_1, p_2, p_3)=$ cost. un integrale del sistema (37); dovrà essere in virtù del sistema stesso:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3+\frac{\partial f}{\partial s}ds+\frac{\partial f}{\partial p_1}dp_1+\frac{\partial f}{\partial p_2}dp_2$$
$$+\frac{\partial f}{\partial p_3}dp_3=0,$$

cioè, ponendo nel primo membro in luogo di ds, dp_1, dp_2, dp_3 le loro espressioni mediante dx_1, dx_2, dx_3, i coefficienti di questi ultimi differenziali dovranno essere nulli. Mediante tale sostituzione si ottiene:

*) Cfr. Goursat, op. cit. p. 57 e segg.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}\,dx_3+\frac{\partial f}{\partial z}\sum_{i=1}^{3}p_i dx_i-\frac{1}{T}\sum_{h=1}^{3}\left[\frac{\partial f}{\partial p_h}\sum_{i=1}^{3}S_{ih}\,dx_i\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{1}{T}\sum_{h=1}^{3}S_{ih}\,\frac{\partial f}{\partial p_h}\right]dx_i=0.$$

Si ha quindi il sistema:

$$(40)\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+p_1\dfrac{\partial f}{\partial z}-\dfrac{1}{T}\left[S_{11}\dfrac{\partial f}{\partial p_1}+S_{12}\dfrac{\partial f}{\partial p_2}+S_{13}\dfrac{\partial f}{\partial p_3}\right]=0,\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial x_2}+p_2\dfrac{\partial f}{\partial z}-\dfrac{1}{T}\left[S_{21}\dfrac{\partial f}{\partial p_1}+S_{22}\dfrac{\partial f}{\partial p_2}+S_{23}\dfrac{\partial f}{\partial p_3}\right]=0,\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial x_3}+p_3\dfrac{\partial f}{\partial z}-\dfrac{1}{T}\left[S_{31}\dfrac{\partial f}{\partial p_1}+S_{32}\dfrac{\partial f}{\partial p_2}+S_{33}\dfrac{\partial f}{\partial p_3}\right]=0.\end{cases}$$

Risolvendo rispetto a $\frac{\partial f}{\partial p_1}$, $\frac{\partial f}{\partial p_2}$, $\frac{\partial f}{\partial p_3}$, e tenendo conto delle (36), (38), si può porre il sistema sotto la forma:

$$(41)\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial p_1}-\dfrac{1}{U}\left[R_{11}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+p_1\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)+R_{12}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}+p_2\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\right.\\\qquad\left.+R_{13}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_3}+p_3\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\right]=0,\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial p_2}-\dfrac{1}{U}\left[R_{21}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+p_1\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)+R_{22}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}+p_2\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\right.\\\qquad\left.+R_{23}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_3}+p_3\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\right]=0,\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial p_3}-\dfrac{1}{U}\left[R_{31}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+p_1\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)+R_{32}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}+p_2\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\right.\\\qquad\left.+R_{33}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_3}+p_3\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\right]=0.\end{cases}$$

Una proprietà importante del sistema (40) o (41) è la seguente: *Due integrali qualunque del sistema sono tra loro in involuzione.*

Sieno u, v due integrali del sistema (40); si avrà:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{T}\sum_{h=1}^{3}S_{ih}\,\frac{\partial u}{\partial p_h},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{1}{T}\sum_{h=1}^{3}S_{ih}\,\frac{\partial v}{\partial p_h},$$

quindi:

$$[u, v] = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial p_i}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \frac{\partial v}{\partial p_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big]$$

$$= \frac{1}{T}\left[\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} S_{ik} \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} S_{ik} \frac{\partial v}{\partial p_i} \frac{\partial u}{\partial p_k}\right]$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}(S_{ik} - S_{ki}) \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial p_k} = 0.$$

Il sistema (40) ammette tutt' al più 4 integrali indipendenti. Ora può dimostrarsi che, se esso ne ammette tre, ne ammette pure un quarto.

Sieno i tre integrali u, v, w. Poichè essi sono tra loro in involuzione, esiste una quarta funzione ϱ in involuzione con ciascuno di essi, cioè tale che:

$$[\varrho, u] = 0, \quad [\varrho, v] = 0, \quad [\varrho, w] = 0.$$

Sviluppando, e riprendendo le notazioni del § 1, si ha:

$$\sum_{i=1}^{3}(\varrho_{p_i} u_{x_i} - \varrho_{x_i} u_{p_i}) = 0, \quad \sum_{i=1}^{3}(\varrho_{p_i} v_{x_i} - \varrho_{x_i} v_{p_i}) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{3}(\varrho_{p_i} w_{x_i} - \varrho_{x_i} w_{p_i}) = 0.$$

Risolviamo rispetto a ϱ_{x_1}, ϱ_{x_2}, ϱ_{x_3}; otterremo:

$$\varrho_{x_i} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{3} c_{ik}\, \varrho_{p_k} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{42}$$

Ora, se u, v, w sono tre integrali del sistema (40), o, ciò che è lo stesso, del sistema (37), essi soddisfanno alle (4); di più si può dimostrare che:

$$c_{ik} = c_{ki}, \quad b_{ik} = b_{ki}.$$

Si ha infatti:

$$c_{12} = \begin{vmatrix} u_{p_1} & u_{p_2} & u_{x_3} \\ v_{p_1} & v_{p_2} & v_{x_3} \\ w_{p_1} & w_{p_2} & w_{x_3} \end{vmatrix} = \frac{1}{T}\begin{vmatrix} u_{p_1} & u_{p_2} & S_{21}u_{p_1} + S_{22}u_{p_2} + S_{23}u_{p_3} \\ v_{p_1} & v_{p_2} & S_{21}v_{p_1} + S_{22}v_{p_2} + S_{23}v_{p_3} \\ w_{p_1} & w_{p_2} & S_{21}w_{p_1} + S_{22}w_{p_2} + S_{23}w_{p_3} \end{vmatrix} = \frac{S_{12}d}{T},$$

$$c_{21} = \begin{vmatrix} u_{p_2} & u_{p_1} & u_{x_1} \\ v_{p_2} & v_{p_1} & v_{x_1} \\ w_{p_2} & w_{p_1} & w_{x_1} \end{vmatrix} = \frac{1}{T}\begin{vmatrix} u_{p_2} & u_{p_1} & S_{11}u_{p_1} + S_{12}u_{p_2} + S_{13}u_{p_3} \\ v_{p_2} & v_{p_1} & S_{11}v_{p_1} + S_{12}v_{p_2} + S_{13}v_{p_3} \\ w_{p_2} & w_{p_1} & S_{11}w_{p_1} + S_{12}w_{p_2} + S_{13}w_{p_3} \end{vmatrix} = \frac{S_{12}d}{T} = c_{12};$$

e analoga sarebbe la dimostrazione per le altre c_{ik} e per le b_{ik}.

Dopo ciò la (42) può scriversi:

$$\varphi_{x_i} = \frac{1}{T} \sum_{h=1}^{3} S_{ih}\, \varphi_{p_h}; \quad (i = 1, 2, 3)$$

ne risulta che φ è un integrale del sistema (40).

Se il sistema (40) è completo, cioè ammette 4 integrali indipendenti u, v, w, φ, posto:

$$u = A_1, \quad v = A_2, \quad w = A_3, \quad \varphi = A_4,$$

dove A_1, A_2, A_3, A_4 sono costanti arbitrarie, ed eliminando p_1, p_2, p_3, si otterrà un integrale dell' equazione proposta con 4 costanti arbitrarie:

$$z = F(x_1, x_2, x_3, A_1, A_2, A_3, A_4). \tag{43}$$

Vogliamo mostrare come da esso possa dedursi un integrale con tre funzioni arbitrarie*).

Indichiamo con F_{x_i}, $F_{x_i x_h}$ le derivate parziali prime e seconde della funzione F, e supponiamo che dalla (43) e dalle:

$$p_i = F_{x_i}(x_1, x_2, x_3, A_1, A_2, A_3, A_4) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

si deduca risolvendo rispetto alle A_i:

$$A_i = \varphi_i(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3). \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Poniamo ancora:

$$F_{x_i x_h}(x_1, x_2, x_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = \psi_{ih}(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3).$$
$$(i, h = 1, 2, 3)$$

Se imaginiamo di avere un' equazione della forma (3) tale che, applicando ad essa il metodo sviluppato, si ottenga l'integrale (43), risulta dalle (37) che dovrà essere:

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_h} = -\frac{S_{ih}}{T}.$$

Ma:

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_h} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_h} = F_{x_i x_h}(x_1, x_2, x_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$$
$$= \psi_{ih}(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3),$$

quindi:

$$-\frac{S_{ih}}{T} = \psi_{ih}.$$

Sia Ω il determinante delle ψ_{ih}, Ψ_{ih} il minore complementare di ψ_{ih} in questo determinante; avremo:

$$\frac{Y_{ih}}{T^2} = \Psi_{ih}, \qquad -\frac{W}{T^3} = \Omega,$$

*) Goursat (op. cit., p. 13 e segg.) tratta la stessa questione per le equazioni a due variabili indipendenti, ma valendosi quasi esclusivamente di considerazioni geometriche.

ossia per le (36), (38):

$$\frac{R_{ik}}{T} = \Psi_{ik}, \qquad -\frac{U}{T} = \Omega.$$

Pertanto l'equazione del second' ordine, la cui integrazione secondo il nostro metodo ci conduce alla (43), è:

$$\Psi_{11}p_{11} + \Psi_{22}p_{22} + \Psi_{33}p_{33} + 2\Psi_{12}p_{12} + 2\Psi_{13}p_{13} + 2\Psi_{23}p_{23}$$
$$- \psi_{11}P_{11} - \psi_{22}P_{22} - \psi_{33}P_{33} - 2\psi_{12}P_{12} - 2\psi_{13}P_{13} - 2\psi_{23}P_{23}$$
$$+ \Delta - \Omega = 0.$$

È facile vedere che essa può scriversi sotto la forma seguente:

$$(44) \qquad \begin{vmatrix} p_{11} - \psi_{11} & p_{12} - \psi_{12} & p_{13} - \psi_{13} \\ p_{12} - \psi_{12} & p_{22} - \psi_{22} & p_{23} - \psi_{23} \\ p_{13} - \psi_{13} & p_{23} - \psi_{23} & p_{33} - \psi_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Ora nella (43) sostituiamo ad A_2, A_3, A_4 tre funzioni arbitrarie di A_1, $\lambda(A_1)$, $\mu(A_1)$, $\nu(A_1)$, e, posto:

$$(45) \quad z = F\left(x_1, x_2, x_3, A_1, \lambda(A_1), \mu(A_1), \nu(A_1)\right) = G(x_1, x_2, x_3, A_1),$$

determiniamo A_1 come funzione di x_1, x_2, x_3 mediante la condizione:

$$(46) \qquad \frac{\partial G}{\partial A_1} = 0.$$

Avremo:

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_i} = \frac{\partial G}{\partial x_i},$$

$$p_{ii} = \frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_i},$$

$$p_{ik} = \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 G}{\partial x_k \partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_i};$$

ma:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_k} = F_{x_i x_k} = \psi_{ik}, \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

quindi introducendo nel primo membro della (44) le espressioni trovate delle p_{ik} esso diviene:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x_2 \partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 G}{\partial x_2 \partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 G}{\partial x_2 \partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x_3 \partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 G}{\partial x_3 \partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 G}{\partial x_3 \partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_3} \end{vmatrix}.$$

Questo determinante è identicamente nullo; quindi la (45), dove A_1 è determinata dalla condizione (46), è un integrale dell' equazione (44).

Trovato adunque un integrale (43), si ha da esso immediatamente un integrale con 3 funzioni arbitrarie:

$$s = F\big(x_1, x_2, x_3, A_1, \lambda(A_1), \mu(A_1), \nu(A_1)\big),$$

dove la funzione A_1 di x_1, x_2, x_3 è determinata dalla condizione:

$$\frac{\partial F}{\partial A_1} + \frac{\partial F}{\partial \lambda(A_1)}\lambda'(A_1) + \frac{\partial F}{\partial \mu(A_1)}\mu'(A_1) + \frac{\partial F}{\partial \nu(A_1)}\nu'(A_1) = 0.$$

Se il sistema (40) non è completo, esso ammetterà tutt' al più due integrali u, v. Integrando il sistema $u =$ cost., $v =$ cost. (o, nel caso che esista un solo integrale u, l'equazione $u =$ cost.), si otterrà un integrale con una sola funzione arbitraria.

§ 5.

Abbiamo supposto tacitamente che taluni dei coefficienti dell' equazione (3), p. es. T, non sieno nulli. Vogliamo ora dire qualche cosa sopra questi casi d' eccezione.

È noto che, se con s', x_1', x_2', x_3' si indicano delle nuove variabili, e con p_i' le derivate parziali della s' rispetto alle x_i', ponendo:

$$s' = \sum_{i=1}^{3} p_i x_i - s, \quad x_i' = p_i, \tag{47}$$

se ne deduce:

$$s = \sum_{i=1}^{3} p_i' x_i' - s', \quad x_i = p_i'. \tag{48}$$

Le (47), (48) rappresentano la *trasformazione di Legendre*. Denotiamo con p_{ik}' le derivate seconde della s' rispetto alle x_i', e con P_{ik}, Δ' le espressioni analoghe alle P_{ik}, Δ. Avremo:

$$dx_i' = dp_i = p_{i1}\,dx_1 + p_{i2}\,dx_2 + p_{i3}\,dx_3$$
$$= \sum_{k=1}^{3} p_{ik}(p_{k1}'\,dx_1' + p_{k2}'\,dx_2' + p_{k3}'\,dx_3'),$$

quindi imaginando scritta questa relazione pei tre valori 1, 2, 3 di i ed eguagliando i coefficienti di dx_1', dx_2', dx_3':

$$\sum_{k=1}^{3} p_{1k}p_{k1}' = 1, \quad \sum_{k=1}^{3} p_{1k}p_{k2}' = 0, \quad \sum_{k=1}^{3} p_{1k}p_{k3}' = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{3} p_{2k}p_{k1}' = 0, \quad \sum_{k=1}^{3} p_{2k}p_{k2}' = 1, \quad \sum_{k=1}^{3} p_{2k}p_{k3}' = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{3} p_{3k}p_{k1}' = 0, \quad \sum_{k=1}^{3} p_{3k}p_{k2}' = 0, \quad \sum_{k=1}^{3} p_{3k}p_{k3}' = 1.$$

Se risolviamo questi tre sistemi d' equazioni, otteniamo:

$$p_{ik} = \frac{P'_{ik}}{\Delta'}, \qquad (i, h = 1, 2, 3)$$

da cui, per note proprietà dei determinanti:

$$P_{ik} = \frac{p'_{ik}}{\Delta'}, \qquad \Delta = \frac{1}{\Delta'},$$

e reciprocamente:

$$p'_{ik} = \frac{P_{ik}}{\Delta}, \qquad P'_{ik} = \frac{p_{ik}}{\Delta}, \qquad \Delta' = \frac{1}{\Delta}.$$

In virtù di queste relazioni l'equazione (3), moltiplicata per Δ', diviene:

$$\begin{aligned} &R_{11} P'_{11} + R_{22} P'_{22} + R_{33} P'_{33} + 2 R_{12} P'_{12} + 2 R_{13} P'_{13} + 2 R_{23} P'_{23} \\ &+ S_{11} p'_{11} + S_{22} p'_{22} + S_{33} p'_{33} + 2 S_{12} p'_{12} + 2 S_{13} p'_{13} + 2 S_{23} p'_{23} \\ &+ T + U\Delta' = 0, \end{aligned}$$

dove nei coefficienti devono intendersi introdotte le nuove variabili.

Di qui si vede che la trasformazione di Legendre muta un' equazione del tipo (3) in un' altra del medesimo tipo; e che, se si rappresenta l'equazione trasformata con:

$$\begin{aligned} (49) \quad &R'_{11} p'_{11} + R'_{22} p'_{22} + R'_{33} p'_{33} + 2 R'_{12} p'_{12} + 2 R'_{13} p'_{13} + 2 R'_{23} p'_{23} \\ &+ S'_{11} P'_{11} + S'_{22} P'_{22} + S'_{33} P'_{33} + 2 S'_{12} P'_{12} + 2 S'_{13} P'_{13} \\ &+ 2 S'_{23} P'_{23} + T'\Delta' + U' = 0, \end{aligned}$$

si hanno le relazioni:

$$(50) \quad R_{ik} = S'_{ik}, \; S_{ik} = R'_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3); \qquad T = U', \quad U = T'.$$

Pertanto la reciprocità che abbiamo osservato più sopra esprime il fatto che la trasformazione di Legendre muta un' equazione integrabile col nostro metodo in un' equazione della stessa natura. Infatti mediante le (50) le (36), (38) divengono:

$$\frac{X'_{ik}}{S'_{ik}} = U', \quad V' = T' U'^2,$$

le quali (cfr. le eq. (39)) sono appunto le condizioni d' integrabilità della (49).

Se nell' equazione data T è nullo, ma non lo è U, noi potremo mediante la trasformazione di Legendre ottenere da essa un' altra equazione in cui T' non è nullo.

Applicando il nostro metodo all' equazione trasformata, si otterrebbe (cfr. eq. (37)):

$$dp'_i + \frac{1}{T'} [S'_{i1} dx_1' + S'_{i2} dx_2' + S'_{i3} dx_3'] = 0, \quad (i = 1, 2, 3)$$

e quindi per le (49), (50):

$$dx_i + \frac{1}{U}\left[R_{i1}\,dp_1 + R_{i2}\,dp_2 + R_{i3}\,dp_3\right] = 0. \quad (i = 1, 2, 3)$$

Ma queste equazioni si sarebbero potute ottenere direttamente risolvendo le (37) rispetto alle dx_i e tenendo conto delle (36), (38), e ad esse corrisponde il sistema d' equazioni a derivate parziali (41). Sicchè può dirsi che questo sistema è valido anche quando $T = 0$, purchè però sia $U \neq 0$.

Un' altra trasformazione che conduce a risultati analoghi è la seguente, che può considerarsi come una generalizzazione della *trasformazione di Ampère:*

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = -p_3, \quad z' = z - p_3 x_3.$$

Se ne ricava facilmente:

$$p_1' = p_1, \quad p_2' = p_2, \quad p_3' = x_3,$$

e quindi:

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = p_3', \quad z = z' - p_3' x_3', \quad p_1 = p_1', \quad p_2 = p_2', \quad p_3 = -x_3'.$$

Inoltre:

$$dp_1' = dp_1, \quad dp_2' = dp_2, \quad dx_3' = -dp_3,$$

ossia:

$$\begin{aligned}
p_{11}'dx_1' + p_{12}'dx_2' + p_{13}'dx_3' &= p_{11}dx_1 + p_{12}dx_2 + p_{13}dx_3 \\
&= p_{11}dx_1' + p_{12}dx_2' \\
&\quad + p_{13}(p_{13}'dx_1' + p_{23}'dx_2' + p_{33}'dx_3'), \\
p_{12}'dx_1' + p_{22}'dx_2' + p_{23}'dx_3' &= p_{12}dx_1 + p_{22}dx_2 + p_{23}dx_3 \\
&= p_{12}dx_1' + p_{22}dx_2' \\
&\quad + p_{23}(p_{13}'dx_1' + p_{23}'dx_2' + p_{33}'dx_3'), \\
-dx_3' &= p_{13}dx_1 + p_{23}dx_2 + p_{33}dx_3 \\
&= p_{13}dx_1' + p_{23}dx_2' \\
&\quad + p_{33}(p_{13}'dx_1' + p_{23}'dx_2' + p_{33}'dx_3'),
\end{aligned}$$

da cui, eguagliando i coefficienti:

$$\begin{aligned}
p_{11}' &= p_{11} + p_{13}p_{13}', \quad p_{12}' = p_{12} + p_{13}p_{23}', \quad p_{13}' = +p_{13}p_{33}', \\
p_{12}' &= p_{12} + p_{13}p_{23}', \quad p_{22}' = p_{22} + p_{23}p_{23}', \quad p_{23}' = +p_{23}p_{33}', \\
0 &= p_{13} + p_{33}p_{13}', \quad 0 = p_{23} + p_{33}p_{23}', \quad 1 = -p_{33}p_{33}',
\end{aligned}$$

e risolvendo:

$$p_{11} = \frac{P_{22}'}{p_{33}'}, \quad p_{22} = \frac{P_{11}'}{p_{33}'}, \quad p_{33} = -\frac{1}{p_{33}'}, \quad p_{12} = -\frac{P_{12}'}{p_{33}'}, \quad p_{13} = \frac{p_{13}'}{p_{33}'}, \quad p_{23} = \frac{p_{23}'}{p_{33}'},$$

quindi:

$$P_{11} = -\frac{p'_{22}}{p'_{33}},\ P_{22} = -\frac{p'_{11}}{p'_{33}},\ P_{33} = \frac{\Delta'}{p'_{33}},\ P_{12} = \frac{p'_{12}}{p'_{33}},\ P_{13} = \frac{P'_{13}}{p'_{33}},$$

$$P_{23} = \frac{P'_{23}}{p'_{33}},\ \Delta = -\frac{P'_{33}}{p'_{33}}.$$

La (3) diviene adunque, moltiplicata per p'_{33}:

$$\begin{aligned} &R_{11}P'_{22} + R_{22}P'_{11} - R_{33} - 2R_{12}P'_{12} + 2R_{13}p'_{13} + 2R_{23}p'_{23} - S_{11}p'_{22} \\ &\quad - S_{22}p'_{11} + S_{33}\Delta' + 2S_{12}p'_{12} + 2S_{13}P'_{13} + 2S_{23}P'_{23} \\ &\quad - TP'_{33} + Up'_{33} = 0, \end{aligned}$$

sicchè si ha:

(51) $R_{11} = S'_{22},\ R_{22} = S'_{11},\ R_{33} = -U',\ R_{12} = -S'_{12},\ R_{13} = R'_{13},$
$R_{23} = R'_{23},\ S_{11} = -R'_{22},\ S_{22} = -R'_{11},\ S_{33} = T',\ S_{12} = R'_{12},$
$S_{13} = S'_{13},\ S_{23} = S'_{23},\ T = -S'_3,\ U = R'_{33}.$

Quindi, se $T = 0$, $U = 0$, purchè le S_{ii} non sieno tutte nulle, la trasformazione di Ampère ci permette di passare ad un' equazione in cui $T' \neq 0$.

Se alcune delle S_{ii} sono nulle, le considerazioni del § 3 non sono più valide; ma, se due delle R_{ii} e T non sono nulle, si può applicare la trasformazione d'Ampère, e si ottiene così un' equazione in cui nessuna delle S'_{ii} è nulla.

Può vedersi anche qui che, se l'equazione primitiva soddisfa alle condizioni d' integrabilità (36), (38), la stessa cosa ha luogo per l'equazione trasformata.

Si ha infatti dalle (51):

$$\begin{aligned} &Y_{11} = -R'_{11}T' - S'^2_{23},\quad Y_{22} = -R'_{22}T' - S'^2_{13},\quad Y_{33} = X'_{33}, \\ &Y_{12} = -R'_{12}T' + S'_{13}S'_{23},\quad Y_{13} = R'_{12}S'_{23} + R'_{11}S'_{13}, \\ &Y_{23} = R'_{22}S'_{23} + R'_{12}S'_{13},\quad W = T'X'_{33} + R'_{11}S'^2_{13} + 2R'_{12}S'_{13}S'_{23} + R'_{22}S'^2_{23}, \end{aligned}$$

le quali espressioni, introdotte nelle (36), ci danno:

$$\frac{-R'_{11}T' - S'^2_{23}}{S'_{22}} = \frac{-R'_{22}T' - S'^2_{13}}{S'_{11}} = \frac{X'_{33}}{-U'} = \frac{-R'_{12}T' + S'_{13}S'_{23}}{-S'_{12}} = \frac{R'_{12}S'_{23} + R'_{11}S'_{13}}{R'_{13}}$$
$$= \frac{R'_{22}S'_{23} + R'_{12}S'_{13}}{R'_{23}} = -S'_{33}.$$

Segue di qui anzitutto:

(52) $$R'_{11} = \frac{Y'_{11}}{T'},\quad R'_{22} = \frac{Y'_{22}}{T'},\quad X'_{33} = U'S'_{33},\quad R'_{12} = \frac{Y'_{12}}{T'};$$

sostituendo nel 5° e 6° membro si ha:

$$\frac{Y'_{12}S'_{23} + Y'_{11}S'_{13}}{T'R'_{13}} = \frac{Y'_{22}S'_{23} + Y'_{12}S'_{13}}{T'R'_{23}} = -S'_{33},$$

ossia, tenendo conto delle identità:

$$Y'_{11}S'_{31} + Y'_{12}S'_{32} + Y'_{13}S'_{33} = Y'_{21}S'_{31} + Y'_{22}S'_{32} + Y'_{23}S'_{33} = 0:$$

$$R'_{13} = \frac{Y'_{13}}{T'}, \quad R'_{23} = \frac{Y'_{23}}{T'}. \tag{53}$$

Dalle 1ª, 2ª e 4ª delle (52) si ha poi:

$$X'_{33} = R'_{11}R'_{22} - R'^{2}_{12} = \frac{1}{T'^{2}}(Y'_{11}Y'_{22} - Y'^{2}_{12}) = \frac{S'_{33}W'}{T'^{2}},$$

e paragonando colla 3ª:

$$W' = U'T'^{2}. \tag{54}$$

La (38) diviene:

$$T'X'_{33} + R'_{11}S'^{2}_{13} + 2R'_{12}S'_{13}S'_{23} + R'_{22}S'^{2}_{23} = R'_{33}S'^{2}_{33},$$

ossia per le (52), (54):

$$W'S'_{33} + Y'_{11}S'^{2}_{13} + 2Y'_{12}S'_{13}S'_{23} + Y'_{22}S'^{2}_{23} = R'_{33}S'_{33}T'.$$

Ora, essendo:

$$S'_{13}Y'_{13} + S'_{23}Y'_{23} + S'_{33}Y'_{33} = W',$$

si ha:

$$\begin{aligned} Y'_{11}S'^{2}_{13} + 2Y'_{12}S'_{13}S'_{23} + Y'_{22}S'^{2}_{23} &= S'_{13}(Y'_{11}S'_{31} + Y'_{12}S'_{32}) \\ &\quad + S'_{23}(Y'_{21}S'_{31} + Y'_{22}S'_{32}) \\ &= -(S'_{13}Y'_{13} + S'_{23}Y'_{23})S'_{33} = (S'_{33}Y'_{33} - W')S'_{33}, \end{aligned}$$

sicchè la relazione precedente ci dà:

$$R'_{33} = \frac{Y'_{33}}{T'}. \tag{55}$$

Le (52), (53), (54), (55) provano l' asserto.

Applicando all' equazione trasformata il nostro metodo, otterremo (eq. (37)):

$$dp_i' = -\frac{1}{T'}(S'_{i1}dx_1' + S'_{i2}dx_2' + S'_{i3}dx_3'), \quad (i = 1, 2, 3)$$

e introducendo di nuovo le variabili primitive:

$$\begin{aligned} dp_1 &= -\frac{1}{S_{33}}(R_{22}dx_1 - R_{12}dx_2 - S_{13}dp_3), \\ dp_2 &= -\frac{1}{S_{33}}(-R_{12}dx_1 + R_{11}dx_2 - S_{23}dp_3), \\ dx_3 &= -\frac{1}{S_{33}}(S_{13}dx_1 + S_{23}dx_2 + Tdp_3). \end{aligned}$$

Se risolviamo queste equazioni rispetto a dp_1, dp_2, dp_3 tenendo conto delle (39), troviamo di nuovo le (37). Si vede adunque che queste sussistono anche nei casi d' eccezione considerati.

È facile del resto dimostrare direttamente che, *ogniqualvolta le condizioni* (36) *e* (38) (*o le equivalenti* (39)) *sono soddisfatte, qualunque*

integrale del sistema (37), al quale si intende sempre aggiunta l'equazione $dz - \sum_{i=1}^{3} p_i dx_i = 0$, *è un integrale del sistema* (6). — Se infatti nelle A, L_1, L_2, L_3 in luogo delle dp_i si pongono i secondi membri delle (37), e si fa uso delle relazioni (36), (38), si verifica senza difficoltà che quelle espressioni risultano identicamente nulle.

Pertanto l'integrazione del sistema (37) ci conduce all' integrazione dell' equazione (3), sotto l' unica condizione che le (36), (38) sieno soddisfatte.

§ 6.

Quanto si è detto non esclude però che, in casi speciali, possano esistere altri modi di riduzione del sistema (6) ad uno o più sistemi lineari, sotto condizioni eventualmente diverse dalle (36), (38).

Noi svilupperemo il caso di $S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0$. Allora le L_i prendono la forma:

$$L_1 = R_{22}dx_3^2 + R_{33}dx_2^2 - 2R_{23}dx_2dx_3 - 2S_{12}dp_1dx_2 - 2S_{13}dp_1dx_3 - Tdp_1^2,$$

$$L_2 = R_{33}dx_1^2 + R_{11}dx_3^2 - 2R_{13}dx_3dx_1 - 2S_{23}dp_2dx_3 - 2S_{12}dp_2dx_1 - Tdp_2^2,$$

$$L_3 = R_{11}dx_2^2 + R_{22}dx_1^2 - 2R_{12}dx_1dx_2 - 2S_{13}dp_3dx_1 - 2S_{23}dp_3dx_2 - Tdp_3^2,$$

e ciascuna di esse può essere decomponibile nel prodotto di due fattori lineari.

Supponiamo $T \neq 0$; e sia:

$$L_1 = -\frac{1}{T}(Tdp_1 + \alpha dx_2 + \beta dx_3)(Tdp_1 + \alpha' dx_2 + \beta' dx_3).$$

Dovrà essere:

$$\alpha + \alpha' = 2S_{12},\ \beta + \beta' = 2S_{13},\ \alpha\alpha' = -TR_{33},\ \alpha\beta' + \alpha'\beta = 2TR_{23},\ \beta\beta' = -TR_{22}.$$

Dalle 1ª, 2ª, 3ª, 5ª si ottiene, indicando con ε_3, ε_2' due coefficienti che possono prendersi eguali a $+1$ o a -1:

$$\alpha = S_{12} + \varepsilon_3\sqrt{S_{12}^2 + TR_{33}},\quad \alpha' = S_{12} - \varepsilon_3\sqrt{S_{12}^2 + TR_{33}},$$

$$\beta = S_{13} + \varepsilon_2'\sqrt{S_{13}^2 + TR_{22}},\quad \beta' = S_{13} - \varepsilon_2'\sqrt{S_{13}^2 + TR_{22}}.$$

Poniamo per brevità:

$$S_{23}^2 + TR_{11} = Z_1^2,\ S_{13}^2 + TR_{22} = Z_2^2,\ S_{12}^2 + TR_{33} = Z_3^2;$$

le precedenti potranno scriversi:

$$\alpha = S_{12} + \varepsilon_3 Z_3, \quad \alpha' = S_{12} - \varepsilon_3 Z_3;$$
$$\beta = S_{13} + \varepsilon_2' Z_2, \quad \beta' = S_{13} - \varepsilon_2' Z_2,$$

e dalla 4ª equazione di condizione si avrà:

$$2TR_{23} = (S_{12}+\varepsilon_3 Z_3)(S_{13}-\varepsilon_2' Z_2) + (S_{12}-\varepsilon_3 Z_3)(S_{13}+\varepsilon_2' Z_2)$$
$$= 2S_{12}S_{13} - 2\varepsilon_3\varepsilon_2' Z_2 Z_3,$$

sicchè per la decomponibilità dovrà essere soddisfatta la condizione:

$$\varepsilon_3\varepsilon_2' Z_2 Z_3 = S_{12}S_{13} - TR_{23},$$

ossia:

$$(S_{13}^2 + TR_{22})(S_{12}^2 + TR_{33}) = (S_{12}S_{13} - R_{23}T)^2,$$

od ancora, sviluppando e riducendo:

$$S_{12}^2 R_{22} + 2S_{12}S_{13}R_{23} + S_{13}^2 R_{33} = -T(R_{22}R_{33} - R_{23}^2) = -TX_{11}.$$

Se le analoghe condizioni sono soddisfatte anche per L_2, L_3, cioè se:

$$(56)\quad \begin{cases} \varepsilon_3\varepsilon_2' Z_2 Z_3 = S_{12}S_{13} - TR_{23}, & \varepsilon_1\varepsilon_3' Z_3 Z_1 = S_{12}S_{23} - TR_{13}, \\ \varepsilon_2\varepsilon_1' Z_1 Z_2 = S_{13}S_{23} - TR_{12}, \end{cases}$$

ossia:

$$(57)\quad \begin{cases} S_{12}^2 R_{22} + 2S_{12}S_{13}R_{23} + S_{13}^2 R_{33} = -TX_{11}, \\ S_{23}^2 R_{33} + 2S_{12}S_{23}R_{13} + S_{12}^2 R_{11} = -TX_{22}, \\ S_{13}^2 R_{11} + 2S_{13}S_{23}R_{12} + S_{23}^2 R_{22} = -TX_{33}, \end{cases}$$

allora si ha il sistema lineare:

$$(58)\quad \begin{cases} dp_1 = -\frac{1}{T}[(S_{12} + \varepsilon_3 Z_3)\,dx_2 + (S_{13}+\varepsilon_2' Z_2)\,dx_3], \\ dp_2 = -\frac{1}{T}[(S_{23} + \varepsilon_1 Z_1)\,dx_3 + (S_{12}+\varepsilon_3' Z_3)\,dx_1], \\ dp_3 = -\frac{1}{T}[(S_{13} + \varepsilon_2 Z_2)\,dx_1 + (S_{23}+\varepsilon_1' Z_1)\,dx_2]. \end{cases}$$

Ne segue:

$$A = \frac{1}{T^2}\{ - R_{11}T\,dx_2\,dx_3[(S_{12}+\varepsilon_3 Z_3)\,dx_2 + (S_{13}+\varepsilon_2' Z_2)\,dx_3]$$
$$- R_{22}T\,dx_3\,dx_1[(S_{23}+\varepsilon_1 Z_1)\,dx_3 + (S_{12}+\varepsilon_3' Z_3)\,dx_1]$$
$$- R_{33}T\,dx_1\,dx_2[(S_{13}+\varepsilon_2 Z_2)\,dx_1 + (S_{23}+\varepsilon_1' Z_1)\,dx_2]$$
$$- [(S_{12}+\varepsilon_3 Z_3)\,dx_2 + (S_{13}+\varepsilon_2' Z_2)\,dx_3]$$
$$\cdot [(S_{23}+\varepsilon_1 Z_1)\,dx_3 + (S_{12}+\varepsilon_3' Z_3)\,dx_1]$$
$$\cdot [(S_{13}+\varepsilon_2 Z_2)\,dx_1 + (S_{23}+\varepsilon_1' Z_1)\,dx_2]$$
$$+ UT^2\,dx_1\,dx_2\,dx_3\}.$$

Il coefficiente di $dx_1^2\,dx_2$ entro le parentesi è:

$$-(S_{13}+\varepsilon_2 Z_2)\{R_{33}T + (S_{12}+\varepsilon_3' Z_3)(S_{12}+\varepsilon_3 Z_3)\},$$

esso è nullo se si prende $\varepsilon_3' = -\varepsilon_3$; analogamente si annullano tutti i coefficienti dei termini $dx_i^2\,dx_k$ se:

$$\varepsilon_1' = -\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2' = -\varepsilon_2, \quad \varepsilon_3' = -\varepsilon_3. \tag{59}$$

Il coefficiente di $dx_1 dx_2 dx_3$ è, tenendo conto delle (59):

$$UT^2 - (S_{12}+\varepsilon_3 Z_3)(S_{13}+\varepsilon_2 Z_2)(S_{23}+\varepsilon_1 Z_1) - (S_{12}-\varepsilon_3 Z_3)(S_{13}-\varepsilon_2 Z_2)(S_{23}-\varepsilon_1 Z_1),$$

ossia:

$$UT^2 - 2S_{12}S_{13}S_{23} - 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 S_{23} Z_2 Z_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 S_{13} Z_3 Z_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 S_{12} Z_1 Z_2),$$

ossia ancora, per le (56):

$$UT^2 - 2S_{12}S_{13}S_{23} + 2S_{23}(S_{12}S_{13} - TR_{23}) + 2S_{13}(S_{12}S_{23} - TR_{13}) + 2S_{12}(S_{13}S_{23} - TR_{12}),$$

sicchè abbiamo, oltre le (57), una nuova equazione di condizione:

$$UT^2 + 4S_{12}S_{13}S_{23} - 2T(S_{12}R_{12} + S_{13}R_{13} + S_{23}R_{23}) = 0. \tag{60}$$

Il sistema (58) poi diviene, per le (59):

$$\begin{cases} dp_1 = -\frac{1}{T}[(S_{12}+\varepsilon_3 Z_3)dx_2 + (S_{13}-\varepsilon_2 Z_2)dx_3], \\ dp_2 = -\frac{1}{T}[(S_{23}+\varepsilon_1 Z_1)dx_3 + (S_{12}-\varepsilon_3 Z_3)dx_1], \\ dp_3 = -\frac{1}{T}[(S_{13}+\varepsilon_2 Z_2)dx_1 + (S_{23}-\varepsilon_1 Z_1)dx_2]. \end{cases} \tag{61}$$

Esso può trasformarsi nel sistema d'equazioni a derivate parziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{T}(S_{12}+\varepsilon_3 Z_3)\frac{\partial f}{\partial p_2} - \frac{1}{T}(S_{13}-\varepsilon_2 Z_2)\frac{\partial f}{\partial p_3} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} + p_2\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{T}(S_{23}+\varepsilon_1 Z_1)\frac{\partial f}{\partial p_3} - \frac{1}{T}(S_{12}-\varepsilon_3 Z_3)\frac{\partial f}{\partial p_1} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} + p_3\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{T}(S_{13}+\varepsilon_2 Z_2)\frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{1}{T}(S_{23}-\varepsilon_1 Z_1)\frac{\partial f}{\partial p_2} = 0. \end{cases} \tag{62}$$

Questo sistema in generale non è completo. Infatti, se esso fosse completo, si vede dalla sua forma che sarebbe anche jacobiano; ma d'altra parte, se si indicano per un istante con $X(f)$, $Y(f)$ i primi membri delle due prime equazioni, il coefficiente di $\frac{\partial f}{\partial z}$ nella combinazione $X\big(Y(f)\big) - Y\big(X(f)\big)$ è $X(p_2) - Y(p_1)$, ossia:

$$-\frac{1}{T}(S_{12}+\varepsilon_3 Z_3) + \frac{1}{T}(S_{12}-\varepsilon_3 Z_3),$$

ossia ancora $-2\varepsilon_3\frac{Z_3}{T}$. Perchè il sistema fosse completo, sarebbe necessario che fosse $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0$, nel qual caso le (61) si ridurrebbero alle (37) e sarebbero soddisfatte le (36), (38).

Se insieme al sistema (62) si considera quello che si ottiene da

esso mutando i segni di $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, si dimostra con un calcolo semplicissimo che due integrali qualunque dei due sistemi sono tra loro in involuzione. —

Quindi, se ciascuno dei due sistemi ammette tre integrali, indicandoli con u, v, w; u_1, v_1, w_1, saranno in involuzione tra di loro le funzioni $u - \varphi(v, w)$, $u_1 - \varphi_1(u_1, w_1)$, qualunque sieno le funzioni φ, φ_1. Integrando il sistema:

$$u = \varphi(v, w), \quad u_1 = \varphi_1(v_1, w_1),$$

si otterrà un integrale dipendente da due funzioni arbitrarie di due argomenti. Se uno solo dei sistemi, p. es. il primo, avesse 3 integrali u, v, w, l'integrazione dell' equazione:

$$u = \varphi(v, w)$$

ci condurrà parimenti ad un integrale dipendente da due funzioni di due argomenti.

Veniamo ora al caso in cui $T = 0$. Allora, se S_{12} e S_{13} non sono nulle, si avrà:

$$L_1 = (dp_1 + \alpha\, dx_2 + \beta\, dx_3)\,(\alpha'\, dx_2 + \beta'\, dx_3),$$

e dovrà essere:

$$\alpha' = -2S_{12}, \ \beta' = -2S_{13}, \ \alpha\alpha' = R_{33}, \ \alpha\beta' + \alpha'\beta = -2R_{23}, \ \beta\beta' = R_{22},$$

donde segue:

$$\alpha = -\frac{R_{33}}{2S_{12}}, \quad \alpha' = -2S_{12}, \quad \beta = -\frac{R_{22}}{2S_{13}}, \quad \beta' = -2S_{13},$$

e l' equazione di condizione:

$$S_{12}^2 R_{22} + 2S_{12}S_{13}R_{23} + S_{13}^2 R_{33} = 0.$$

Si avrà dunque:

$$L_1 = \Big(dp_1 - \frac{R_{33}}{2S_{12}}\, dx_2 - \frac{R_{22}}{2S_{13}}\, dx_3\Big)(-2S_{12}\, dx_2 - 2S_{13}\, dx_3).$$

Se sono soddisfatte le equazioni:

$$(63) \qquad \begin{cases} S_{12}^2 R_{22} + 2S_{12}S_{13}R_{23} + S_{13}^2 R_{33} = 0, \\ S_{23}^2 R_{33} + 2S_{23}S_{12}R_{13} + S_{12}^2 R_{11} = 0, \\ S_{13}^2 R_{11} + 2S_{13}S_{23}R_{12} + S_{23}^2 R_{22} = 0, \end{cases}$$

si avrà:

$$L_1 = -2\Big(dp_1 - \frac{R_{33}}{2S_{12}}\, dx_2 - \frac{R_{22}}{2S_{13}}\, dx_3\Big)(S_{12}\, dx_2 + S_{13}\, dx_3) = -2\mu_1\nu_1,$$

$$L_2 = -2\Big(dp_2 - \frac{R_{11}}{2S_{23}}\, dx_3 - \frac{R_{33}}{2S_{12}}\, dx_1\Big)(S_{23}\, dx_3 + S_{12}\, dx_1) = -2\mu_2\nu_2,$$

$$L_3 = -2\Big(dp_3 - \frac{R_{22}}{2S_{13}}\, dx_1 - \frac{R_{11}}{2S_{23}}\, dx_2\Big)(S_{13}\, dx_1 + S_{23}\, dx_2) = -2\mu_3\nu_3.$$

Di qui possono dedursi 8 sistemi lineari diversi, e cioè:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0; \quad \mu_1 = \mu_2 = \nu_3 = 0; \quad \mu_2 = \mu_3 = \nu_1 = 0;$$
$$\mu_3 = \mu_1 = \nu_2 = 0; \quad \mu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0; \quad \mu_2 = \nu_3 = \nu_1 = 0;$$
$$\mu_3 = \nu_1 = \nu_2 = 0; \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.$$

1°. $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$. Sostituendo in $A = 0$ si ottiene:
$R_{11} dx_2 dx_3 \mu_1 + R_{22} dx_3 dx_1 \mu_2 + R_{33} dx_1 dx_2 \mu_3 + U dx_1 dx_2 dx_3 = 0$.
Perchè quest' equazione sia soddisfatta identicamente, cioè perchè sieno nulli i coefficienti dei vari prodotti e potenze delle dx_i, si riconosce facilmente che devono essere nulle la U e due almeno delle R_{ii}, p. es.:

$$U = 0, \quad R_{11} = R_{22} = 0,$$

e quindi, per le (63):

$$R_{12} = 0.$$

2°. $\mu_1 = \mu_2 = \nu_3 = 0$. Se ne deduce:

$$dp_1 = \frac{R_{23}}{2S_{12}} dx_2 + \frac{R_{22}}{2S_{12}} dx_3, \quad dp_2 = -\frac{R_{23}S_{23}}{2S_{12}S_{12}} dx_2 + \frac{R_{11}}{2S_{23}} dx_3,$$
$$dx_1 = -\frac{S_{23}}{S_{12}} dx_2,$$

e quindi:

$$A = R_{11} dx_2 dx_3 \left(\frac{R_{23}}{2S_{12}} dx_2 + \frac{R_{22}}{2S_{12}} dx_3\right)$$
$$- R_{22} \frac{S_{23}}{S_{12}} dx_2 dx_3 \left(-\frac{R_{23}S_{23}}{2S_{12}S_{12}} dx_2 + \frac{R_{11}}{2S_{23}} dx_3\right)$$
$$- R_{33} \frac{S_{23}}{S_{12}} dp_3 dx_2^2 - U \frac{S_{23}}{S_{12}} dx_2^2 dx_3$$
$$= dx_2^2 \left[\left(\frac{R_{11}R_{23}}{2S_{12}} + \frac{R_{22}R_{33}S_{23}^2}{2S_{12}S_{13}^2} - U\frac{S_{23}}{S_{12}}\right) dx_3 - R_{33}\frac{S_{23}}{S_{12}} dp_3\right],$$

sicchè dev' essere:

$$R_{33} = 0, \quad U = 0.$$

3°, 4°. Analogamente al 2°.

5°. $\mu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$. Se ne deduce:

$$dp_1 = \left(\frac{R_{23}S_{12}}{2S_{12}^2} + \frac{R_{22}}{2S_{12}}\right) dx_3, \quad dx_1 = -\frac{S_{23}}{S_{12}} dx_3, \quad dx_2 = \frac{S_{12}}{S_{12}} dx_3,$$

$$A = R_{11} dx_3^3 \left(\frac{R_{23}S_{12}}{2S_{12}^2} + \frac{R_{22}}{2S_{12}}\right) \frac{S_{12}}{S_{12}} - R_{22} \frac{S_{23}}{S_{12}} dp_2 dx_3^2$$
$$- R_{33} \frac{S_{12}S_{23}}{S_{12}^2} dp_3 dx_3^2 - U \frac{S_{12}S_{23}}{S_{12}^2} dx_3^3$$
$$- dx_3^2 \left[\left(\frac{R_{11}R_{23}S_{12}}{2S_{12}^2} + \frac{R_{11}R_{22}}{2S_{12}} - U\frac{S_{12}S_{23}}{S_{12}^2}\right) dx_3 - R_{22}\frac{S_{23}}{S_{12}} dp_2\right.$$
$$\left. - R_{33}\frac{S_{12}S_{23}}{S_{12}^2} dp_3\right],$$

sicchè dev' essere:

$$R_{22} = 0, \quad R_{33} = 0, \quad U = 0,$$

e per le (63):

$$R_{23} = 0.$$

6°, 7°. Analogamente al 5°.

8°. Le tre equazioni sono incompatibili.

Il sistema d'equazioni a derivate parziali corrispondente al sistema lineare $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ è:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{R_{23}}{2S_{12}} \frac{\partial f}{\partial p_2} + \frac{R_{22}}{2S_{12}} \frac{\partial f}{\partial p_3} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{R_{11}}{2S_{23}} \frac{\partial f}{\partial p_3} + \frac{R_{23}}{2S_{12}} \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} + p_3 \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{R_{22}}{2S_{12}} \frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{R_{11}}{2S_{23}} \frac{\partial f}{\partial p_2} = 0.$$

Indichiamo queste equazioni con $X(f) = 0$, $Y(f) = 0$, $Z(f) = 0$, ed osserviamo che, supposto $R_{11} = R_{22} = 0$, esse si riducono a:

$$X(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{R_{23}}{2S_{12}} \frac{\partial f}{\partial p_2} = 0,$$

$$Y(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{R_{23}}{2S_{12}} \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0,$$

$$Z(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_3} + p_3 \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Ne segue:

$$X\big(Z(f)\big) - Z\big(X(f)\big) \equiv - Z\Big(\frac{R_{23}}{2S_{12}}\Big) \frac{\partial f}{\partial p_2} = 0,$$

$$Y\big(Z(f)\big) - Z\big(Y(f)\big) \equiv - Z\Big(\frac{R_{23}}{2S_{12}}\Big) \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0,$$

$$X\big(Y(f)\big) - Y\big(X(f)\big) \equiv X\Big(\frac{R_{23}}{2S_{12}}\Big) \frac{\partial f}{\partial p_1} - Y\Big(\frac{R_{23}}{2S_{12}}\Big) \frac{\partial f}{\partial p_2} = 0.$$

Se $Z\big(\frac{R_{23}}{2S_{12}}\big)$ non è nullo, il sistema considerato è equivalente al sistema delle 5 equazioni:

$$\frac{\partial f}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial p_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} + p_3 \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Poichè l'integrale di questo sistema, se esiste, non deve contenere nè p_1 nè p_2, la 3ª e la 4ª equazione si scompongono nelle seguenti:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

quindi dalla 5ª segue $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$, sicchè il sistema non ammette alcun

integrale. Dunque una condizione necessaria (ma non sufficiente) perchè il sistema ammetta qualche integrale è che sia:

$$Z\left(\frac{R_{33}}{2S_{12}}\right) = 0.$$

Perchè il sistema sia completo, dev' essere:

$$X\left(\frac{R_{33}}{2S_{12}}\right) = Y\left(\frac{R_{33}}{2S_{12}}\right) = Z\left(\frac{R_{33}}{2S_{12}}\right) = 0,$$

cioè $\frac{R_{33}}{2S_{12}}$ dev' essere un integrale del sistema stesso.

Si verifica facilmente che due integrali qualunque del sistema sono tra loro in involuzione. Quindi, se il sistema ammette almeno 3 integrali, potrà ottenersi un integrale della (3) dipendente da due funzioni arbitrarie di due argomenti.

§ 7.

Merita finalmente una considerazione speciale il caso in cui:

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{12} = S_{13} = S_{23} = T = 0,$$

in cui cioè l'equazione (3) è *lineare* rispetto alle derivate seconde.

In questo caso le formole (37) perdono ogni significato.

Le L_1, L_2, L_3 sono sempre decomponibili in fattori lineari.

Supposto dapprima che nessuna delle R_{ii} sia nulla, facciamo:

$$\begin{aligned}
L_1 &= R_{22}dx_3^2 - 2R_{23}dx_2dx_3 + R_{33}dx_2^2 \\
&= \frac{1}{R_{33}}(R_{33}dx_2 + \alpha_1 dx_3)(R_{33}dx_2 + \beta_1 dx_3), \\
L_2 &= R_{33}dx_1^2 - 2R_{13}dx_1dx_3 + R_{11}dx_3^2 \\
&= \frac{1}{R_{11}}(R_{11}dx_3 + \alpha_2 dx_1)(R_{11}dx_3 + \beta_2 dx_1), \\
L_3 &= R_{11}dx_2^2 - 2R_{12}dx_1dx_2 + R_{22}dx_1^2 \\
&= \frac{1}{R_{22}}(R_{22}dx_1 + \alpha_3 dx_2)(R_{22}dx_1 + \beta_3 dx_2).
\end{aligned}$$

Dovrà essere:

$$\alpha_1+\beta_1 = -2R_{23},\ \alpha_1\beta_1 = R_{22}R_{33};\ \alpha_2+\beta_2 = -2R_{13},\ \alpha_2\beta_2 = R_{33}R_{11};$$
$$\alpha_3+\beta_3 = -2R_{12},\ \alpha_3\beta_3 = R_{11}R_{22},$$

quindi, indicando con ε_1, ε_2, ε_3 dei coefficienti che possono assumere il valore ± 1:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -R_{23} + \varepsilon_1\sqrt{-X_{11}}, & \beta_1 &= -R_{23} - \varepsilon_1\sqrt{-X_{11}}, \\
\alpha_2 &= -R_{13} + \varepsilon_2\sqrt{-X_{22}}, & \beta_2 &= -R_{13} - \varepsilon_2\sqrt{-X_{22}}, \\
\alpha_3 &= -R_{12} + \varepsilon_3\sqrt{-X_{33}}, & \beta_3 &= -R_{12} - \varepsilon_3\sqrt{-X_{33}}.
\end{aligned}$$

Si avrà pertanto il sistema lineare, dove le ε possono prendere segni qualunque:

$$R_{33}dx_2 + (-R_{23} + \varepsilon_1\sqrt{-X_{11}})\,dx_3 = 0,$$
$$R_{11}dx_3 + (-R_{13} + \varepsilon_2\sqrt{-X_{22}})\,dx_1 = 0,$$
$$R_{22}dx_1 + (-R_{12} + \varepsilon_3\sqrt{-X_{33}})\,dx_2 = 0.$$

Perchè queste tre equazioni possano coesistere, dev' essere:

(64) $$R_{11}R_{22}R_{33} + (-R_{12} + \varepsilon_3\sqrt{-X_{33}})(-R_{13} + \varepsilon_2\sqrt{-X_{22}}) \times (-R_{23} + \varepsilon_1\sqrt{-X_{11}}) = 0,$$

che può anche scriversi:

(65) $$R_{11}R_{23}^2 + R_{22}R_{13}^2 + R_{33}R_{12}^2 - 2R_{12}R_{13}R_{23} - R_{11}R_{22}R_{33} = 0$$ *).

---

*) La riduzione a questa forma può farsi come segue.

Pongasi:

$$\frac{R_{23}}{R_{11}} = l_1, \quad \frac{R_{13}}{R_{22}} = l_2, \quad \frac{R_{12}}{R_{33}} = l_3; \quad \frac{R_{22}R_{33}}{R_{11}^2} = m_1, \quad \frac{R_{33}R_{11}}{R_{22}^2} = m_2, \quad \frac{R_{11}R_{22}}{R_{33}^2} = m_3;$$

$$-\varepsilon_1\frac{\sqrt{-X_{11}}}{R_{11}} = -\varepsilon_1\sqrt{l_1^2 - m_1} = n_1, \quad -\varepsilon_2\frac{\sqrt{-X_{22}}}{R_{22}} = -\varepsilon_2\sqrt{l_2^2 - m_2} = n_2,$$
$$-\varepsilon_3\frac{\sqrt{-X_{33}}}{R_{33}} = -\varepsilon_3\sqrt{l_3^2 - m_3} = n_3;$$

$$l_1l_2l_3 = r, \quad \Sigma l_1^2l_2^2m_3 = s, \quad \Sigma l_1^2m_2m_3 = t, \quad n_1n_2n_3 = u, \quad \Sigma l_1l_2n_3 = v,$$
$$\Sigma l_1n_2n_3 = w,$$

dove le Σ rappresentano funzioni simmetriche. Si ha evidentemente:

(α) $$m_1m_2m_3 = 1,$$

e la (64) può scriversi:

$$1 - (l_1 + n_1)(l_2 + n_2)(l_3 + n_3) = 0,$$

ossia:

(β) $$1 - r - v - w - u = 0.$$

Si ha poi, tenuto conto della (α):

(γ) $$u^2 = n_1^2n_2^2n_3^2 = (l_1^2 - m_1)(l_2^2 - m_2)(l_3^2 - m_3) = r^2 - s + t - 1,$$

(δ) $$v^2 = \Sigma l_1^2l_2^2n_3^2 + 2\Sigma l_1l_2n_3l_1l_3n_2 = \Sigma l_1^2l_2^2l_3^2 - \Sigma l_1^2l_2^2m_3 + 2l_1l_2l_3\Sigma l_1n_2n_3$$
$$= 3r^2 - s + 2rw,$$

(ε) $$w^2 = \Sigma l_1^2n_2^2n_3^2 + 2\Sigma l_1n_2n_3l_2n_3n_1 = \Sigma l_1^2l_2^2l_3^2 - 2\Sigma l_1^2l_2^2m_3 + \Sigma l_1^2m_2m_3$$
$$+ 2n_1n_2n_3\Sigma l_1l_2n_3 = 3r^2 - 2s + t + 2uv.$$

Ricavando v dalla (β) e quadrando, si ottiene:

$$v^2 = (1 - r - u)^2 - 2(1 - r - u)w + w^2,$$

ossia per le (δ), (ε):

$$3r^2 - s + 2rw = (1 - r - u)^2 - 2(1 - r - u)w + 3r^2 - 2s + t + 2uv,$$

da cui riducendo:

$$2w = 2u(v + w) - s + t + (1 - r - u)^2,$$

e per le (β), (γ):

$$2w = 2u(1 - r - u) - s + t + (1 - r - u)^2$$
$$= 2u - 2ur - 2u^2 - s + t + 1 + r^2 + u^2 - 2r - 2u + 2ur = 2(1 - r),$$
$$v = 1 - r - u - w = -u.$$

Poniamo per brevità:

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = \frac{R_{12} \pm \sqrt{-X_{22}}}{R_{33}}, \qquad \left.\begin{matrix}\mu_1\\ \mu_2\end{matrix}\right\} = \frac{R_{12} \pm \sqrt{-X_{11}}}{R_{33}},$$

dove i segni si possono scegliere indipendentemente per le due coppie di valori. Supposta soddisfatta la condizione (64), il sistema lineare trovato sarà equivalente all' uno o all' altro dei due sistemi, di *due* equazioni ciascuno:

$$dx_1 - \lambda_i dx_3 = 0, \quad dx_2 - \mu_i dx_3 = 0. \qquad (i = 1, 2)$$

Sostituiamo nella $A = 0$; avremo:

$$R_{11}\mu_i dp_1 dx_3^2 + R_{22}\lambda_i dp_2 dx_3^2 + R_{33}\lambda_i\mu_i dp_3 dx_3^2 + U\lambda_i\mu_i dx_3^3 = 0;$$

ora:

$$\frac{R_{11}}{R_{33}} = \lambda_1\lambda_2, \quad \frac{R_{22}}{R_{33}} = \mu_1\mu_2,$$

quindi l'equazione precedente diviene (dividendo per $R_{33}dx_3^2$):

$$\lambda_1\lambda_2\mu_i dp_1 + \mu_1\mu_2\lambda_i dp_2 + \lambda_i\mu_i dp_3 + \frac{U}{R_{33}}\lambda_i\mu_i dx_3 = 0,$$

da cui dividendo per $\lambda_i\mu_i$ e ponendo $\{i, h\} = \{1, 2\}$:

$$\lambda_h dp_1 + \mu_h dp_2 + dp_3 + \frac{U}{R_{33}} dx_3 = 0.$$

Abbiamo pertanto i due sistemi:

$$(66) \qquad \begin{aligned} &dx_1 - \lambda_1 dx_3 = 0, \quad dx_2 - \mu_1 dx_3 = 0,\\ &dp_3 + \lambda_2 dp_1 + \mu_2 dp_2 + \frac{U}{R_{33}} dx_3 = 0; \end{aligned}$$

$$(67) \qquad \begin{aligned} &dx_1 - \lambda_2 dx_3 = 0, \quad dx_2 - \mu_2 dx_3 = 0,\\ &dp_3 + \lambda_1 dp_1 + \mu_1 dp_2 + \frac{U}{R_{33}} dx_3 = 0. \end{aligned}$$

Questi sistemi, dedotti nell' ipotesi che le R_{ii} sieno tutte diverse da zero, valgono anche nel caso in cui una delle R_{11}, R_{22}, od ambedue, sieno nulle. Infatti, se si introducono nelle:

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad L_3 = 0, \quad A = 0$$

le espressioni di dx_1, dx_2, dx_3 ricavate dalle (66), (67), esse sono identicamente soddisfatte. Resta escluso il solo caso $R_{11} = R_{22} = R_{33} = 0$, ma è facile vedere che in questo caso il nostro metodo non può con-

---

Dopo ciò segue dalle (γ), (δ):

$$r^2 - s + t - 1 = 3r^2 - s + 2r(1 - r),$$

ossia riducendo:

$$t - 2r - 1 = 0.$$

Infine, se rimettiamo per t, r le loro espressioni, otteniamo appunto, dopo facili riduzioni, la formola (65).

durci ad alcun risultato. I sistemi (66), (67) possono trasformarsi nei seguenti sistemi d'equazioni a derivate parziali:

$$(68)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial p_1} - \lambda_1 \dfrac{\partial f}{\partial p_2} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial p_2} - \mu_1 \dfrac{\partial f}{\partial p_3} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} + \lambda_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \mu_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + (\lambda_2 p_1 + \mu_2 p_2 + p_3) \dfrac{\partial f}{\partial z} - \dfrac{U}{R_{23}} \dfrac{\partial f}{\partial p_3} = 0, \end{cases}$$

$$(69)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial p_1} - \lambda_2 \dfrac{\partial f}{\partial p_3} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial p_2} - \mu_2 \dfrac{\partial f}{\partial p_3} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} + \lambda_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \mu_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + (\lambda_1 p_1 + \mu_1 p_2 + p_3) \dfrac{\partial f}{\partial z} - \dfrac{U}{R_{23}} \dfrac{\partial f}{\partial p_3} = 0. \end{cases}$$

Denotiamo con $X(f) = 0$, $Y(f) = 0$, $Z(f) = 0$ le tre equazioni (68). Avremo:

$$(70)\quad \begin{cases} X\big(Y(f)\big) - Y\big(X(f)\big) \equiv \big(-X(\mu_1) + Y(\lambda_1)\big) \dfrac{\partial f}{\partial p_3} = 0, \\ X\big(Z(f)\big) - Z\big(X(f)\big) \equiv X(\lambda_2) \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + X(\mu_2) \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \qquad + X(\lambda_2 p_1 + \mu_2 p_2 + p_3) \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \qquad + \Big(Z(\lambda_1) - X\Big(\dfrac{U}{R_{23}}\Big)\Big) \dfrac{\partial f}{\partial p_3} = 0, \\ Y\big(Z(f)\big) - Z\big(Y(f)\big) \equiv Y(\lambda_2) \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + Y(\mu_2) \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \qquad + Y(\lambda_2 p_1 + \mu_2 p_2 + p_3) \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \qquad + \Big(Z(\mu_1) - Y\Big(\dfrac{U}{R_{23}}\Big)\Big) \dfrac{\partial f}{\partial p_3} = 0. \end{cases}$$

Perchè il sistema sia completo (e quindi jacobiano), tutti i coefficienti di queste espressioni devono annullarsi. In particolare dev' essere:

$$0 = X(\lambda_2) = X(\mu_2) = Y(\lambda_2) = Y(\mu_2),$$

$$\begin{aligned} 0 = X(\lambda_2 p_1 + \mu_2 p_2 + p_3) &= X(\lambda_2)\, p_1 + X(p_1)\, \lambda_2 + X(\mu_2)\, p_2 \\ &\quad + X(p_2)\, \mu_2 + X(p_3) \\ &= \lambda_2 X(p_1) + \mu_2 X(p_2) + X(p_3) = \lambda_2 - \lambda_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = Y(\lambda_2 p_1 + \mu_2 p_2 + p_3) &= Y(\lambda_2)\, p_1 + Y(p_1)\, \lambda_2 + Y(\mu_2)\, p_2 \\ &\quad + Y(p_2)\, \mu_2 + Y(p_3) \\ &= \lambda_2 Y(p_1) + \mu_2 Y(p_2) + Y(p_3) = \mu_2 - \mu_1. \end{aligned}$$

Quindi, perchè il sistema sia completo, è necessario che sia:

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad \mu_1 = \mu_2.$$

Queste condizioni non sono sufficienti. Può però dimostrarsi che, se esse sono soddisfatte e se il sistema ammette tre integrali indipendenti, esso ne ammette un quarto, e quindi è completo; in altre parole che, se il sistema non è completo, esso ammette tutt' al più 2 integrali indipendenti.

Indicheremo con λ il valore comune di λ_1, λ_2, con μ quello di μ_1, μ_2. Se il sistema non è completo, una almeno delle 3 combinazioni (70) non sarà identicamente nulla; se due non lo sono, il teorema è provato.

Supponiamo dunque che una sola delle combinazioni (70) non sia identicamente nulla; questa non può essere la prima, perchè, se le altre due sono identicamente nulle, si ha $X(\mu) = 0$, $Y(\lambda) = 0$. Sia dunque la seconda non identicamente nulla, e denotiamola con $W(f) = 0$, imaginandola prima divisa per $X(\lambda)$. Siccome $X(\mu) - Y(\lambda) = 0$, $Y(\lambda) = 0$, ne segue $X(\mu) = 0$, e quindi:

$$X(\lambda p_1 + \mu p_2 + p_3) = \lambda X(p_1) + p_1 X(\lambda) + \mu X(p_2) + p_2 X(\mu) + X(p_3) = p_1 X(\lambda),$$

sicchè si ha:

$$W(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{X(\lambda)} \left(Z(\lambda) - X\left(\frac{U}{R_{33}}\right) \right) \frac{\partial f}{\partial p_3} = 0.$$

Calcolando $X\big(W(f)\big) - W\big(X(f)\big)$, si trova che il coefficiente di $\frac{\partial f}{\partial z}$ in questa combinazione è $X(p_1)$, cioè 1; quindi essa non può essere identicamente nulla, ciò che prova l'asserto.

Se $X(\lambda) = 0$, si ha:

$$W(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial p_3} = 0,$$

quindi:

$$Z\big(W(f)\big) - W\big(Z(f)\big) = - W(\lambda) \frac{\partial f}{\partial x_1} - W(\mu) \frac{\partial f}{\partial x_2} - W(\lambda p_1 + \mu p_2 + p_3) \frac{\partial f}{\partial z} + W\left(\frac{U}{R_{33}}\right) \frac{\partial f}{\partial p_3} = 0.$$

Perchè questa combinazione fosse identicamente nulla, dovrebbe essere:

$$0 = W(\lambda), \qquad 0 = W(\mu),$$

$$0 = W(\lambda p_1 + \mu p_2 + p_3) = p_1 W(\lambda) + p_2 W(\mu) + 1,$$

equazioni che sono incompatibili. — Così il teorema è completamente dimostrato.

Se u è un integrale del sistema (68), v un integrale del sistema (69), si ha: $[u, v] = 0$.

Si ha infatti:

$$\frac{\partial u}{\partial p_1} = \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial p_3}, \quad \frac{\partial u}{\partial p_2} = \mu_1 \frac{\partial u}{\partial p_3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} + p_3 \frac{\partial u}{\partial z} = -\lambda_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u}{\partial z}\right) - \mu_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{U}{R_{33}} \frac{\partial u}{\partial p_3};$$

$$\frac{\partial v}{\partial p_1} = \lambda_2 \frac{\partial v}{\partial p_3}, \quad \frac{\partial v}{\partial p_2} = \mu_2 \frac{\partial v}{\partial p_3},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_3} + p_3 \frac{\partial v}{\partial z} = -\lambda_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \mu_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{U}{R_{33}} \frac{\partial v}{\partial p_3},$$

quindi:

$$\begin{aligned}[u, v] = {} & \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial p_3}\left(\frac{\partial v}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \mu_1 \frac{\partial u}{\partial p_3}\left(\frac{\partial v}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ & + \frac{\partial u}{\partial p_3}\left[-\lambda_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \mu_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{U}{R_{33}} \frac{\partial v}{\partial p_3}\right] \\ & - \lambda_2 \frac{\partial v}{\partial p_3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u}{\partial z}\right) - \mu_2 \frac{\partial v}{\partial p_3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ & - \frac{\partial v}{\partial p_3}\left[-\lambda_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u}{\partial z}\right) - \mu_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{U}{R_{33}} \frac{\partial u}{\partial p_3}\right] = 0.\end{aligned}$$

Quando $\lambda_1 = \lambda_2$, $\mu_1 = \mu_2$, si ha:

$$X_{11} = X_{22} = X_{33} = 0,$$

ossia:

$$R_{11} R_{22} = R_{12}^2, \quad R_{11} R_{33} = R_{13}^2, \quad R_{22} R_{33} = R_{23}^2,$$

e l'equazione di condizione (64) si riduce a:

$$R_{11} R_{22} R_{33} = R_{12} R_{13} R_{23},$$

da cui si ricava facilmente, mediante le precedenti:

$$R_{12} R_{33} = R_{13} R_{23}, \quad R_{13} R_{22} = R_{12} R_{23}, \quad R_{23} R_{11} = R_{12} R_{13},$$

ossia:

$$X_{12} = X_{13} = X_{23} = 0.$$

Inoltre:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{R_{12}}{R_{33}} = \sqrt{\frac{R_{11}}{R_{33}}}, \quad \mu_1 = \mu_2 = \frac{R_{23}}{R_{33}} = \sqrt{\frac{R_{22}}{R_{33}}},$$

quindi:

$$\lambda_2 \mu_1 = \lambda_1 \mu_2 = \frac{R_{13} R_{23}}{R_{33}^2} = \frac{R_{12}}{R_{33}}.$$

Ora dalle (66) (o (67)) si ha, posto $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$:

$$dx_1 = -\frac{R_{33}}{U}\left[\lambda^2 dp_1 + \lambda\mu dp_2 + \lambda dp_3\right],$$

$$dx_2 = -\frac{R_{33}}{U}\left[\lambda\mu dp_1 + \mu^2 dp_2 + \mu dp_3\right],$$

$$dx_3 = -\frac{R_{33}}{U}\left[\lambda dp_1 + \mu dp_2 + dp_3\right];$$

ne segue:

$$(71)\qquad \begin{cases} dx_1 = -\frac{1}{U}[R_{11}dp_1 + R_{12}dp_2 + R_{13}dp_3], \\ dx_2 = -\frac{1}{U}[R_{12}dp_1 + R_{22}dp_2 + R_{23}dp_3], \\ dx_3 = -\frac{1}{U}[R_{13}dp_1 + R_{23}dp_2 + R_{33}dp_3]. \end{cases}$$

Le (36), (38) sono evidentemente soddisfatte per la nostra equazione, e però, se noi applichiamo a questa la trasformazione di Legendre, otterremo una nuova equazione per la quale le (36), (38) saranno pure soddisfatte. Si vede poi che il sistema (71) si trasformerà appunto nel sistema (37), e quindi il sistema (68) (o (69)) nel sistema (40). Se il primo è completo, lo sarà anche il secondo, e allora potremo ottenere per l'equazione trasformata un integrale con 3 funzioni arbitrarie (§ 4). Da questo potremo dedurre un integrale con tre funzioni arbitrarie (d'un argomento) dell' equazione primitiva. Se i sistemi (68), (69) sono diversi, e se ambidue, od uno, ammettono tre integrali indipendenti, si può ottenere un integrale dell' equazione con due funzioni arbitrarie di due argomenti.

§ 8.

Come applicazione delle teorie esposte svilupperemo due esempi.

I°. $$2p_3(p_1x_1 - p_2x_2)\,p_{22} - 4p_2^2x_3p_{33} - 4p_2p_3x_1p_{12}$$
$$- 2x_3(p_1x_1 - p_2x_2)\,(p_{22}p_{33} - p_{23}^2) - p_3x_1^2(p_{11}p_{22} - p_{12}^2)$$
$$- 4p_2x_1x_3(p_{13}p_{23} - p_{12}p_{33}) + x_1^2x_3\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{vmatrix} + 4p_2^2p_3 = 0.$$

Si ha:

$$R_{11} = 0, \quad R_{22} = 2p_3(p_1x_1 - p_2x_2), \quad R_{33} = -4p_2^2x_3,$$
$$R_{12} = -2p_2p_3x_1, \quad R_{13} = 0, \quad R_{23} = 0, \quad S_{11} = -2x_3(p_1x_1 - p_2x_2),$$
$$S_{22} = 0, \quad S_{33} = -p_3x_1^2, \quad S_{12} = -2p_2x_1x_3, \quad S_{13} = 0, \quad S_{23} = 0,$$
$$T = x_1^2x_3, \quad U = 4p_2^2p_3,$$

quindi:

$$Y_{11} = 0, \quad Y_{22} = 2p_3x_1^2x_3(p_1x_1 - p_2x_2), \quad Y_{33} = -4p_2^2x_1^2x_3^2,$$
$$Y_{12} = -2p_2p_3x_1^3x_3, \quad Y_{13} = 0, \quad Y_{23} = 0, \quad W = 4p_2^2p_3x_1^4x_3^2.$$

È facile constatare che le condizioni (36), (38) sono verificate.

Il sistema (40) è:

$$(72)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial f}{\partial z} + 2\dfrac{p_1 x_1 - p_2 x_2}{x_1^2} \dfrac{\partial f}{\partial p_1} + 2\dfrac{p_2}{x_1}\dfrac{\partial f}{\partial p_2} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + p_2 \dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{2p_2}{x_1}\dfrac{\partial f}{\partial p_2} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} + p_3 \dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{p_3}{x_3}\dfrac{\partial f}{\partial p_3} = 0, \end{cases}$$

e si può verificare che esso è completo.

Il sistema ausiliario dell' ultima equazione è:

$$\frac{dx_1}{0} = \frac{dx_2}{0} = \frac{dx_3}{1} = \frac{dz}{p_3} = \frac{dp_1}{0} = \frac{dp_2}{0} = \frac{dp_3}{\frac{p_3}{x_3}};$$

esso ammette gl' integrali:

$$x_1 = \text{cost.}, \quad x_2 = \text{cost.}, \quad p_1 = \text{cost.}, \quad p_2 = \text{cost.}, \quad \frac{p_3}{x_3} = \text{cost.},$$
$$z - \frac{1}{2} p_3 x_3 = \text{cost.},$$

quindi, posto:

$$u_1 = x_1, \quad u_2 = x_2, \quad u_3 = p_1, \quad u_4 = p_2, \quad u_5 = \frac{p_3}{x_3},$$
$$u_6 = z - \frac{1}{2} p_3 x_3,$$

l'integrale generale dell' ultima equazione (72) è:

$$f = F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6).$$

Ne segue:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial u_6}, \quad \frac{\partial f}{\partial p_2} = \frac{\partial F}{\partial u_4},$$

e la seconda delle (72) diviene:

$$(73)\qquad \frac{\partial F}{\partial u_2} + u_4 \frac{\partial F}{\partial u_6} + 2\frac{u_4}{u_1}\frac{\partial F}{\partial u_4} = 0.$$

Il sistema ausiliario di questa equazione è:

$$\frac{du_1}{0} = \frac{du_2}{1} = \frac{du_3}{0} = \frac{du_4}{2\frac{u_4}{u_1}} = \frac{du_5}{0} = \frac{du_6}{u_4};$$

esso ammette gl' integrali:

$$u_1 = \text{cost.}, \quad u_4 = \text{cost.}, \quad u_5 = \text{cost.}, \quad \frac{u_1 u_3}{2u_4} - u_2 = \text{cost.},$$
$$u_6 - u_2 u_4 = \text{cost.}$$

Ai due ultimi possono anche sostituirsi i seguenti:

$$2u_2 u_4 - u_1 u_3 = \text{cost.}, \quad u_6 - \frac{1}{2} u_1 u_3 = \text{cost.}$$

Posto adunque:

$$v_1 = u_1 = x_1, \quad v_2 = u_4 = p_2, \quad v_3 = u_5 = \frac{p_3}{x_3},$$
$$v_4 = 2u_2u_4 - u_1u_3 = 2p_2x_2 - p_1x_1,$$
$$v_5 = u_6 - \frac{1}{2}u_1u_3 = z - \frac{1}{2}p_1x_1 - \frac{1}{2}p_3x_3,$$

l'integrale generale della (73), e quindi anche del sistema delle due ultime (72), sarà:

$$f = \Phi(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5).$$

Segue di qui:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} - p_1\frac{\partial \Phi}{\partial v_4} - \frac{1}{2}p_1\frac{\partial \Phi}{\partial v_5}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_5}, \quad \frac{\partial f}{\partial p_1} = -x_1\frac{\partial \Phi}{\partial v_4} - \frac{1}{2}x_1\frac{\partial \Phi}{\partial v_5},$$
$$\frac{\partial f}{\partial p_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} + 2x_2\frac{\partial \Phi}{\partial v_4},$$

e la prima delle (72) diviene:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_1} - p_1\frac{\partial \Phi}{\partial v_4} - \frac{1}{2}p_1\frac{\partial \Phi}{\partial v_5} + p_1\frac{\partial \Phi}{\partial v_5}$$
$$+ 2\frac{(p_1x_1 - p_2x_2)}{x_1^2}\left(-x_1\frac{\partial \Phi}{\partial v_4} - \frac{1}{2}x_1\frac{\partial \Phi}{\partial v_5}\right) + \frac{2p_2}{x_1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v_2} + 2x_2\frac{\partial \Phi}{\partial v_4}\right) = 0,$$

ossia introducendo le v_i e moltiplicando per $2v_1$:

$$2v_1\frac{\partial \Phi}{\partial v_1} + 4v_2\frac{\partial \Phi}{\partial v_2} + 6v_4\frac{\partial \Phi}{\partial v_4} + v_4\frac{\partial \Phi}{\partial v_5} = 0.$$

Il sistema ausiliario di questa equazione è:

$$\frac{dv_1}{2v_1} = \frac{dv_2}{4v_2} = \frac{dv_3}{0} = \frac{dv_4}{6v_4} = \frac{dv_5}{v_4};$$

esso ammette gl' integrali:

$$v_3 = \text{cost.}, \quad \frac{v_2}{v_1^2} = \text{cost.}, \quad \frac{v_4}{v_1^3} = \text{cost.}, \quad v_5 - \frac{1}{6}v_4 = \text{cost.},$$

quindi, rimettendo le variabili primitive, si hanno i seguenti 4 integrali indipendenti del sistema (72):

$$\frac{p_3}{x_3}, \quad \frac{p_2}{x_1^2}, \quad \frac{2p_2x_2 - p_1x_1}{x_1^3}, \quad z - \frac{1}{3}p_1x_1 - \frac{1}{3}p_2x_2 - \frac{1}{2}p_3x_3.$$

Se pertanto denotiamo con A, B, C, D 4 costanti arbitrarie, ed eliminiamo p_1, p_2, p_3 fra le equazioni:

$$\frac{p_3}{x_3} = 2C, \quad \frac{p_2}{x_1^2} = B, \quad \frac{2p_2x_2 - p_1x_1}{x_1^3} = -3A,$$
$$z - \frac{1}{3}p_1x_1 - \frac{1}{3}p_2x_2 - \frac{1}{2}p_3x_3 = D,$$

otterremo il seguente integrale dell' equazione proposta:

$$z = Ax_1^3 + Bx_1^2x_2 + Cx_3^2 + D,$$

dal quale si potrà ricavare col metodo esposto a suo luogo un integrale con 3 funzioni arbitrarie d'un argomento.

II. $7p_{11} + 2p_{22} + p_{33} + 9p_{12} + 8p_{13} + 3p_{23} - \frac{p_1 + p_2 + p_3}{x_1 + x_2 - 8x_3} = 0.$

L'equazione è lineare rispetto alle derivate seconde, e si ha:

$$R_{11} = 7, \quad R_{22} = 2, \quad R_{33} = 1, \quad R_{12} = \frac{9}{2}, \quad R_{13} = 4, \quad R_{23} = \frac{3}{2},$$

$$U = -\frac{p_1 + p_2 + p_3}{x_1 + x_2 - 8x_3},$$

quindi:

$$X_{11} = -\frac{1}{4}, \quad X_{22} = -9, \quad X_{33} = -\frac{25}{4}.$$

La relazione (64) è soddisfatta se si pone:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +1, \quad \text{o} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1.$$

Si trova:

$$\lambda_1 = 7, \quad \lambda_2 = 1, \quad \mu_1 = 2, \quad \mu_2 = 1,$$

sicchè si hanno i due sistemi d'equazioni a differenziali totali:

$$dx_1 - 7dx_3 = 0, \quad dx_2 - 2dx_3 = 0,$$

$$dp_3 + dp_1 + dp_2 - \frac{p_1 + p_2 + p_3}{x_1 + x_2 - 8x_3} dx_3 = 0;$$

$$dx_1 - dx_3 = 0, \quad dx_2 - dx_3 = 0,$$

$$dp_3 + 7dp_1 + 2dp_2 - \frac{p_1 + p_2 + p_3}{x_1 + x_2 - 8x_3} dx_3 = 0.$$

Dalle due prime equazioni del primo sistema segue:

$$dx_3 = dx_1 + dx_2 - 8dx_3,$$

sicchè la terza può scriversi:

$$dp_1 + dp_2 + dp_3 - \frac{p_1 + p_2 + p_3}{x_1 + x_2 - 8x_3}(dx_1 + dx_2 - 8dx_3) = 0.$$

Si vede quindi che il primo sistema ammette i tre integrali:

$$x_1 - 7x_3 = \text{cost.}, \quad x_2 - 2x_3 = \text{cost.}, \quad \frac{p_1 + p_2 + p_3}{x_1 + x_2 - 8x_3} = \text{cost.},$$

dai quali si deduce l'integrale intermedio dell' equazione proposta:

(74) $p_1 + p_2 + p_3 = (x_1 + x_2 - 8x_3)\,\varphi(x_1 - 7x_3,\ x_2 - 2x_3).$

Poichè il secondo sistema non ammette che due soli integrali, dovremo integrare quest' equazione. Il suo sistema ausiliario è:

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{1} = \frac{dx_3}{1} = \frac{dz}{(x_1 + x_2 - 8x_3)\,\varphi(x_1 - 7x_3,\ x_2 - 2x_3)}.$$

I tre primi membri ci danno gl' integrali:

$$x_1 - x_3 = u_1, \quad x_2 - x_3 = u_2,$$

dove u_1, u_2 sono costanti arbitrarie; dopo ciò si ha dai due ultimi membri:

$$dz = (u_1 + u_2 - 6x_3)\,\varphi(u_1 - 6x_3,\ u_2 - x_3)\,dx_3,$$

e quindi, posto:

$$(75)\quad \int (u_1 + u_2 - 6x_3)\,\varphi(u_1 - 6x_3,\ u_2 - x_3)\,dx_3 = \psi(u_1, u_2, x_3),$$

e indicando con u_3 una terza costante arbitraria, si ha un terzo integrale:

$$z - \psi(x_1 - x_3,\ x_2 - x_3,\ x_3) = u_1.$$

Pertanto l'integrale della (74), e quindi anche dell' equazione proposta, è:

$$z = \psi(x_1 - x_3,\ x_2 - x_3,\ x_3) + \chi(x_1 - x_3,\ x_2 - x_3),$$

dove ψ è una funzione legata alla funzione arbitraria di due argomenti φ dalla relazione (75), e χ è una nuova funzione arbitraria di due argomenti.

Messina, 7. giugno 1896.

Ueber das Princip der kleinsten Action und das Hamilton'sche Princip.

Von

Moritz Réthy in Budapest*).

§ 1.

Das Verhältniss der Arbeit zur Helmholtz'schen Formulirung des Actionsprincips.

Vorliegende Arbeit verdankt ihren Ursprung den diesbezüglichen Abhandlungen von A. Mayer und H. v. Helmholtz, und verfolgt das Ziel, das Princip der kleinsten Action zu derselben allgemeinen Giltigkeit zu erheben, welche das Hamilton'sche Princip auszeichnet. Aus meinen unten citirten ersten zwei Abhandlungen entstand der in den „Berichten aus Ungarn" erschienene Auszug; und kritische Bemerkungen, die Herr A. Mayer bezüglich der daselbst (pag. 14—17) gegebenen Deutung der Helmholtz'schen Beweise mir brieflich mittheilte, veranlassten mich in Verfolgung und Ausbildung der ihr zu Grunde liegenden Gedanken zu weiterer Verallgemeinerung meiner Untersuchungen, die ich hier zusammenfassend der Oeffentlichkeit übergebe.

I. Man war bezüglich des Princips der kleinsten Action bis 1887 der Meinung, dass seine Giltigkeit an die Bedingung gebunden sei, dass die Bewegung des Punktsystems dem Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft gemäss vor sich gehe. Die letzte in dieser Auffassung verfasste Abhandlung, die an Klarheit, Präcision und Eleganz ausgezeichnete Arbeit des Herrn A. Mayer**), bewog v. Helmholtz***) darauf aufmerksam zu machen, dass das Princip der kleinsten Action auch dann noch giltig sei, wenn das Potential der Kräfte,

*) Aus Abhandlungen vorgelegt der math. naturw. Classe der ungarischen Academie der Wissenschaften am 19. Nov. 1894, 20. Mai 1895 und 20. April 1896. Erschienen in „Math. és Term. Értesitö 1895, 1896" und in „Berichte aus Ungarn Bd. XIII".

**) Sächsische Berichte 1886, Bd. 38, pagg. 343—355.

***) Sitzungsberichte der Acad. zu Berlin 1887, Bd. I, pagg. 225—236.

denen das durch unveränderliche Verbindungen beschränkte Punktsystem ausgesetzt ist, von der Zeit auch explicite abhängt, obgleich in diesem Fall das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft nicht mehr Bestand hat. Nach der Darstellung von v. Helmholtz soll sogar schon die in den „Miscellanea Taurinensia T. II" erschienene grundlegende Arbeit von Lagrange in diesem Sinne aufzufassen sein.

Ich muss aber gestehen, dass es mir nicht gelungen ist, in der Arbeit von Lagrange eine Stelle zu finden, wo ein vom Erhaltungsprincip der lebendigen Kraft unabhängiger Beweis oder selbst Ausspruch des Princips stünde; ich finde im Gegentheil überall betont, dass das Princip der kleinsten Action ein wahres Maximum-Minimum-Problem sei *mit der Nebenbedingung*, dass für die Bewegung das Princip von der lebendigen Kraft bestehe. Dies gilt auch von jener in geschichtlicher Hinsicht interessanten Stelle, — Oeuvres de Lagrange Tom. I, pag. 384, XIII (Serret'sche Ausgabe) —, welche am allgemeinsten gehalten ist und einen vollständigen Ausspruch des sogenannten Hamilton'schen Satzes enthält.

Ich muss auch gestehen, dass, so geistvoll die Betrachtungen von v. Helmholtz sind, seine Beweise des Princips mir lückenhaft und gar nicht überzeugend zu sein scheinen. Das *Differential* der Zeit wird variirt, die Zeit *selbst* aber nicht*); die Bedeutung und Berechtigung dieses Verfahrens ist aber nirgends auseinandergesetzt. Und selbst wenn man dies Verfahren zugiebt, sieht man nach dem Beweise doch nur soviel ein, dass *auch* die natürliche Bewegung dem Variationsproblem entspricht, nicht aber, dass *nur* sie dies leistet.

Das Verfahren, die Zeit selbst *nicht*, und trotzdem ihr Differential *doch* zu variiren, ist aber bei der Helmholtz'schen Formulirung des Princips nothwendig, da man sonst zu gar keiner Verallgemeinerung gelangt. Helmholtz sagt nämlich**):

„In allen Fällen verlangt man, dass der Gesammtbetrag der Action ein Grenzwerth sei für den Uebergang aus einer gegebenen Anfangslage in eine gegebene Endlage. Die Variation wird bewirkt dadurch, dass man die Coordinaten p_i***) der einzelnen während des Uebergangs eintretenden Lagen des Körpersystems variirt, gleichzeitig aber auch die Zeit, und zwar letztere so, dass der vorhandene Betrag der Energie des Systems nicht geändert wird. Da nämlich die Energie ausser der potentiellen Energie†) F, welche nur von der Lage abhängig ist, auch noch die lebendige Kraft enthält, die von den Geschwindigkeiten abhängig ist, und die letzteren durch Variirung der

*) l. c. pagg. 232, 234.

**) pag. 231, Alinea 3, Z. 3—7.

***) Hier mit q_i bezeichnet.

†) Hier mit $-U$ bezeichnet.

Wegstrecken, die im Zeitelement dt zurückgelegt werden, variirt werden, so kann man sämmtliche Geschwindigkeiten durch Variation des Werthes von dt, der zur betrachteten Wegstrecke gehört, verändern und dabei die Aenderung von dt so einrichten, dass der Betrag der Energie bei der Variation nicht geändert wird."

Fasst man das Princip der kleinsten Action im Sinne Lagrange's als ein Maximum-Minimum-Problem mit fester Bedingungsgleichung auf, so sprechen die beiden ersten Sätze aus, dass

$$\delta \int_0^{t_1} 2T\,dt = 0$$

sei bei Einhaltung der Bedingungsgleichung

$$T - U = F,$$

wo die Energie F dieselbe Werthreihe zu durchlaufen hat in der variirten Bewegung als in der unvariirten, und wo das Potential U von der Zeit auch explicite abhängen soll. Dieses Problem enthält aber, wenn auch die Zeit *selbst* variirt wird, nur dann keinen inneren Widerspruch, wenn $\frac{\partial U}{\partial t}$ von Vornherein verschwindet, d. i. wenn für das System das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft Bestand hat.

Will man also zu einer Verallgemeinerung des Princips gelangen und dabei seinen Charakter eines Maximum-Minimum-Problems mit fester Bedingungsgleichung bewahren, so muss man entweder die Unvariirbarkeit der Energie fallen lassen, oder man muss *bezüglich der Variation* die Bedingungsgleichung als abhängig auffassen von der Anfangslage, den Anfangsgeschwindigkeiten und der Energie des Punktsystems.

II. Da Helmholtz die Energie als unvariirbar erklärt, so will ich mich zuerst mit der zweiten Alternative befassen, und auseinandersetzen, wie ich mir vor Ausführung der Variation die ursprünglich als feste Function der *laufenden* Coordinaten, der Geschwindigkeiten und der Zeit gegebene Bedingungsgleichung transformirt denke.

Gesetzt, wir hätten die Lagrange'schen Gleichungen für ein Punktsystem gelöst, auf welches äussere Punkte wirken, deren Coordinaten q_k vorgeschriebene Functionen der Zeit t sind. Wir hätten also die inneren Coordinaten q_i ausgedrückt durch die *numerisch* gegebenen Anfangslagen, Anfangsgeschwindigkeiten und durch die laufende Zeit t. Wir berechnen dann die Energie F als Function der Zeit als einzigen Variablen, und berechnen endlich durch Umkehrung dieser Zeitfunction

$$t = z(F),$$

d. i. die laufende Zeit als Function der variabeln Energie. Indem wir diese Zeitfunction $s(F)$ statt t einführen, sind wir also in der Lage die äusseren Coordinaten q_k auszudrücken als Functionen von F; und indem wir bloss diese Ausdrücke $q_k(F)$ statt q_k einführen, die innern Coordinaten aber unverändert beibehalten, sind wir auch in der Lage das Potential

$$U(q_{i_1}, q_{i_2}, \ldots, q_{i_n};\ q_{k_1}, q_{k_2}, \ldots, q_{k_m})$$

auszudrücken als Function derselben Coordinaten $q_{i_1}, \ldots, q_{i_n}$ und der Grösse F; wir wollen diesen Ausdruck

$$U\left(q_{i_1}, q_{i_2}, \ldots, q_{i_n};\ q_{k_1}(F), q_{k_2}(F), \ldots, q_{k_m}(F)\right)$$

mit $\overline{U}$ bezeichnen. Führen wir denselben in die Hamilton'sche Function $f \equiv T + U$ und in die Bedingungsgleichung ein, so erhalten wir auch

$$\bar{f} \equiv T + \overline{U}$$

und die Bedingungsgleichung der Variation

$$F \equiv T - \overline{U}$$

dargestellt als solche Functionen der Coordinaten q_i, der Geschwindigkeiten q_i' und der Energie F, die *nur* für die als *numerisch gegeben* vorausgesetzten Anfangs-Coordinaten und Geschwindigkeiten Berechtigung haben.

Wir wollen uns diese Functionen $\overline{U}$ und $\bar{f}$, so wie auch die genannten Anfangswerthe als gegeben denken.

Das Princip der kleinsten Action lässt sich nun bei Zugrundelegung der so ausgedrückten Function $\overline{U}$ fast vollständig nach der Helmholtz'schen Weise formuliren, nämlich wie folgt:

Es wird gefordert erstens: dass die Variation der Action bei variirender Zeitdauer verschwinde für den Uebergang aus der festen Anfangslage in die feste Endlage;

zweitens: dass in der Bedingungsgleichung $F = T - \overline{U}$, die für die variirte Bewegung ebenso giltig erklärt wird als für die unvariirte, die Energie F variabel sei und eine und dieselbe Werthreihe durchlaufe;

drittens: dass nicht nur die Anfangslagen, sondern auch die Anfangsgeschwindigkeiten dieselben seien, die bei Berechnung des Ausdrucks für $\bar{f}$ benutzt wurden; auch der Anfangswerth der Energie sei ein und derselbe.

Diese Formulirung des Actionsprincips soll mit E) bezeichnet werden.

Die ersten beiden Forderungen kommen auch bei der Helmholtzschen Formulirung vor; die dritte Forderung fehlt bei Helmholtz, sie

ist aber, wenn das Problem ein vollkommen bestimmtes sein soll, unumgänglich nothwendig.

Die Rechnungen von Helmholtz lassen sich auf dieser Grundlage Wort für Wort durchführen bis zu jenem Punkte, wo man als nothwendige und hinreichende Bedingung für das Verschwinden der Action die Differentialgleichungen erhält:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{f}}{\partial q_i'} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Diese den Lagrange'schen Bewegungsgleichungen *der äussern Form* nach identischen Gleichungen enthalten statt der Zeit t explicite die Energie F, die selbst eine Unbekannte des Problems ist; daher ist das gefundene System von Differentialgleichungen ein von dem Lagrange'schen wesentlich verschiedenes. Die n Gleichungen müssen sogar durch die Bedingungsgleichung ergänzt werden, um überhaupt ein System zu bilden, das zur Bestimmung der in ihnen vorkommenden $n + 1$ Unbekannten genügen könne; und man sieht auf den ersten Blick, dass die *allgemeine* Lösung dieser $n + 1$ Gleichungen eine ganz andere sein wird, als die des eigentlichen Lagrange'schen Systems von n Differentialgleichungen. Aber unserer dritten Forderung gemäss ist nicht von der allgemeinen Lösung die Rede, sondern nur von jener *particulären* Lösung, die von *denselben* Anfangswerthen ausgehen soll als die Lagrange'sche, — ebenfalls particuläre — Lösung. Es wird daher, wenn die Formulirung des Actionsprincips richtig sein soll, nur noch zu beweisen sein, dass *diese* beiden zusammenfallen. Dieser Beweis wird im Verlauf dieser Untersuchungen auch unter allgemeineren Voraussetzungen bezüglich der Beschränkungen des Systems und bezüglich der angreifenden Kräfte gegeben werden. Hier handelte es sich nur darum, die leitenden Ideen und das Verhältniss meiner Arbeit zur Helmholtz'schen Darstellung zu erörtern. Der bisher besprochene Theil meiner Arbeit weicht von der Helmholtz'schen darin ab, dass ich ebensoviel Gleichungen erhalte als Unbekannte im Problem vorkommen, und dass ich die Uebereinstimmung der Gleichungen mit den dynamischen bezüglich der particulären Lösungen nachweise; während v. Helmholtz die Bedingungsgleichung des Problems zum Schluss nicht mehr erwähnt, und wiewohl er in Uebereinstimmung mit mir bemerkt, dass die Gleichungen des Problems insofern noch nicht die Lagrange'schen sind, als in ihnen die nicht zu variirende Variable enthalten ist, den wesentlichen Umstand, dass hier nur von gemeinschaftlichen *particulären* Lösungen die Rede sein kann, ausser Acht lässt. Darum sind auch die weitern Schlüsse, die mittels der Hilfsvariablen gezogen werden, bei *dieser* Deutung des Helmholtz'schen Variationsverfahrens, soviel ich sehe, nicht fest begründet.

III. Die Helmholtz'sche Formulirung des Actionsprincips setzt für die variable Energie fest, dass sie keiner Variation unterliege. Lässt man diese Festsetzung fallen, und nimmt an deren Stelle an, dass die Energie durch *eine und dieselbe* numerisch feste Zeitfunction darstellbar sei sowohl in der variirten als auch in der unvariirten Bewegung, so zeigt eine leichte Rechnung, dass die Variation der Action — bei variirender Zeitdauer und festen Endlagen — für die natürliche Bewegung verschwindet, aber nicht *nur* für die natürliche. Es fragt sich daher, welche Forderungen aufzustellen sind, damit sämmtlichen Forderungen des Problems *nur* die natürliche Bewegung genüge.

Es soll gezeigt werden, dass man bei Einhaltung der Vorschrift, dass bei Durchführung der Variation die Energie variire, das Princip der kleinsten Action auf mehr als eine Weise formuliren kann. Ich hebe hier die folgenden Formulirungen hervor:

Man verlange, dass die Variation der Action verschwinde für den Uebergang aus einer festen Anfangslage in eine feste Endlage auch bei beliebig variirender Zeitdauer. Die Definitionsgleichung der Energie in der unvariirten Bewegung $G = 0$ (*pag.* 521, (3)) *diene zugleich als Bedingungsgleichung des Variationsproblems; und man bewirke die Variation auf die Weise, dass die Variation der Energie*

$$= E'(t)\,\delta t$$

sei, unter $E(t)$ *die eben eingeführte numerisch feste Zeitfunction der Energie verstanden. Man stelle endlich Eine der folgenden Forderungen auf:*

A) *Die Variation der Action verschwinde selbst dann, wenn eine beliebige Zwischenlage in der gesuchten Bewegung als feste Endlage aller variirten betrachtet wird.*

B) *Die Bewegung gehe aus gegebener Lage mit gegebenen Geschwindigkeiten aus, und die feste Function* $E(t)$ *sei eben die Lagrange'sche zu den gegebenen Werthen gehörige Zeitfunction der Energie.*

C) *Es habe für die gesuchte Bewegung der Satz von der lebendigen Kraft Giltigkeit.*

D) *Es habe an dessen Stelle allgemeiner irgend ein anderer Satz Giltigkeit, dessen Gleichung aus den Lagrange'schen Bewegungsgleichungen linear zusammengesetzt ist.*

In einem jeden dieser vier Fälle genügt sämmtlichen Forderungen die Lagrange'sche Bewegung und nur sie.

Von diesen Conceptionen des Actionsprincips steht die mit der Forderung C) ergänzte zu der Helmholtz'schen Arbeit in naher Beziehung. Die einzuhaltende Bedingung ist nämlich

$$\delta F = \delta T - \delta U$$

d. i.

$$E'(t)\,\delta t = \delta T - \sum_1^n \frac{\partial U}{\partial q_i}\,\delta q_i - \frac{\partial U}{\partial t}\,\delta t.$$

Da nun die Forderung C) ihren Ausdruck in der Gleichung

$$\frac{dF}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0,$$

d. i.

$$E'(t) + \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

findet, so nimmt diese Bedingungsgleichung der Variation die Gestalt an

$$(*) \qquad 0 = \delta T - \sum_1^n \frac{\partial U}{\partial q_i}\,\delta q_i.$$

Wenn man aber in den Helmholtz'schen Rechnungen die Gleichung 1b pag. 232 oder 2a pag. 234 durch diese ersetzt, so ergeben sich die Bewegungsgleichungen direct in der eigentlichen Lagrange'schen Form.

Es lässt sich aber schwerlich annehmen, dass v. Helmholtz *dies* im Sinne gehabt hätte. Dagegen sprechen seine mehrmals wiederholte ausdrückliche Variationsvorschrift, „dass der vorhandene Betrag der Energie des Systems nicht geändert werde", wie auch die von der letzten Alinea, pag. 233, an stehenden Schlüsse: „Im F allein würde noch ϑ stecken können, ...". Bei dieser Auffassung könnten ja in den abgeleiteten Bewegungsgleichungen ausser der Zeit, den Coordinaten und den Beschleunigungen andere variable Grössen schon von Haus aus nicht vorkommen. Die soeben citirten Schlüsse hätten daher gar keinen Sinn.

Ich erlaube mir noch eine Bemerkung: Man kann nämlich in dem Helmholtz'schen Specialfall die Forderung C) und die Vorschrift, dass die Energie eine feste Zeitfunction sei, in die *Eine* zusammenfassen, dass vorschriftlich

$$\delta F = -\frac{\partial U}{\partial t}\,\delta t$$

sei, und man kann eine ähnliche Zusammenfassung auch im allgemeinsten Falle aufstellen. Diese Vorschrift führt direct zur Gleichung (*); sie muss aber, um vollständig erfasst werden zu können, doch nachträglich in ihre natürlichen Bestandtheile zerlegt werden; dies der Grund, weshalb ich von dieser Zusammenfassung absehe.

§ 2.

Zusammenfassung der Bezeichnungen.

IV. Im Anschluss an die Arbeit des Herrn A. Mayer sollen folgende Bezeichnungen eingeführt werden.

Es bezeichne überall:

T die lebendige Kraft des Punktsystems,
U das Potential des Punktsystems,
q_i die unabhängigen Coordinaten desselben,
a_i, b_i die Anfangs- resp. Endwerthe der Coordinaten,
a_i', b_i' „ „ „ „ „ Geschwindigkeiten,
t die veränderliche Zeit,
t_1 ein Zeitintervall,
n die Anzahl der unabhängigen Coordinaten der innern Punkte des Systems.

Es bezeichne ferner F eine (etwa im Ausdruck von U vorkommende) veränderliche Grösse, $E(t)$ eine für die Variation *feste* Function der Zeit, und es sei

$$(1) \qquad q_i' \equiv \frac{dq_i}{dt},$$

$$(2) \qquad f \equiv T + U,$$

$$(3) \qquad G \equiv \sum_1^n{}_i \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' - f - F,$$

$$(4) \qquad L_i \equiv \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_i'},$$

$$(5) \qquad H = \int_0^{t_1} (T + U)\, dt - \int_0^{t_1} f\, dt,$$

$$(6) \qquad J = \int_0^{t_1} (f + F)\, dt,$$

$$(7) \qquad A = \int_0^{t_1} \sum_1^n{}_i \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i'\, dt - \int_0^{t_1} (f + F + G)\, dt.$$

Demgemäss ist f eine gegebene Function der unabhängig veränderlichen Grössen q_i, q_i', F und t, und enthält auch, nämlich in U, eine willkürliche additive Constante; diese Constante soll keiner *Variation* unterliegen. Da bei der Variation der Zeitintegrale H, J und A die Zeit t der Variation unterliegen soll, so führen wir als reihendes Element

eine unvariirbare Veränderliche φ ein, und bezeichnen die Differentialquotienten der Zeit und der Coordinaten nach ihr, wie folgt:

$$\dot{t} = \frac{dt}{d\varphi},$$

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{d\varphi}.$$

Es bestehen dann die Identitäten:

$$(8)\qquad \begin{aligned} q_i' &= \frac{\dot{q}_i}{\dot{t}}, \\ \frac{\partial q_i'}{\partial \dot{t}} &= -\frac{\dot{q}_i}{\dot{t}^2} = -\frac{q_i'}{\dot{t}}, \\ \frac{\partial f}{\partial q_i'} &= \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i'} = \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\dot{t} = \frac{\partial (f\dot{t})}{\partial \dot{q}_i}, \\ \dot{t}\frac{\partial f}{\partial \dot{t}} &= \dot{t}\sum_1^n{}_i \frac{\partial f}{\partial q_i'}\frac{\partial q_i'}{\partial \dot{t}} = -\sum_1^n{}_i \frac{\partial f}{\partial q_i'}q_i', \\ \frac{\partial (f\dot{t})}{\partial \dot{t}} &= -\sum_1^n{}_i \frac{\partial f}{\partial q_i'}q_i' + f. \end{aligned}$$

Man verificirt endlich aus (3) leicht

$$(9)\qquad H_0 \equiv \sum_1^n{}_j \frac{\partial G}{\partial q_j'}q_j' \equiv \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_j \frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial q_j'}q_i' q_j'.$$

Es soll vorausgesetzt werden, dass diese Grösse H_0 in dem in Betracht kommenden Zeitintervall von 0 bis t_1 nirgends verschwinde, und dasselbe soll auch von der folgenden Functionaldeterminante vorausgesetzt werden:

$$(9')\qquad D_1 \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial q_1' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_1' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial q_1' \partial q_n'} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial q_2' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_2' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial q_2' \partial q_n'} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial q_n' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_n' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial q_n' \partial q_n'} \end{vmatrix}.$$

§ 3.

Die Bewegungsgleichungen des Punktsystems.

V. Für die Bewegung des Punktsystems bestehe das folgende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$(10') \qquad L_i \equiv \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_i'} = 0; \quad [i = 1, 2, \ldots, n]$$

$$(10'') \qquad \frac{dG}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\left[\sum_1^n{}_i \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' - f - F\right] = 0.$$

Bei Ausführung der angezeigten partiellen Differentiationen nach q_i und q_i' sind die in f explicite vorkommenden Grössen t und F als constant anzusehen. Kommt F in f explicite nicht vor, so sind die Gleichungen bekanntlich die von Lipschitz und Schering verallgemeinerten sogenannten Lagrange'schen Bewegungsgleichungen*). In diesem Specialfall ist F die Energie des Systems. Kommt F in f auch explicite vor, so soll f der Beschränkung unterliegen, dass die $n + 1$ Gleichungen zur Bestimmung der in ihnen enthaltenen $n + 1$ Grössen

$$q_1, q_2, \ldots, q_n, F$$

als Functionen von t genügen, und falls die Anfangswerthe der Coordinaten, der Geschwindigkeiten und des F gegeben sind, diese Functionen eindeutig bestimmen.

Ich werde im Folgenden die Gleichungen (10') und (10'') auch in dem allgemeinsten Falle die *Lagrange'schen Bewegungsgleichungen*, und die Grösse F *die Energie des Systems* nennen.

VI. *Satz von der lebendigen Kraft. Das Integral $G =$ constans als Definition der Energie.*

Die identische Gleichung (3) giebt die folgende:

$$(10) \qquad \frac{dG}{dt} \equiv \sum_1^n{}_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_i'} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\right) q_i' - \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial F}\frac{dF}{dt} - \frac{dF}{dt};$$

aus ihr folgt daher bei Rücksicht auf die Gleichungen (10'), (10'')

$$(11) \qquad -\frac{dG}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(1 + \frac{\partial f}{\partial F}\right)\frac{dF}{dt} = 0.$$

Diese Gleichung spricht den Satz von der lebendigen Kraft aus für die betrachtete Bewegung, und bestimmt im Allgemeinen den Differentialquotienten der Energie nach der Zeit als einwerthige Function der gleichzeitigen q_i, q_i', t und F. In einem Specialfall jedoch, der für die Folge von Wichtigkeit sein wird, fällt $\frac{dF}{dt}$ aus der Gleichung

*) Lipschitz: Untersuchungen eines Problems etc. Crelle's Journal Bd. 74; E. Schering, Hamilton-Jacobi'sche Theorie etc. Göttinger Abh. 1873.

heraus. Es ist dies der Fall, wo f von t explicit nicht abhängt, und $\frac{dF}{dt}$ von Null doch verschieden sein soll.

Die Gleichung (11) zeigt, dass in diesem Falle zu jeder Zeit

$$1 + \frac{\partial f}{\partial F} = 0 \tag{11'}$$

sein muss. In diesem Specialfall bestimmt aber eben diese Gleichung die Energie F unmittelbar als Function der q_i und q_i'; es wäre denn, dass die Gleichung eine Identität wäre, welchen Fall wir aber von der Betrachtung ausschliessen wollen.

Ist umgekehrt f von t explicit unabhängig, und finden in der Bewegung neben den Gleichungen (10') auch die Gleichung (11') zu jeder Zeit statt, so zeigt ein Blick auf die Identität (10), dass dann auch die Gleichung

$$\frac{dG}{dt} = 0$$

zu jeder Zeit stattfindet.

Ich werde im folgenden diese durch die Gleichungen (10') und (11') definirte Bewegung die Lagrange'sche *zweiter Classe* nennen; hingegen soll jene Bewegung, zu deren Definition die Gleichungen (10') hinreichen, falls f von F explicit unabhängig ist, die Lagrange'sche *erster Classe* genannt werden.

Man sieht unmittelbar, dass

$$G = \sum_1^n{}_i \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' - f - F = \text{const.} \tag{10''}$$

ein allgemeines Integral der Differentialgleichungen der Bewegung ist; diese Gleichung soll im folgenden *die Definitionsgleichung der Energie* genannt werden. Ist aber die Bewegung eine Lagrange'sche zweiter Classe, so liefert auch die Gleichung (11') eine Beziehung zwischen F, den q_i und den q_i'. Man erhält daher mittels Elimination von F aus den Gleichungen (10'') und (11') ein *allgemeines Integral der Differentialgleichungen*, in welchem bloss die q_i und die q_i' vorkommen.

Bemerkung. Die Auflösung der Gleichung (11') nach F sei

$$F = \overline{F}(q_1, \ldots, q_n;\ q_1', \ldots, q_n'),$$

und man bezeichne mit $\bar{f}$ diejenige Function, die sich aus f ergiebt, wenn an Stelle von F die Function $\overline{F}$ substituirt wird.

Wir haben dann

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial F}\frac{\partial \overline{F}}{\partial q_i},$$

daher vermöge der Gleichung (11')

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}(\bar{f} + \overline{F});$$

und ebenso

$$\frac{\partial f}{\partial q_i'} = \frac{\partial}{\partial q_i'}(\bar{f} + \overline{F}).$$

Ist daher die Bewegung von der zweiten Classe, so ergeben ihre $n+1$ Bewegungsgleichungen die von F vollständig freien n Gleichungen

$$(10^*) \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q_i'}(\bar{f} + \overline{F}) - \frac{\partial}{\partial q_i}(\bar{f} + \overline{F}) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Die zum Potential U gehörige Bewegung zweiter Classe ist demnach, *kinematisch* betrachtet, identisch mit derjenigen Bewegung erster Classe (10*), die zum Potential $\overline{U} + \overline{F}$ gehört. Aber die *Energiemengen* sind in beiden Fällen verschieden. Bei der Bewegung zweiter Classe ist nämlich *die gesammte Energie* des Systems $= F$, also variabel; bei der durch das System (10*) definirten Bewegung erster Classe hingegen ist diese Grösse

$$= \sum_1^n{}_i \frac{\partial(\bar{f} + \overline{F})}{\partial q_i'} q_i' - (\bar{f} + \overline{F}),$$

und daher constant. Die beiden Bewegungen sind demnach physikalisch genommen verschieden. Auch ihr Verhalten dem Actionsprincip und überhaupt den Variationsprincipien gegenüber ist ein verschiedenes; und hierauf wird es uns zunächst ankommen.

§ 4.

Das Hamilton'sche Princip in allgemeiner Form.

VII. Wir supponiren bei der Berechnung der Variation des Zeitintegrals H, dass sämmtliche Punkte des Systems die für die Variation *festen* Anfangslagen a_i gleichzeitig, zur Zeit $t = 0$, verlassen, und in die *festen* Endlagen b_i gleichzeitig ankommen, dass jedoch die Zeitdauer t_1 der Ueberführung der Variation unterliegt; die Variation der Zeitdauer t_1 sei mit δt_1 bezeichnet. Es ergiebt sich dann auf bekannte Weise

$$\delta \int_0^{t_1} f\,dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sum_1^n{}_i \left(\frac{\partial(f\dot{t})}{\partial q_i} - \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial(f\dot{t})}{\partial \dot{q}_i}\right) \delta q_i\, d\varphi$$

$$+ \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left(\frac{\partial(f\dot{t})}{\partial t} - \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial(f\dot{t})}{\partial \dot{t}}\right) \delta t\, d\varphi$$

$$+ \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\partial(f\dot{t})}{\partial F}\,\delta F\, d\varphi + \left(\frac{\partial(f\dot{t})}{\partial \dot{t}}\,\delta t\right)_{t_1}.$$

Daraus ergiebt sich mit Herbeiziehung der Bezeichnungen und der Resultate in IV

$$(12^*)\quad \delta\int_0^{t_1} f\,dt = \int_0^{t_1}\Big(\sum_1^n{}_i L_i\,\delta q_i + \Big(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d}{dt}\Big(\sum_1^n{}_i \frac{\partial f}{\partial q_i'}q_i' - f\Big)\Big)\delta t + \frac{\partial f}{\partial F}\delta F\Big)dt$$
$$-\Big(\sum_1^n{}_i \frac{\partial f}{\partial q_i'}q_i' - f\Big)_{t_1}\delta t_1,$$

das ist nach (3) und (5)

$$(12)\quad \delta H = \int_0^{t_1}\Big(\sum_1^n{}_i L_i\,\delta q_i + \Big(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dF}{dt} + \frac{dG}{dt}\Big)\delta t + \frac{\partial f}{\partial F}\delta F\Big)dt$$
$$-(F+G)_{t_1}\delta t_1.$$

Nimmt man Rücksicht auf die Identitäten

$$\delta\int_0^{t_1} F\,dt = \int_0^{t_1}\Big(\delta F - \frac{dF}{dt}\delta t\Big)dt + F_{t_1}\delta t_1,$$
$$\delta\int_0^{t_1} G\,dt = \int_0^{t_1}\Big(\delta G - \frac{dG}{dt}\delta t\Big)dt + G_{t_1}\delta t_1,$$

so findet man mittels Addition zu δH bei Miteinbeziehung von (6) und (7)

$$(13)\quad \delta J = \int_0^{t_1}\Big(\sum_1^n{}_i L_i\,\delta q_i + \Big(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dG}{dt}\Big)\delta t + \Big(1 + \frac{\partial f}{\partial F}\Big)\delta F\Big)dt - G_{t_1}\delta t_1,$$

$$(14)\quad \delta A = \int_0^{t_1}\Big(\sum_1^n{}_i L_i\,\delta q_i + \frac{\partial f}{\partial t}\delta t + \Big(1 + \frac{\partial f}{\partial F}\Big)\delta F + \delta G\Big)dt.$$

Eine *nothwendige* Bedingung zum Verschwinden sowohl des δH als des δJ und des δA bei *ganz* willkürlichen δq_i ist daher das Bestehen des Gleichungssystems

$$L_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Wenn aber diese Gleichungen bestehen, so vereinfachen sich die Ausdrücke von δH, δJ und δA auch in Folge der Identität (10); wir haben nämlich:

$$(12') \quad \delta H = \int_0^{t_1} \frac{\partial f}{\partial F}\left(\delta F - \frac{dF}{dt}\delta t\right)dt - (F+G)_{t_1}\delta t_1,$$

$$(13') \quad \delta J = \int_0^{t_1} \left(1+\frac{\partial f}{\partial F}\right)\left(\delta F - \frac{dF}{dt}\delta t\right)dt - G_{t_1}\delta t_1,$$

$$(14') \quad \delta A = \int_0^{t} \left(1+\frac{\partial f}{\partial F}\right)\left(\delta F - \frac{dF}{dt}\delta t\right)dt + \int_0^{t_1}\left(\delta G - \frac{dG}{dt}\delta t\right)dt.$$

Daraus folgt, dass das Bestehen des Gleichungssystems $L_i = 0$ zum Verschwinden von δH, δJ und δA, wenigstens *im Allgemeinen*, selbst dann nicht genügt, wenn $\delta t_1 = 0$ ist. Aus den Gleichungen (12), (13), (12'), (13') ergeben sich ferner mit Leichtigkeit die folgenden Consequenzen:

VIII. *Das Hamilton'sche Princip für die Lagrange'sche Bewegung erster Classe.* Ist f explicit unabhängig von F und soll δH bei nicht variirender Zeitdauer t_1 und bei ganz willkürlichen δq_i verschwinden, so ist hierzu das Bestehen des Gleichungssystems

$$L_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

eine nothwendige und hinreichende Bedingung. Die Bewegung ist daher jedenfalls die Lagrange'sche erster Classe.

Das Hamilton'sche Princip für die allgemeine Lagrange'sche Bewegung. Stellt man bezüglich der Variation die Forderung auf, dass $\delta H = 0$ sei bei unvariirter Zeitdauer und bei ganz willkürlichen δq_i, während zwischen δF und δt die Beziehung

$$(15) \qquad \delta F = \frac{dF}{dt}\delta t$$

stattfinden soll; stellt man ferner zur Definition von F von vornherein die Gleichung $G = 0$ auf, so ist die Bewegung gewiss die allgemeine Lagrange'sche.

Da nämlich $\delta t_1 = 0$ ist, und die Gleichung (15) bestehen soll, so verschwindet die rechte Seite der Gleichung (12'); diese besteht aber dann und nur dann, wenn die unvariirte Bewegung den Gleichungen $L_i = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gemäss vor sich geht. Diese $L_i = 0$ mitsammt der von vornherein geforderten Gleichung $G = 0$ definiren aber die Lagrange'sche Bewegung (10'), (10'').

Bemerkung. Da f auch eine willkürliche nicht zu variirende Constante enthält (pag. 521), so sind die Gleichungen $G = \text{const.}$ und $G = 0$ äquivalent. Man bemerkt auch, dass diese Gleichung sich nicht

aus dem Princip ergab, sondern von vornherein angenommen werden musste. Das folgende Variationsprincip ist in dieser Beziehung vollkommener.

IX. *Variationsprincip für die Lagrange'sche Bewegung zweiter Classe.* Soll δJ bei ganz willkürlichen δq_i, δF und δt_1 selbst dann verschwinden, wenn man die unvariirte Bewegung mit einer *beliebigen* solchen vergleicht, deren Anfangslage dieselbe ist, wie die der unvariirten, deren Endlage aber diejenige ist, welche die unvariirte zu einer *beliebigen* Zeit zwischen 0 und t_1 einnimmt, so ist hiezu das Bestehen der Gleichungen

$$L_i = 0,$$

$$1 + \frac{\partial f}{\partial F} = 0,$$

$$G = 0$$

eine nothwendige und hinreichende Bedingung. Die Bewegung ist daher jedenfalls eine Lagrange'sche zweiter Classe.

Bemerkung. Die Bedingung (15) läuft auf die Forderung hinaus, dass die Energie in den variirten und in den unvariirten Bewegungen eine und dieselbe *feste* Zeitfunction sein soll mit numerisch bestimmten Coefficienten. Die Gleichung (15) ist daher der folgenden äquivalent:

$$F = E(t). \tag{16}$$

Das entsprechende Variationsprincip für die allgemeine Lagrange'sche Bewegung. Soll aber δF nicht mehr willkürlich sein, sondern der Beschränkung (16), d. i. der Gleichung

$$\delta F = \frac{dF}{dt}\,\delta t \tag{15}$$

unterliegen, während die δq_i und δt_1 willkürlich sind, und soll δJ selbst dann verschwinden, wenn t_1 (wie soeben) eine beliebige Zwischenzeit bedeutet, so ist hiezu das Bestehen der Gleichungen

$$L_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$G = 0$$

eine nothwendige und hinreichende Bedingung. Die Bewegung ist daher jedenfalls eine Lagrange'sche.

§ 5.

Das Actionsprincip, wenn die Energie für variirbar erklärt wird.

X. Das mit A bezeichnete Zeitintegral wird bekanntlich im Specialfall, wenn T eine homogene, quadratische Function der q_i' ist und U nur von der Lage abhängt, *die Action des Systems* genannt; es soll auch *im allgemeinsten Falle* mit demselben Namen belegt werden.

Da der Ausdruck (14′) eine Folge von (14) ist, sobald sämmtliche δq_i *ganz* willkürlich sind, (14′) aber verschwindet, wenn der Variation die Beschränkung auferlegt wird, dass sowohl F als auch G dieselben numerischen Zeitfunctionen seien in der variirten Bewegung als in der unvariirten — im Sinne der Gleichungen (15), (16), — so können wir die folgenden Sätze aussprechen:

1. Wird gefordert, dass die Variation der Action verschwinde bei Ueberführung aus einer festen Anfangslage in eine feste Endlage, und wird gefordert, dass F und G in den variirten und in den unvariirten Bewegungen *dieselben* Zeitfunctionen bleiben sollen, so ist hiezu das Bestehen der Gleichungen

$$L_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

eine nothwendige und hinreichende Bedingung.

Da demnach G beliebig veränderlich sein darf, so entspricht diesen Forderungen *nicht nur* die Lagrange'sche Bewegung.

2. Halten wir die Forderung bezüglich F aufrecht, während wir die Variation von G für unabhängig erklären von der Variation der Zeit, so ist zum Verschwinden der Actionsvariation das Bestehen der Gleichungen

$$L_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\frac{dG}{dt} = 0,$$

$$\int_0^{t_1} \delta G \, dt = 0 \tag{17′}$$

eine hinreichende Bedingung.

Den Forderungen entspricht daher die Lagrange'sche Bewegung nur in dem auch durch die Gleichung (17′) beschränkten Variationsbereich. Dieser Beschränkung zufolge sind aber die δq_i und das δt nicht mehr *ganz* unabhängig von einander, daher sind diese hinreichenden Bedingungen nicht zugleich nothwendige.

3. Lassen wir auch die Forderung bezüglich F fallen, indem wir sowohl F als auch G für Grössen erklären, deren Variation unabhängig ist von der Variation der Zeit, so haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem f explicit *abhängig* ist von F oder *nicht*.

a) Bildet die Gleichung (17′) eine Variationsbedingung, und bestehen die Gleichungen

$$L_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

und soll δA bei beliebigem δF und δt verschwinden, so ist hiezu das Bestehen der Gleichungen

$$1 + \frac{\partial f}{\partial F} = 0,$$

$$\frac{dG}{dt} = 0$$

nothwendig und hinreichend. Die Bewegung ist daher eine Lagrange'sche zweiter Classe.

b) Ist aber f explicit unabhängig von F, so lautet die Gleichung (14′), wie folgt:

$$\delta A = \int_0^{t_1} \left(\delta F + \delta G - \left(\frac{dF}{dt} + \frac{dG}{dt} \right) \delta t \right) dt.$$

Demzufolge genügt es zum Verschwinden von δA, dass die Gleichungen

$$L_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$F + G \equiv \sum_1^n{}_i \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' - f = \text{const.},$$

$$(17'') \qquad \int_0^{t_1} \delta(F+G)\, dt \equiv \int_0^{t_1} \delta \left(\sum_1^n{}_i \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' - f \right) dt = 0$$

Bestand haben. Die Bewegung ist eine Lagrange'sche erster Classe, in der die Erhaltung der lebendigen Kraft giltig ist; und das Verschwinden der Variation der Action bei festen Grenzlagen trifft nur in dem durch die einzige Gleichung (17″) beschränkten Bereich zu.

XI. Die Umkehrung des soeben betrachteten Satzes (3, b) wurde in der angeführten Arbeit des Herrn A. Mayer vollständig erledigt. Die Umkehrung des Satzes (3, a) wird uns im folgenden Paragraphen beschäftigen. Hier wird es sich um jene Ergänzungen des Satzes (2) handeln, die bezüglich der Forderungen des Variationsproblems aufzustellen sind, damit allen Forderungen die Lagrange'sche Bewegung *allein* genüge. Diese Ergänzungen sind in den pag. 519 ausgesprochenen Sätzen enthalten, die nun zu beweisen sind.

Ich setze der Lagrange'schen Methode gemäss

$$(18) \qquad \Omega \equiv \sum_1^n{}_i \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' + (\lambda - 1) G,$$

wo $(\lambda - 1)$ den Lagrange'schen Multiplicator bezeichnet, und wo

$$G \equiv \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' - f - F = 0 \tag{17}$$

die Bedingungsgleichung der Variation ist; und berechne die Variation des Zeitintegrals von Ω, nämlich

$$\delta \int_0^{t_1} \Omega \, dt.$$

Sie ist durch die Gleichung (12*) gegeben, wenn überall Ω statt f gesetzt wird. Die Unbekannten des Problems, die q_i und F, denen sich auch λ zugesellt, sind so zu bestimmen, dass sämmtliche Factoren der δq_i, δt und δt_1 verschwinden, — wobei natürlich auf die durch die Gleichung (15) ausgedrückte Forderung Rücksicht zu nehmen ist.

Wir haben also ausser der Gleichung (17) — wenn wir einstweilen von den Ergänzungen A), B), C) und D) pag. 519 absehen — Alles zusammen noch die folgenden Gleichungen zu erfüllen:

$$\left(\sum_1^n \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' - \Omega \right)_{t_1} = 0, \tag{a}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{b}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_1^n \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' - \Omega \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial F} \frac{dF}{dt} = 0. \tag{c}$$

Da die Gleichung (c) eine Folge des Systems (b) ist, so bleiben zur Bestimmung der $n + 2$ Unbekannten

$$\lambda, F, q_1, q_2, \ldots, q_n$$

nur die Gleichungen (17), (b) und (a), von denen die letzte bloss zur Zeit t_1 zu befriedigen ist.

Mit Bezugnahme auf (18) und (9) ergiebt sich leicht

$$\sum_1^n \frac{\partial \Omega}{\partial q_j'} q_j' - \Omega \equiv G + \lambda (H_0 - G),$$

daher haben wir mit Rücksicht auf (17)

$$\sum_1^n \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' - \Omega = \lambda H_0. \tag{19'}$$

Das zur Rechten stehende Product soll der Gleichung (a) gemäss verschwinden, wenn $t = t_1$ ist. Da aber der zweite Factor den Voraussetzungen für f gemäss nie verschwindet, so erfordert dieses das Ver-

schwinden des ersten Factors. Wir haben also *zur Zeit* t_1, aber, wie aus (c) ersichtlich, im Allgemeinen auch *nur* zu dieser Zeit die Grenzgleichung

(19) $$\lambda = 0$$

einzuhalten.

Die Anzahl der Unbekannten des Problems ist aber, F und λ mitgerechnet, $n+2$, während die Anzahl der zur Verfügung stehenden Differentialgleichungen auf diese Weise nur $n+1$ ist. Solange also keine *neue* Forderung hinzukommt, bleibt das Problem gewiss unbestimmt.

XII. Die neu hinzutretende Forderung sei erstens die pag. 519 mit A) bezeichnete, nämlich die folgende: Man verlange, dass die gesuchte Bewegung den gestellten Variationsbedingungen selbst dann genüge, wenn man sie mit variirten Bahnen vergleicht, die zur Zeit 0 von denselben Anfangslagen a_i ausgehen wie die gesuchte Bewegung, und zur Zeit $\tau + \delta t$ in jene Endlagen ankommen, welche in der gesuchten Bewegung zur Zeit τ passirt werden; und dies soll *unabhängig* von der Zeit τ zutreffen, wenn nur

$$0 < \tau \leqq t_1.$$

Aus den Ergebnissen des Artikels XI folgt dann unmittelbar, dass die Gleichung (19) auch für das beliebige τ, d. i. für alle Werthe von t gelten muss. Wir haben demnach

$$\lambda \equiv 0,$$

daher

$$\Omega = f + F;$$

mithin gehen die Gleichungen (b) in die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen über.

Die mit (A) *bezeichnete Formulirung des Princips der kleinsten Action ist hiermit vollkommen gerechtfertigt.*

XIII. Die neu hinzutretende Forderung sei zweitens die ebendaselbst mit (B) bezeichnete, nämlich:

Die Lagen und Geschwindigkeiten des System seien zur Zeit t_1 gegeben, und auch die Energie F sei nicht nur von Vornherein gegeben, sondern sie sei geradezu die zu diesen Daten gehörige Lagrange'sche Zeitfunction $E(t)$ der Energie.

Ich behaupte, dass dann die gesuchte Bewegung sicher den Lagrange'schen Differentialgleichungen $\big((10'),(10'')\big)$ gemäss vor sich geht.

Es sind nämlich die Werthe von

$$\lambda;\ q_1, q_2, \ldots, q_n;\ q_1', q_2', \ldots, q_n'$$

zur Zeit t_1 der Reihe nach

(20) $$0;\ b_1, b_2, \ldots, b_n;\ b_1', b_2', \ldots, b_n',$$

also gegebene Zahlen. Ferner sind die Differentialgleichungen (b) und (c) des Variationsproblems linear in den Differentialquotienten

$$\frac{d\lambda}{dt};\ \frac{dq_1'}{dt},\ \frac{dq_2'}{dt},\ \ldots,\ \frac{dq_n'}{dt}.$$

Endlich ist der zu den gegebenen Werthen (20) gehörige Werth der Determinante dieser Gleichungen von Null verschieden. Der Coefficient von $\frac{d\lambda}{dt}$ ist nämlich in der i-ten Gleichung (b)

$$A_i = -\frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda\,\partial q_i'} = -\sum_1^n{}_j \frac{\partial^2 f}{\partial q_i'\,\partial q_j'}\,q_j',$$

während die übrigen Coefficienten — da für $t = t_1$ $\lambda = 0$ ist — übergehen in

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial q_i'\,\partial q_1'},\ -\frac{\partial^2 f}{\partial q_i'\,\partial q_2'},\ \ldots,\ -\frac{\partial^2 f}{\partial q_i'\,\partial q_n'}.$$

Da ferner die Gleichung (c) mit Rücksichtnahme auf (19′) und (16) zu schreiben ist

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} + \frac{\partial\Omega}{\partial F}E'(t) + \frac{d}{dt}\lambda H_0 = 0,$$

so sind die Coefficienten der genannten Differentialquotienten in ihr zur Zeit t_1 der Reihe nach

$$H_0;\ 0, 0, \ldots, 0.$$

Die Determinante ist daher

$$-\begin{vmatrix} A_1, & \frac{\partial^2 f}{\partial q_1'\,\partial q_1'}, & \ldots, & \frac{\partial^2 f}{\partial q_1'\,\partial q_n'} \\ A_2, & \frac{\partial^2 f}{\partial q_2'\,\partial q_1'}, & \ldots, & \frac{\partial^2 f}{\partial q_2'\,\partial q_n'} \\ \vdots & & & \\ A_n, & \frac{\partial^2 f}{\partial q_n'\,\partial q_1'}, & \ldots, & \frac{\partial^2 f}{\partial q_n'\,\partial q_n'} \\ H_0, & 0 & \ldots, & 0 \end{vmatrix} = \pm H_0 D_1.$$

Die Determinante zerfällt demnach in das Product zweier Grössen, die den Voraussetzungen gemäss (pag. 522) von Null verschieden sind; daher ist es auch die Determinante selbst. Die Lösungen sind daher im Allgemeinen in nach positiven Potenzen von $t - t_1$ fortlaufende Reihen entwickelbar, mithin *eindeutig* bestimmt, wie immer $E(t)$ gegeben ist. Daraus folgt, dass wenn $E(t)$ eben die Lagrange'sche Zeitfunction sein soll, auch die Lösungen identisch sind, mit jenen particulären Lösungen der Lagrange'schen Bswegungsgleichungen, die von denselben Werthen

$$0;\ b_1, b_2, \ldots, b_n;\ b_1', b_2', \ldots, b_n'$$

ausgehen.

Setzt man in der That $\lambda \equiv 0$, so ist

$$\Omega \equiv f + E(t),$$

daher gehen die Differentialgleichungen des Variationsproblems in die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen über.

XIV. Die neu hinzutretende Ergänzung des Problems bestehe drittens in der (pag. 519) mit (C) bezeichneten Forderung: dass nämlich der Satz von der lebendigen Kraft (11) in der gesuchten Bewegung Gültigkeit habe. Die Function F ist also nicht gegeben, aber der Gleichung (11) unterworfen:

$$K \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial F} + 1\right)\frac{dF}{dt} = 0. \tag{21}$$

Man schreibe die Gleichung (c) in der aus (19′) sich ergebenden Form

$$\frac{d(\lambda H_0)}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial F}\frac{dF}{dt} = 0, \tag{c′}$$

und substituire hier statt Ω den Ausdruck (18). Man findet mit Rücksicht auf $G = 0$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial F}\frac{dF}{dt} = (1-\lambda)K + \lambda \sum_1^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial F}\frac{dF}{dt}\right) q_i'$$

$$= (1-\lambda)K + \lambda H_1,$$

wo gesetzt ist

$$H_1 = \sum_1^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial F}\frac{dF}{dt}\right) q_i', \tag{22}$$

Die Gleichung (c′) lautet daher mit Bezugnahme auf (21), wie folgt

$$\frac{d(\lambda H_0)}{dt} + \lambda H_1 = 0. \tag{c″}$$

Wenn nun H_1 im Zeitintervall von 0 bis t_1 nirgends unendlich werden soll, — was doch bei Einengung des Zeitintervalls immer vorausgesetzt werden darf, — so kann diese Gleichung nur so stattfinden, dass $\lambda \equiv 0$ ist. Wäre nämlich λ eine nicht identisch verschwindende Grösse, so würde aus (c″) folgen

$$\int_t^\tau \frac{\frac{d(\lambda H_0)}{dt}}{\lambda H_0}\, dt = -\int_t^\tau \frac{H_1}{H_0}\, dt,$$

wo

$$0 < t < \tau < t_1;$$

also

$$\lg \frac{(\lambda H_0)_\tau}{(\lambda H_0)_t} = -\int_t^\tau \frac{H_1}{H_0}\, dt.$$

Da nun H_0 nie verschwinden, H_1 nirgends unendlich sein soll, so wäre die rechte Seite der Gleichung für alle Fälle endlich; während die linke Seite unendlich gross wird, wenn τ sich der Zeit t_1 unbegrenzt nähert, da doch der Gleichung (19) gemäss zu dieser Zeit λ verschwinden muss.

Es ist daher $\lambda \equiv 0$, und die den Forderungen genügende Bewegung auch jetzt die Lagrange'sche.

Bemerkung. Sind die Verbindungen des Systems unabhängig von der Zeit, und das Potential *bloss* von der Lage und der Zeit abhängig — und dies ist der von v. Helmholtz betrachtete Fall —, so ist

$$H_1 = -\sum_1^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial t} q_i' - \frac{\partial}{\partial t} \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' = 0;$$

daher folgt in diesem Falle aus (c″) direct

$$(\lambda H_0)_t = (\lambda H_0)_{t_1} = 0,$$

also

$$\lambda \equiv 0.$$

XV. Die Ergänzung des Variationsproblems bestehe allgemeiner in der (pag. 519) mit (D) bezeichneten Forderung, dass die gesuchte Bewegung dem aus den Lagrange'schen Bewegungsgleichungen linear zusammengesetzten Satze unterliege

$$\sum_1^n \nu_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_i'} \right) = 0, \tag{23}$$

wo die Factoren ν_i bloss der Beschränkung unterworfen sind, dass in der Zeitdauer von 0 bis t_1

$$K_0 \equiv \sum_1^n \nu_i \frac{\partial G}{\partial q_i'}$$

nirgends verschwinde, und dass

$$K_1 = -\sum_1^n \left(\nu_i \frac{\partial G}{\partial q_i} + \nu_i' \frac{\partial G}{\partial q_i'} \right)$$

endlich bleibe.

Dann folgt aus den Gleichungen (b) nach Abzug der linken Seite von (23) unmittelbar die Gleichung

$$\sum_1^n \nu_i \left(\frac{\partial (\lambda G)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\lambda \frac{\partial G}{\partial q_i'} \right) \right) = 0,$$

die bei Einführung der Bezeichnungen K_0 und K_1 die Form annimmt

$$\frac{d(\lambda K_0)}{dt} - \lambda K_1 = 0. \tag{24}$$

Da aber zur Zeit t_1 die Grösse λ laut Gleichung (19) verschwinden muss, so folgt aus (24) die Identität $\lambda \equiv 0$ ebenso, wie sie in XIV aus (c″) folgte.

XVI. Im Anschluss an diese Untersuchungen möge folgendes Problem Platz finden:

Das Punktsystem gehe aus der Anfangslage $a_1, \ldots, a_n$ über in die Endlage $b_1, \ldots, b_n$. Gesucht wird die continuirliche Bewegung, für welche die erste Variation der Action verschwindet, falls der Bereich der Variation der Beschränkung unterworfen ist, dass sowohl für die variirte, als auch für die unvariirte Bewegung die Bedingungsgleichungen bestehen sollen:

$$F = E(t),$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -E'(t),$$

wo $E(t)$ eine der Variation *nur insofern* unterworfene Function von t bedeutet, als t selbst variirt; $E(t)$ ist übrigens selbst eine unbekannte Function. Die Function f sei dabei von F explicit unabhängig.

Ausserdem sei eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1. entweder sei die Zeitdauer der Action eine zwischen der Zeit 0 und einem festen Werthe beliebig veränderliche Grösse;

2. oder die Zeitdauer der Action sei fest, dafür aber der unvariirten Bewegung die Beschränkung auferlegt, dass sie der Gleichung (23) gemäss vor sich gehe, in welcher daher die ν_i nicht sämmtlich $= q_i'$ seien.

Ich werde das Problem im Falle der ersten Alternative mit C_1, im Falle der zweiten mit C_2 bezeichnen.

Setzt man hier

$$\Omega = F + f + \lambda F - E(t) + \mu\left(\frac{\partial f}{\partial t} + E'(t)\right), \tag{25}$$

so sind auch jetzt die Gleichungen (a), (b), (c) pag. 530 zu erfüllen, von denen (c) eine Folge des Systems (b) ist.

Die Gleichung (a) nimmt mit Herbeiziehung der Bedingungsgleichungen $F = E$, und $\frac{\partial f}{\partial t} = -E'$ die Form an

$$(1+\lambda)\sum_1^n \frac{\partial F}{\partial q_i'} q_i' + \mu \sum_1^n \frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial q_i'} q_i' = 0, \tag{26}$$

eine Gleichung, die im Falle des Problems C_1 für alle Werthe t von 0 an bis t_1 gelten soll.

Wir haben also zur Bestimmung von

$$1 + \lambda,\ \mu;\ q_1, q_2, \ldots, q_n$$

die Gleichung (26), die n Gleichungen des Systems (b), und die aus

den Bedingungsgleichungen mittels Elimination der unbekannten Function E sich ergebende Gleichung

$$\frac{dF}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{11*}$$

Die Anzahl der Differentialgleichungen ist gleich der Anzahl der zu berechnenden Grössen; aber in die allgemeine Lösung der Gleichungen treten $2n + 1$ *unabhängige* Constante ein, während die Anzahl der gegebenen Constanten $a_1, \ldots, b_n$ gleich ist $2n$. Das Lagrange'sche System, welches sich ergiebt, wenn

$$1 + \lambda = \mu \equiv 0$$

ist, bildet *nur* eine particuläre Lösung.

Es giebt aber einen Specialfall, in welchem — falls zwischen den Anfangscoordinaten und Geschwindigkeiten der Punkte keine Abhängigkeit stattfinden soll — nur das Lagrange'sche System den Bedingungen des Problems entspricht. Dies ist eben der von v. Helmholtz behandelte Fall.

Sind nämlich die Bedingungsgleichungen unabhängig von der Zeit, und das Potential nur insofern abhängig von der Zeit, als in ihm Coordinaten äusserer, nach vollständig gegebenem Gesetze sich bewegender Punkte vorkommen, so hat man

$$f = T + U, \quad F = T - U.$$

$$\sum_1^n \frac{\partial F}{\partial q_i'} q_i' = 2T,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial q_i'} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial q_i'} = 0, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Die Gleichung (26) geht daher über in

$$(1+\lambda) T = 0.$$

die für *beliebige* Zeitpunkte zwischen 0 und t_1 bestehen soll. Es muss daher, da T nicht $= 0$ ist, $1 + \lambda \equiv 0$ sein. Die Gleichungen (b) gehen demzufolge über in

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_i'} - \frac{\partial f}{\partial q_i} - \mu \frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial q_i} = 0, \quad (i = 1, \ldots, n)$$

ein System, welches mit dem Satz von der lebendigen Kraft (11*) nur dann verträglich ist, wenn

$$\mu \sum_1^n \frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial q_i} q_i' = 0,$$

ist. Der Factor von μ kann aber nur dann verschwinden, wenn sein Werth schon zur Zeit $t = 0$ gleich Null war, d. i. wenn Anfangslage und Geschwindigkeiten einer Beschränkung unterliegen was ausgeschlossen ist. Es muss daher $\mu \equiv 0$ sein. q. e. d.

XVII. Im Falle des *Problems* C_2 besteht die Gleichung (26) *bloss* zur Zeit $t = t_1$; dafür haben wir aber jetzt ausser den von einander unabhängigen Gleichungen (b) und (11*) noch die Gleichung (23) zu erfüllen, also zusammen $n+2$ Differentialgleichungen von der Gesammtordnung $2n + 2$ mit $n + 2$ zu bestimmenden Functionen

$$1 + \lambda, \mu, q_1, \ldots, q_n.$$

Da die allgemeine Lösung $2n + 2$ willkürliche Constanten enthält, während durch das Problem $2n$ Constanten $(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n)$ direct gegeben sind und mittels der Grenzgleichung (26) *eine* Beziehung zwischen denselben vorgeschrieben ist, so bleibt *eine* derselben *völlig* willkürlich. Die Lagrange'sche Bewegung liefert nur eine particuläre Lösung des Variationsproblems.

Es giebt aber einen Specialfall, in welchem diese Bewegung die allgemeine Lösung ergiebt. Wenn nämlich ebenso, wie vorhin, die Bedingungsgleichungen von der Zeit und das Potential von Geschwindigkeiten unabhängig sind, so geht die Gleichung (26) über in

$$(1+\lambda)_{t_1} T_{t_1} = 0.$$

daher ist $(1+\lambda)_{t_1} = 0$.

Die Gleichungen (b) lassen sich in diesem Fall schreiben, wie folgt:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_i'} + (1+\lambda)\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}(1+\lambda)\frac{\partial F}{\partial q_i'} + \mu\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial q_i}.$$

Aus ihnen ergiebt sich, mit Rücksicht auf (23), die Gleichung

$$0 = (1+\lambda)\sum_1^n{}^i \nu_i \frac{\partial F}{\partial q_i} - \sum_1^n{}^i \nu_i \frac{d}{dt}(1+\lambda)\frac{\partial F}{\partial q_i'} + \mu\sum_1^n{}^i \nu_i \frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial q_i}$$

d. i.

$$G_{10}\frac{d(1+\lambda)}{dt} - G_{11}(1+\lambda) - G_{12}\mu = 0. \tag{27}$$

wo

$$G_{10} = \sum_1^n{}^i \nu_i \frac{\partial F}{\partial q_i'}; \qquad G_{12} = \sum_1^n{}^i \nu_i \frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial q_i};$$

$$G_{11} = \sum_1^n{}^i \nu_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q_i'}\right).$$

Ebenso folgt aus demselben Gleichungssystem mittels (11*) die Gleichung

$$G_{00}\frac{d(1+\lambda)}{dt} - G_{01}(1+\lambda) - G_{02}\mu = 0, \tag{28}$$

wo gesetzt ist

$$G_{00} = \sum_1^n {}^i q_i' \frac{\partial F}{\partial q_i}; \quad G_{02} = \sum_1^n {}^i q_i' \frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial q_i};$$

$$G_{01} = \sum_1^n {}^i q_i' \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q_i'}\right).$$

Die ν_i sind nicht sämmtlich $= q_i'$, daher enthalten dle Gleichungen (27) und (28) zwei von einander unabhängige Aussagen. Die ν_i mögen der Beschränkung gemäss bestimmt werden, dass von den Determinanten

$$H_0 = G_{00}G_{12} - G_{10}G_{02},$$
$$H_1 = G_{01}G_{12} - G_{02}G_{11}$$

die erste innerhalb der Zeit 0 bis t_1 nirgends verschwinde, und die zweite nirgends unendlich gross sei; eine Bedingung, die erfüllt ist, wenn z. B.

$$\nu_i = G_{00}\frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial q_i} - G_{02}\frac{\partial F}{\partial q_i'}; \quad (i = 1, \ldots n).$$

Durch Elimination von μ aus den Gleichungen (27) und (28) ergiebt sich die Gleichung

$$\frac{d(1+\lambda)}{dt} = \frac{H_1}{H_0}(1+\lambda),$$

die für alle Zeiten von 0 an bis t_1 bestehen soll, während

$$(1+\lambda)_{t_1} = 0$$

ist. Aus denselben Gründen, wie pag. 533, folgt daher auch hier, dass

$$1 + \lambda \equiv 0.$$

Da G_{02} nicht verschwindet, so ergiebt sich schliesslich aus (28) für μ der Werth 0.

Damit ist bewiesen, dass in dem betrachteten Specialfall, — falls nur die ν_i der bezeichneten Bedingung gemäss gegeben sind, — die Bewegungsgleichungen des Systems die Lagrange'schen sind.

§ 6.

Das Actionsprincip, wenn die Energie für unvariirbar erklärt wird.

XVIII. Wir denken uns im Sinne der Ausführungen des Artikels II die allgemeine Function f, die ursprünglich als numerische Function der unabhängig veränderlichen Grössen q_i, q_i', F und t gegeben war, ausgedrückt als numerische Function $\bar{f}$ der q_i, q_i' und F. Wir erhalten nämlich diese Function

$$\bar{f}(\ldots, q_i, \ldots, q_i', \ldots, F)$$

aus der Function

$$f(\ldots, q_i, \ldots, q_i', \ldots, F, t)$$

auf die Weise, dass wir uns die zu den numerisch gegebenen Anfangswerthen der Lagen und Geschwindigkeiten gehörende Lagrange'sche Zeitfunction

$$F = E(t)$$

berechnet denken und mittels dieser Gleichung aus f die Zeit t eliminiren. Bezeichnen wir demnach die Umkehrungsfunction dieser Gleichung mit

$$t = \varepsilon(F),$$

so haben wir als Definitionsgleichung von $\bar{f}$

$$\bar{f} = f\big((\ldots, q_i, \ldots, q_i', \ldots, F, \varepsilon(F)\big).$$

Mit Zugrundelegung der so ausgedrückten Function $\bar{f}$ lautet das zu lösende Problem genau so wie pag. 517, mit dem Unterschiede dass jetzt die Action

$$-\int_0^{t_1} \sum_1^n{}_i \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_i'} q_i' \, dt$$

ist, und dass jetzt die Bedingungsgleichung des Variationsproblems die folgende ist:

$$\bar{G} \equiv \sum_1^n{}_i \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_i'} q_i' - \bar{f} - F = 0. \tag{29}$$

Zur Lösung des Problems setze man

$$\bar{\Omega} \equiv \sum_1^n{}_i \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_i'} q_i' + (\lambda - 1)\bar{G},$$

und schreibe die Bedingungen auf, die zum Verschwinden von

$$\delta \int_0^{t_1} \bar{\Omega} \, dt$$

nothwendig und hinreichend sind, nämlich die Gleichungen

$$(\bar{b}) \qquad \bar{L}_i \equiv \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial q_i'} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(\bar{c}) \qquad \frac{d}{dt}\left(\sum_1^n{}_i \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial q_i'} q_i' - \bar{\Omega}\right) = 0,$$

$$(\bar{a}) \qquad \left(\sum_1^n{}_i \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial q_i'} q_i' - \bar{\Omega}\right)_{t_0} = 0.$$

Man erhält diese von (12*) aus, wenn man an Stelle von f die Function $\bar{\Omega}$ setzt, und bedenkt, dass $\delta F = 0$ und (der Gleichung (29) zufolge) auch $\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} = 0$ ist.

Die Ueberlegungen des Artikels XII führen daher angewandt auf diese Gleichungen ($\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$) zum Resultat, dass

$$\lambda \equiv 0$$

ist. Demzufolge haben wir in den Gleichungen ($\bar{b}$) zu setzen

$$\bar{\Omega} = \bar{f} + F,$$

wodurch sie die Form annehmen:

$$(30) \qquad \bar{L}_i \equiv \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{f}}{\partial q_i'} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Diese n Gleichungen sind der *äusseren* Form nach die Lagrange'schen Gleichungen des dynamischen Problems; da aber in $\bar{f}$ an Stelle der Zeit die Function $z(F)$ steht, so bilden sie mitsammt der Gleichung (29) ein System von Differentialgleichungen, deren *allgemeine* Lösung eine ganz andere ist, als die der Lagrange'schen. Aber unserem Problem gemäss ist nur von jener *particulären* Lösung die Rede, die von den gegebenen Anfangswerthen der Coordinaten und Geschwindigkeiten ausgeht. Es genügt daher zu beweisen, dass diese particuläre Lösung der Gleichungen durch die Daten des Problems *eindeutig* bestimmt ist. Da nämlich die Lagrange'sche particuläre Lösung, welche sich auf dieselben Anfangswerthe stützt, die Gleichungen gewiss befriedigt, so muss ihre eindeutige Lösung eben die Lagrange'sche sein.

XIX. Wir betrachten zuerst den Specialfall, wo die Bedingungsgleichungen der Bewegung unabhängig sind von der Zeit, und das Potential nur abhängig von der Zeit und von den Coordinaten. Wir haben in diesem Falle

$$f = T + U,$$
$$F = T - U,$$

wo t selbst *nur* im Potential U vorkommt; daher ist

$$\bar{f} = T + \bar{U}$$

wo $\bar{U}$ aus U auf dieselbe Weise entsteht, wie $\bar{f}$ aus f.

Da nach dem Artikel VI die Gleichung

$$1 + \frac{\partial \bar{f}}{\partial F} = 0 \tag{31}$$

für jedes t gelten muss, so haben wir also gegenwärtig

$$1 + \frac{\partial \bar{U}}{\partial F} = 0.$$

Diese Gleichung ist aber eine Beziehung nur zwischen den Grössen $F, q_1, q_2, \ldots, q_n$, und erlaubt daher F darzustellen als Function der q_i. Daher können wir mit ihrer Hilfe F aus den Gleichungen eliminiren, ohne dass dabei die Coefficienten der

$$\frac{dq_1'}{dt}, \frac{dq_2'}{dt}, \ldots, \frac{dq_n'}{dt}$$

eine Aenderung erleiden. Daraus folgt aber, dass, wenn die Lagen und Geschwindigkeiten zur Zeit $t = 0$ nicht eben singuläre Stellen der Differentialgleichungen und auch der Gleichung (31) sind, ihre von diesen Anfangswerthen ausgehenden Lösungen vollständig und eindeutig bestimmt sind.

Die Determinante der Gleichungen (30) gebildet aus den soeben genannten Coefficienten ist nämlich

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial q_1' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 T}{\partial q_1' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 T}{\partial q_1' \partial q_n'} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial q_2' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 T}{\partial q_2' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 T}{\partial q_2' \partial q_n'} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 T}{\partial q_n' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 T}{\partial q_n' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 T}{\partial q_n' \partial q_n'} \end{vmatrix},$$

und diese Determinante verschwindet den Voraussetzungen gemäss nie.

XX. *Beweis der Eindeutigkeit im Allgemeinen; die singulären Stellen.* Die Gleichung (11′) des Artikels VI ist auch allgemein anwendbar, da $\bar{f}$ von t explicite nicht mehr abhängt und nach der zweiten Forderung unseres Problems (pag. 517) die Energie nicht constant sein soll. Die totalen Differentialquotienten der F und q_i' haben daher den folgenden $(n+1)$ Gleichungen zu genügen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(1 + \frac{\partial \bar{f}}{\partial F}\right) &\equiv \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial F \partial F}\frac{dF}{dt} + \sum_1^n{}_j \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial F \partial q_j'}\frac{dq_j'}{dt} + \sum_1^n{}_j \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial F \partial q_j} q_j' = 0, \\ -L_i &\equiv \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial q_i' \partial F}\frac{dF}{dt} + \sum_1^n{}_j \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial q_i' \partial q_j'}\frac{dq_j'}{dt} + \sum_1^n{}_j \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial q_i' \partial q_j} q_j' - \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_i} = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Die Determinante, gebildet aus den Coefficienten der Grössen

$$\frac{dF}{dt},\ \frac{dq_1'}{dt},\ \frac{dq_2'}{dt},\ \cdots,\ \frac{dq_n'}{dt},$$

ist die Functionaldeterminante von $\bar{f}$ nach $F,\ q_1',\ q_2',\ \cdots,\ q_n'$, nämlich

$$D \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial F \partial F}, & \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial F \partial q_1'}, & \cdots, & \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial F \partial q_n'} \\ \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial q_1' \partial F}, & \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial q_1' \partial q_1'}, & \cdots, & \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial q_1' \partial q_n'} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial q_n' \partial F}, & \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial q_n' \partial q_1'}, & \cdots, & \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial q_n' \partial q_n'} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante verschwindet aber nicht *identisch*. Bei dem Beweise dieser Behauptung genügt es, sich auf den in der Dynamik bisher ausschliesslich betrachteten Fall zu beschränken, wo f *explicit* unabhängig ist von F, und daher $\bar{f}$ nur insofern von F abhängt, als in f an Stelle der Zeit (pag. 517) die Function $z(F)$ eingesetzt wurde. Man hat in diesem Fall

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial F} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial F} = \frac{1}{E'(z)}\frac{\partial \bar{f}}{\partial z},$$

daher

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial F \partial F} = \frac{1}{E'(z)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{E'(z)}\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}\right) = \frac{1}{E'(z)^2}\left(\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial z^2} - \frac{E''(z)}{E'(z)}\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial F \partial q_i'} = \frac{1}{E'(z)}\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial q_i'}.$$

Zur Zeit $t = 0$, ist aber auch $z = 0$, und

$$E'(0) = -\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{t=0};$$

es folgt daher mittels der Identitäten

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{t=z(F)};\qquad \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_{t=z(F)};\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial z} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i'}\right)_{t=z(F)};$$

dass zur Zeit $t = 0$ die Werthe der partiellen Differentialquotienten die folgenden sind:

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial F \partial F}\right)_{t=0} = \frac{1}{E'(0)^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{E''(0)}{E'(0)}\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{t=0} = \frac{1}{E'(0)^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + E''(0)\right)_{t=0};$$

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial q_i' \partial F} = \frac{1}{E'(0)}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial t}\right)_{t=0},$$

wo auf der Rechten nach Ausführung der Differentiationen alle Coordinaten und Geschwindigkeiten durch ihre Anfangswerthe zu ersetzen sind. Bezeichnet man diese Operation wie üblich durch Hinzufügung des Index 0, so können wir den Werth von D zur Zeit $t = 0$, nämlich D_0 wie folgt, ausdrücken

$$E'^2(0) \cdot D_0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} + E''(0) & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial t} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial t} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial t} \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial t} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_n'} \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial t} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial q_n'} \\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial t} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_n'} \end{vmatrix}.$$

Dabei haben wir den Ausdruck von $\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial F \partial F}$ mittels der Ueberlegung vereinfacht, dass der Definition von $E(t)$ zufolge die Lagrange'sche Gleichung (11*) pag. 537

$$E'(t) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

für die Lagrange'sche Bewegung zu *jeder* Zeit, daher zur Zeit $t = 0$ auch für die gesuchte Bewegung stattfindet. Auf derselben Ueberlegung beruht auch die folgende Elimination von $E''(0)$ aus dem Ausdruck D_0. Wir haben aus der obigen Gleichung

$$E''(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \sum_1^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial t} q_j' + \sum_1^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_j' \partial t} \frac{dq_j'}{dt} = 0,$$

die *zur Zeit* $t = 0$ gewiss stattfindet, wenn die Werthe von

$$\frac{dq_1'}{dt}, \quad \frac{dq_2'}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{dq_n'}{dt}$$

aus den Lagrange'schen Bewegungsgleichungen genommen sind:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial t} - \frac{\partial f}{\partial q_i} + \sum_1^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j'} q_j' + \sum_1^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial q_j'} \frac{dq_j'}{dt} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt mittels Elimination der $\frac{dq_j'}{dt}$ die Gleichung

$$= \begin{vmatrix} E''(0) + \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} + \sum_1^n \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_j \partial t} q_j', & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial t}, & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial t}, \cdots, & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial t} \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial t} - \frac{\partial f_0}{\partial q_1} + \sum_1^n \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1 \partial q_j'} q_j', & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_1'}, & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_2'}, \cdots, & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_n'} \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial t} - \frac{\partial f_0}{\partial q_2} + \sum_1^n \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2 \partial q_j'} q_j', & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial q_1'}, & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial q_2'}, \cdots, & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial q_n'} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial t} - \frac{\partial f_0}{\partial q_n} + \sum_1^n \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n \partial q_j'} q_j', & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_1'}, & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q' \partial q_2'}, \cdots, & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_n'} \end{vmatrix},$$

und nach Subtraction der obigen Determinante $E'^2(0) D_0$ von dieser Determinante ergiebt sich endlich:

$$3) \quad -E'^2(0) D_0 = \begin{vmatrix} \sum_1^n \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_j \partial t} q_j' & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial t} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial t} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial t} \\ \sum_1^n \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1 \partial q_j'} q_j' - \frac{\partial f_0}{\partial q_1} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_n'} \\ \sum_1^n \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2 \partial q_j'} q_j' - \frac{\partial f_0}{\partial q_2} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial q_n'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_1^n \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n \partial q_j'} q_j' - \frac{\partial f_0}{\partial q_n} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_n'} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante verschwindet aber *nur* für *ganz* specielle Werthe der a_i und a_i'. Ist nämlich das Potential der Kräfte *nur* von Coordinaten abhängig, und sind die Verbindungen der Punkte unabhängig von der Zeit, so haben wir allgemein

$$\frac{\partial f}{\partial t} \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} \equiv \frac{\partial U}{\partial t},$$

also

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i'} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial q_i'} \equiv 0;$$

hingegen sind die Werthe von

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial q_i} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial q_j'} \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial q_i' \partial q_j'}$$

gewiss nicht sämmtlich $= 0$. Daher geht die Gleichung (33) in diesem Falle über in

$$-E'^2(0)\,D_0 = D_{10}\sum_1^n \frac{\partial^2 U_0}{\partial q_j \partial t}\,q_j',$$

wo D_{10} gleich ist der Functionaldeterminante von T bezüglich der Geschwindigkeiten zur Zeit $t=0$, und daher nie verschwindet. Da auch $E'(0)$ endlich ist, so verschwindet D_0 *nur* dann, wenn

$$\sum_1^n \frac{\partial^2 U_0}{\partial q_j \partial t}\,q_j' \equiv \sum_1^n \frac{\partial^2 U_0}{\partial a_j \partial t}\,a_j'$$

verschwindet, also nicht für beliebige a_i, a_i'.

Daher verschwindet D_0 auch im allgemeinsten Falle *nicht identisch*.

Wir wollen nun solche singuläre Werthsysteme F_0, a_i, a_i' von der Betrachtung ausschliessen, für welche D_0 verschwindet, und für welche irgend ein Coefficient der Gleichungen (32) unendlich gross wird. Die Gleichungen (32) erlauben dann die von den gegebenen Anfangswerthen ausgehenden Werthe der Zeitfunctionen F und q_i *eindeutig* zu bestimmen.

Daraus folgt aber im Sinne der am Ende des Artikels XVIII stehenden Ausführungen, dass das Variationsproblem des Artikels II auf *sämmtliche* reguläre Stellen (F_0, a_i, a_i') ausgedehnt nothwendigerweise auf die allgemeinen Lagrange'schen Bewegungsgleichungen führen muss.

Hiermit ist auch die mit E) bezeichnete Formulirung des Actionsprincips, — auch wenn an Stelle von $F = T - U$ allgemeiner $G = 0$ gesetzt wird, — bewiesen.

Zusammenfassung. Ich fasse das hauptsächliche Ergebniss meiner Untersuchungen in den folgenden Sätzen zusammen:

1) Es werden die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen verallgemeinert und mehrere Variationsprincipien formulirt, die sämmtlich auf die Bewegungsgleichungen führen.

2) Das Princip der kleinsten Action ist in einer jeden der hier aufgestellten Formen, bezüglich der über die Verbindungen und über die Kräfte gemachten Voraussetzungen, vollständig in Uebereinstimmung mit dem Hamilton'schen Princip.

3) Die mit A) und E) bezeichneten Formulirungen sind auch darin in Uebereinstimmung mit dem Hamilton'schen Princip, dass sie den Satz von der lebendigen Kraft (resp. einen diesem äquivalenten Satz) nicht voraussetzen, sondern zur Folge haben.

4) Im *allgemeinsten* Falle, wenn das Potential der Kräfte auch von der Energie des Systems auf gegebene Weise abhängen soll, sind die genannten Principien — nämlich das Hamilton'sche Princip

und das der kleinsten Action — auch darin in Uebereinstimmung, dass sie die Definitionsgleichung der Energie (VI) sämmtlich zur Voraussetzung haben.

5) In dem in der Dynamik bisher üblichen Falle, wo das Potential bloss von Coordinaten, von Geschwindigkeiten und von der Zeit abhängt, hat das Princip der kleinsten Action die Definitionsgleichung der Energie zur Voraussetzung, während dies beim Hamilton'schen Princip nicht der Fall ist.

6) Das Variationsprincip des Artikels IX hingegen hat diese Definition auch im allgemeinsten Falle nicht zur Voraussetzung, sondern zur Folge.

Ueber Gruppen, deren sämmtliche Theiler Normaltheiler sind.

Von

R. Dedekind in Braunschweig.

Die vorliegende Untersuchung, welche ich in den ersten Herbstwochen des Jahres 1895 begonnen und beendet habe, ist durch die Frage nach allen denjenigen endlichen Zahlenkörpern veranlasst, deren sämmtliche Divisoren Normalkörper sind. Ist R die Gruppe aller Permutationen φ eines Normalkörpers Ω, so gehört bekanntlich zu jeder Gruppe S, welche ein Theiler von R ist, ein bestimmter Körper Ω', nämlich der Inbegriff aller derjenigen Zahlen in Ω, welche durch jede Permutation der Gruppe S in sich selbst übergehen, und umgekehrt gehört jeder Divisor von Ω, d. h. jeder in Ω enthaltene Körper Ω' zu einer bestimmten in R als Theiler enthaltenen Gruppe S; die Bedingung aber, dass Ω' wieder ein Normalkörper ist, besteht darin, dass S ein *Normaltheiler**) von R, also immer

$$\varphi^{-1} S \varphi = S, \qquad S\varphi = \varphi S \tag{1}$$

ist, wo φ jedes beliebige Element der Gruppe R bedeutet. Der auf die Gruppentheorie bezügliche Theil der obigen Frage kommt daher auf die Aufgabe zurück, die allgemeinste Form einer Gruppe R zu finden, deren sämmtliche Theiler S Normaltheiler von R sind.

Zu diesen Gruppen R gehören offenbar alle *Abel'schen*, d. h. diejenigen Gruppen, deren Elemente sämmtlich mit einander permutabel sind; ihr Bau darf als hinreichend bekannt vorausgesetzt werden, und es handelt sich daher nur noch um die Form der nicht Abel'schen

---

*) Diese Benennung, welche H. Weber in seinem *Lehrbuch der Algebra* (Bd. I, 1895, S. 511) eingeführt hat, scheint mir aus mehreren Gründen zweckmässiger, als die sonst gebräuchlichen eines *ausgezeichneten* oder *invarianten* oder *eigentlichen* Theilers, welche letztere Bezeichnung ich in meinen Göttinger Vorlesungen (1857—1858) im Anschluss an eine Ausdrucksweise von Galois benutzt habe. Sind R, S irgend zwei verwandte, d. h. solche Gruppen, die ein gemeinsames Multiplum besitzen, und bedeutet φ jedes Element von R, so empfiehlt es sich aus algebraischen Gründen, den grössten gemeinsamen Theiler aller Gruppen $\varphi^{-1} S \varphi$ die *Norm* von S in Bezug auf R zu nennen.

Gruppen R, welche ich im Folgenden *Hamilton'sche* Gruppen nennen werde. Die einfachste oder kleinste solche Gruppe R ist nämlich diejenige Gruppe achten Grades, welche sechs verschiedene Elemente vierten Grades enthält und welche wegen ihrer innigen Beziehungen zu Hamilton's berühmter Zahlenschöpfung die *Quaterniongruppe* Q heissen mag. Sodann ergiebt sich das durch seine enge Umgrenzung überraschende Resultat, dass die allgemeinste Hamilton'sche Gruppe die Form

(2) $$R = PQ$$

besitzt, wo P die Abel'sche Gruppe aller derjenigen Elemente in R bedeutet, welche mit jedem Element von R permutabel sind; diese Gruppe P unterliegt nur den beiden Bedingungen, dass sie kein einziges Element vierten Grades, wohl aber das in der Quaterniongruppe Q befindliche Element zweiten Grades enthält.

§ 1.

Die Quaterniongruppe Q.

Man kann dieselbe (wie in der Einleitung) als *Gruppe achten Grades definiren, welche sechs verschiedene Elemente vierten Grades enthält;* die letzteren bilden offenbar drei Paare von je zwei reciproken Elementen und mögen mit $\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}, \gamma, \gamma^{-1}$ bezeichnet werden; ausser dem Hauptelemente 1 muss Q endlich noch ein Element ε vom zweiten Grade enthalten. Es ist also

(3) $$\varepsilon^2 = 1,$$

(4) $$\alpha^2 = \alpha^{-2} = \beta^2 = \beta^{-2} = \gamma^2 = \gamma^{-2} = \varepsilon,$$

(5) $$\varepsilon\alpha = \alpha\varepsilon = \alpha^{-1}, \quad \varepsilon\beta = \beta\varepsilon = \beta^{-1}, \quad \varepsilon\gamma = \gamma\varepsilon = \gamma^{-1},$$

(6) $$\varepsilon\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\varepsilon = \alpha, \quad \varepsilon\beta^{-1} = \beta^{-1}\varepsilon = \beta, \quad \varepsilon\gamma^{-1} = \gamma^{-1}\varepsilon = \gamma.$$

Da nun das Product $\beta\gamma$ keine Potenz von β oder γ sein kann (weil sonst $\gamma = \beta^{\pm 1}$ wäre), so muss es mit einem der beiden übrigen Elemente $\alpha^{\pm 1}$ identisch sein. Offenbar dürfen wir die Bezeichnung der Elemente von Q so *wählen*, dass $\beta\gamma = \alpha$ wird; da hieraus $\beta\gamma\alpha = \alpha^2 = \beta^2$ und $\alpha\beta\gamma = \alpha^2 = \gamma^2$ folgt, so ergiebt sich

(7) $$\beta\gamma = \alpha, \quad \gamma\alpha = \beta, \quad \alpha\beta = \gamma.$$

Aus $(\beta\gamma)(\gamma\beta) = \beta(\gamma^2)\beta = \beta(\beta^2)\beta = \beta^4 = 1$ folgt ferner, dass $\beta\gamma$ und $\gamma\beta$ reciproke Elemente sind; aus (7) ergiebt sich daher

(8) $$\gamma\beta = \alpha^{-1}, \quad \alpha\gamma = \beta^{-1}, \quad \beta\alpha = \gamma^{-1}.$$

Aus (7) und (8) folgen auch die Producte der reciproken Elemente

(9) $$\gamma^{-1}\beta^{-1} = \alpha^{-1}, \quad \alpha^{-1}\gamma^{-1} = \beta^{-1}, \quad \beta^{-1}\alpha^{-1} = \gamma^{-1},$$

(10) $$\beta^{-1}\gamma^{-1} = \alpha, \quad \gamma^{-1}\alpha^{-1} = \beta, \quad \alpha^{-1}\beta^{-1} = \gamma.$$

Da ferner

$$(11)\qquad \alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = \beta\beta^{-1} = \beta^{-1}\beta = \gamma\gamma^{-1} = \gamma^{-1}\gamma = 1,$$

so ergeben sich aus den vorhergehenden Gleichungen auch die Produkte

$$(12)\qquad \gamma\beta^{-1} = \gamma^{-1}\beta = \alpha, \qquad \beta\gamma^{-1} = \beta^{-1}\gamma = \alpha^{-1},$$

$$(13)\qquad \alpha\gamma^{-1} = \alpha^{-1}\gamma = \beta, \qquad \gamma\alpha^{-1} = \gamma^{-1}\alpha = \beta^{-1},$$

$$(14)\qquad \beta\alpha^{-1} = \beta^{-1}\alpha = \gamma, \qquad \alpha\beta^{-1} = \alpha^{-1}\beta = \gamma^{-1}.$$

Die Compositionstabelle der Quaterniongruppe ist daher die folgende:

	1	ε	α^{-1}	α	β^{-1}	β	γ^{-1}	γ
1	1	ε	α^{-1}	α	β^{-1}	β	γ^{-1}	γ
ε	ε	1	α	α^{-1}	β	β^{-1}	γ	γ^{-1}
α	α	α^{-1}	1	ε	γ^{-1}	γ	β	β^{-1}
α^{-1}	α^{-1}	α	ε	1	γ	γ^{-1}	β^{-1}	β
β	β	β^{-1}	γ	γ^{-1}	1	ε	α^{-1}	α
β^{-1}	β^{-1}	β	γ^{-1}	γ	ε	1	α	α^{-1}
γ	γ	γ^{-1}	β^{-1}	β	α	α^{-1}	1	ε
γ^{-1}	γ^{-1}	γ	β	β^{-1}	α^{-1}	α	ε	1

wo das durch die Zeile φ und Spalte ψ bestimmte Feld das Produkt $\varphi\psi$ enthält. —

Statt von der obigen Definition der Quaterniongruppe Q kann man auch von der folgenden ausgehen: *die Gruppe Q wird durch zwei nicht permutabele Elemente α, β erzeugt, welche den Bedingungen*

$$(15)\qquad \beta\alpha\beta = \alpha, \qquad \alpha\beta\alpha = \beta$$

genügen. Führt man nämlich das dritte Element $\gamma = \alpha\beta$ ein, so nehmen diese Bedingungen die Form (7) an, woraus alle anderen Relationen leicht folgen. Durch Multiplication der ersten Gleichung (7) mit α ergiebt sich zunächst $\alpha^2 = \beta\gamma\alpha = \alpha\beta\gamma$; mit Rücksicht auf die zweite und dritte Gleichung (7) kann man daher das vierte Element ε durch

$$\varepsilon = \alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2$$

einführen, welches folglich mit α, β, γ permutabel ist; die aus (7) folgende Gleichung

$$(\beta\gamma)\,(\gamma\alpha)\,(\alpha\beta) = \alpha\beta\gamma$$

ist daher identisch mit $\varepsilon^3 = \varepsilon$, also mit (3), und hieraus folgen offenbar die übrigen Gleichungen, also alle Compositionen der Tabelle. Da

wir ferner angenommen haben, dass die beiden erzeugenden Elemente α, β nicht permutabel sind, so ist $\gamma = \alpha\beta$ verschieden von $\gamma^{-1} = \beta\alpha$, mithin $\varepsilon = \gamma^2$ verschieden von 1, d. h. ε ist vom zweiten, und $\alpha, \beta, \gamma, \alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1}$ sind vom vierten Grade; man überzeugt sich auch leicht, dass alle diese Elemente von einander verschieden sind. —

Mag man aber von der einen oder der anderen Definition ausgehen und so zu der obigen Tabelle gelangen, so ist hiermit die *Existenz* der Gruppe Q noch nicht vollständig erwiesen; es muss bekanntlich noch gezeigt werden, dass sowohl aus $\varphi\psi = \varphi\chi$, wie aus $\psi\varphi = \chi\varphi$ immer $\psi = \chi$ folgt, und dass ausserdem das Associationsgesetz $(\varphi\psi)\chi = \varphi(\psi\chi)$ gilt. Die erstere Eigenschaft ergiebt sich zwar leicht aus dem Anblick der Tabelle, welche in jeder Zeile, wie in jeder Spalte lauter verschiedene Elemente enthält; aber die Verification des Associationsgesetzes, wenn sie sich auch auf manche Art abkürzen lässt, würde doch schon ziemlich lästig sein. In solchen Fällen pflegt das einfachste Verfahren, um die Existenz einer durch erzeugende Elemente definirten Gruppe nachzuweisen, darin zu bestehen, dass man dieselbe als Theiler einer schon bekannten Gruppe G darstellt, weil dann die beiden obigen Gesetze von selbst erfüllt sind. Für unser Beispiel genügt es die symmetrische Gruppe G aller $\Pi(8)$ Versetzungen von acht verschiedenen Dingen $a, b, c, d, a', b', c', d'$ zu betrachten; benutzt man die bekannte Bezeichnung der Cykeln und setzt

$$
\begin{aligned}
\alpha &= (ada'a')\,(cbc'b'),\\
\beta &= (dbd'b')\,(aca'c'),\\
\gamma &= (dcd'c')\,(bab'a'),\\
\varepsilon &= (aa')\,(bb')\,(cc')\,(dd'),
\end{aligned}
\tag{16}
$$

so erfüllen die beiden nicht permutabelen Elemente α, β der Gruppe G wirklich die beiden Bedingungen (15), und folglich muss die von ihnen erzeugte Gruppe, welche ein Theiler von G ist, mit unserem System Q der acht verschiedenen Elemente $1, \varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1}$ identisch sein.

Diese Gruppe Q, deren Existenz hiermit gesichert ist, verdient den Namen der Quaterniongruppe zunächst wegen der augenscheinlichen Analogie zwischen der Composition der drei Elemente vierten Grades α, β, γ und der Multiplication der drei Hamilton'schen imaginären Einheiten i, j, k; es findet aber, wie ich schon im Februar 1886 erkannt habe, eine noch tiefer liegende Beziehung zwischen der Gruppe Q und Hamilton's Quaternionen statt, von welcher demnächst an einem anderen Orte gehandelt werden soll. Damals habe ich auch schon Normalkörper gebildet, deren Permutationsgruppe mit Q identisch ist; ein einfaches Beispiel, welches unendlich viele Specialfälle umfasst, liefert die Gleichung

$$\omega^2 = r(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{6}),$$

wo r irgend eine von Null verschiedene rationale Zahl bedeutet; jede Wurzel ω einer solchen Gleichung erzeugt einen Quaternionkörper, d. h. einen Normalkörper achten Grades mit der Gruppe Q, und man kann beweisen, dass auf diese Weise *jeder* Quaternionkörper entsteht, der die Quadratwurzeln aus 2 und 3 enthält.

Dass aber diese Gruppe Q, welche ausserdem schon in ganz anderen Untersuchungen aufgetreten ist, die in der Einleitung angegebene wichtige Bedeutung für alle Hamilton'schen Gruppen besitzt, habe ich erst im Herbste 1895 erkannt, und die Darlegung dieser Bedeutung bildet den ausschliesslichen Gegenstand der vorliegenden Abhandlung.

Man überzeugt sich zunächst leicht, dass Q keine anderen Theiler als Normaltheiler besitzt. Bezeichnet man der Kürze halber die durch irgend welche Elemente $\varphi, \psi, \chi \ldots$ erzeugte Gruppe mit dem Symbol $[\varphi, \psi, \chi, \ldots]$, so dass z. B. $[\varphi]$ die aus allen Potenzen von φ bestehende cyklische oder reguläre Gruppe oder Periode bedeutet, so hat Q offenbar nur die folgenden sechs Theiler

$$[1],\quad [\varepsilon],\quad [\alpha],\quad [\beta],\quad [\gamma],\quad [\alpha,\beta] = Q; \tag{17}$$

dass $[1]$ und Q Normaltheiler von Q sind, ist eine allgemeine Eigenschaft aller Gruppen; dasselbe gilt von $[\varepsilon]$, weil ε mit allen Elementen von Q permutabel ist, und auch z. B. von $[\alpha]$, weil

$$Q = [\alpha] + [\alpha]\beta \tag{18}$$

und

$$\beta^{-1}[\alpha]\beta = [\alpha^{-1}] = [\alpha] \tag{19}$$

ist. Also ist Q im Sinne der Einleitung wirklich eine Hamilton'sche Gruppe.

§ 2.

Kennzeichen der Hamilton'schen Gruppen.

Um die allgemeine Form aller Hamilton'schen Gruppen zu finden, ist es zweckmässig, aus ihrer Definition, wie sie in der Einleitung gegeben ist, einfachere charakteristische Kennzeichen abzuleiten, welche in den folgenden Sätzen enthalten sind; dass dieselben auch für die Abel'schen Gruppen gelten, welche also, wenn auch nur vorläufig, als ein specieller Fall der Hamilton'schen Gruppen anzusehen sind, braucht kaum bemerkt zu werden*).

*) Man könnte vielleicht beide Arten von Gruppen unter dem gemeinsamen Namen von *Normalgruppen* zusammenfassen.

I. *Die erforderliche und hinreichende Bedingung dafür, dass R eine Hamilton'sche Gruppe ist, besteht darin, dass, wenn φ, ψ irgend welche Elemente von R bedeuten, das Element $\varphi^{-1}\psi\varphi$ eine Potenz von ψ, also in der Periode $[\psi]$ enthalten ist.*

Denn wenn R eine Hamilton'sche (oder Abel'sche) Gruppe ist, so muss $\varphi^{-1}[\psi]\,\varphi = [\psi]$, also $\varphi^{-1}\psi\varphi$ eine Potenz von ψ sein. Umgekehrt, wenn diese Bedingung durch alle Elemente φ, ψ einer Gruppe R erfüllt wird, und S irgend eine in R enthaltene Gruppe bedeutet, so wird, wenn ψ alle Elemente von S durchläuft, $\varphi^{-1}\psi\varphi$ als Potenz von ψ ebenfalls in S enthalten sein; mithin ist die aus den Elementen $\varphi^{-1}\psi\varphi$ bestehende Gruppe $\varphi^{-1}S\varphi$ ein Theiler von S und folglich $= S$, w. z. b. w.

Dieses Kennzeichen lässt sich in einer für unseren Zweck noch bequemeren Form ausdrücken, wenn man das durch die Bedingung

$$\psi\varphi = \varphi\psi\varepsilon \tag{20}$$

definirte Element

$$\varepsilon = (\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi)\,\varphi = \psi^{-1}(\varphi^{-1}\psi\varphi) \tag{21}$$

einführt, welches wir der Kürze halber den *Commutator der Elemente* φ, ψ nennen wollen*); der vorige Satz geht dann, weil

$$[\varphi^{-1}]\,\varphi = [\varphi]\,\varphi = [\varphi] \quad \text{und} \quad \psi^{-1}[\psi] = [\psi]$$

ist, offenbar in den folgenden über:

II. *Die erforderliche und hinreichende Bedingung dafür, dass R eine Hamilton'sche Gruppe ist, besteht darin, dass der Commutator ε von je zwei in R enthaltenen Elementen φ, ψ ein gemeinsames Element ihrer Perioden $[\varphi]$, $[\psi]$ und folglich auch mit allen Elementen der durch φ und ψ erzeugten Gruppe $[\varphi, \psi]$ permutabel ist.*

Die nächsten Folgerungen, welche sich hieraus mit Zuziehung der bekannten, für je zwei Elemente ϱ, σ einer beliebigen Gruppe und für jede ganze rationale Zahl s gültigen Identität

$$\varrho^{-1}\sigma^s\varrho = (\varrho^{-1}\sigma\varrho)^s \tag{22}$$

ergeben, bilden den folgenden Satz:

III. *Ist ε der Commutator der Elemente φ, ψ einer Hamilton'schen Gruppe, so ist*

$$\psi^n\varphi^m = \varphi^m\psi^n\varepsilon^{mn}, \tag{23}$$

$$(\varphi^m\psi^n)^t = \varphi^{mt}\psi^{nt}\varepsilon^{\frac{1}{2}mnt(t-1)}, \tag{24}$$

und die durch φ und ψ erzeugte Gruppe ist

$$[\varphi, \psi] = [\varphi]\,[\psi] = [\psi]\,[\varphi]. \tag{25}$$

*) Ohne auf die Bedeutung dieses Begriffes für die allgemeine Gruppentheorie näher einzugehen, will ich nur den Satz erwähnen, dass der grösste in einem Normalkörper von der Gruppe G enthaltene Abel'sche Körper zu derjenigen Gruppe gehört, welche durch alle in G enthaltenen Commutatoren erzeugt wird.

Setzt man ferner

(26) $$\varphi_1 = \varphi^m \psi^n, \qquad \psi_1 = \varphi^r \psi^s,$$

so ist

(27) $$\varepsilon_1 = \varepsilon^{ms-nr}$$

der Commutator der Elemente φ_1, ψ_1.

Wendet man nämlich die Identität (22) auf das Beispiel $\varrho = \varphi$, $\sigma = \psi$, $s = n$ an, so wird $\varrho^{-1}\sigma\varrho = \varphi^{-1}\psi\varphi = \psi\varepsilon$, und weil ψ zufolge II mit ε permutabel ist, so erhält man

$$\varphi^{-1}\psi^n\varphi = (\psi\varepsilon)^n = \psi^n\varepsilon^n,$$

also

$$\psi^{-n}\varphi^{-1}\psi^n = \varepsilon^n\varphi^{-1};$$

setzt man daher in (22) jetzt $\varrho = \psi^n$, $\sigma = \varphi^{-1}$, $s = m$, so wird $\varrho^{-1}\sigma\varrho = \varepsilon^n\varphi^{-1}$, und weil ε^n mit φ^{-1} permutabel ist, so erhält man

$$\psi^{-n}\varphi^{-m}\psi^n = (\varepsilon^n\varphi^{-1})^m = \varepsilon^{mn}\varphi^{-m},$$

also die Gleichung (23), und hieraus folgt leicht durch vollständige Induction der Satz (24); denn wenn derselbe für eine bestimmte ganze rationale Zahl t gilt (wie z. B. für $t = 0$), so folgt durch Multiplication mit $\varphi^m\psi^n$ oder mit dem reciproken Element $\psi^{-n}\varphi^{-m}$ unter Zuziehung von (23), dass er auch für die beiden benachbarten Zahlen $t \pm 1$ gilt. Aus (23) und (26) folgt ferner

$$\varphi_1\psi_1 = \varphi^m(\psi^n\varphi^r)\,\psi^s = \varphi^{m+r}\psi^{n+s}\varepsilon^{nr},$$
$$\psi_1\varphi_1 = \varphi^r(\psi^s\varphi^m)\,\psi^n = \varphi^{m+r}\psi^{n+s}\varepsilon^{ms},$$

und da ε Potenz von ψ ist, so sind alle Producte $\varphi_1\psi_1$ von je zwei in dem Complex $[\varphi]\,[\psi]$ enthaltenen Elementen φ_1, ψ_1 in demselben Complex enthalten, woraus (25) folgt; zugleich ergiebt sich aus den beiden vorstehenden Gleichungen auch der Commutator ε_1 in der Form (27), w. z. b. w.

§ 3.

Eigenschaften zweier nicht permutabelen Elemente einer Hamilton'schen Gruppe.

Die zuletzt erhaltenen Resultate sind offenbar nur dann von Interesse, wenn die beiden Elemente φ, ψ *nicht* permutabel sind, was wir im Folgenden annehmen; ihr Commutator ε ist dann verschieden von dem Hauptelement 1 der Hamilton'schen Gruppe R; bedeutet daher e den Grad des Elementes ε und der Periode $[\varepsilon]$, so ist

(28) $$e > 1, \qquad \varepsilon^e = 1.$$

Wählt man nun die Exponenten m, n des Elementes φ_1 in (26) so, dass m, n, e *keinen gemeinsamen Theiler* haben, so kann man die Exponenten r, s des anderen Elementes ψ_1 so bestimmen, dass

$ms - nr \equiv 1 \pmod{e}$ wird; nach (27) folgt hieraus $\varepsilon_1 = \varepsilon$, und da der Commutator ε_1 der Elemente φ_1, ψ_1 nach Satz II eine Potenz von φ_1 ist, so ergiebt sich nach (24) die *Existenz* einer ganzen Zahl t, welche der Bedingung

$$\varphi^{mt}\psi^{nt}\varepsilon^{\frac{1}{2}mnt(t-1)} = \varepsilon \tag{29}$$

genügt.

Um diesen Existenzsatz für unseren Zweck zu verwerthen, wird es nöthig, die Perioden $[\varphi]$, $[\psi]$ und deren grössten gemeinsamen Theiler D, welcher bekanntlich selbst eine Periode ist, genauer zu betrachten. Da die Periode $[\varepsilon]$ nach Satz II ein gemeinsamer Theiler von $[\varphi]$, $[\psi]$, also auch ein Theiler von D ist, so ist der Grad von D theilbar durch e, also von der Form de. Da ferner jedes Element in D von der Form φ^m und zugleich eine Potenz von ψ, also auch mit ψ permutabel ist, so folgt aus (23), wenn man dort $n = 1$ setzt, dass $\varepsilon^m = 1$, also m *durch* e *theilbar* sein muss; alle Elemente von D sind daher Potenzen von φ^e, und da offenbar auf dieselbe Weise folgt, dass sie auch Potenzen von ψ^e sein müssen, so ist der grösste gemeinsame Theiler D der Perioden $[\varphi]$, $[\psi]$ zugleich derjenige der Perioden $[\varphi^e]$, $[\psi^e]$; bezeichnet man daher die Grade der letzteren, weil sie durch den von D theilbar sein müssen, mit ade, bde, so sind ade^2, bde^2 die Grade von $[\varphi]$, $[\psi]$, und zufolge (25) ist nach einem bekannten Satze $abde^3$ der Grad von $[\varphi, \psi]$, woraus beiläufig folgt, dass der Grad einer Hamilton'schen Gruppe nicht kleiner als *acht* sein kann. Zugleich ergeben sich folgende Darstellungen unserer Gruppen:

$$[\varepsilon] = [\varphi^{ade}] = [\psi^{bde}], \tag{30}$$

$$\begin{aligned} D &= [\varphi^{ae}] = [\psi^{be}] \\ &= [\varepsilon]\,(1 + \varphi^{ae} + \varphi^{2ae} + \cdots + \varphi^{(d-1)ae}) \\ &= [\varepsilon]\,(1 + \psi^{be} + \psi^{2be} + \cdots + \psi^{(d-1)be}), \end{aligned} \tag{31}$$

$$[\varphi] = D(1 + \varphi + \varphi^2 + \cdots + \varphi^{ae-1}), \tag{32}$$

$$[\psi] = D(1 + \psi + \psi^2 + \cdots + \psi^{be-1}), \tag{33}$$

$$\begin{aligned} [\varphi, \psi] &= [\varphi]\,[\psi] = [\psi]\,[\varphi] \\ &= [\varphi]\,(1 + \psi + \psi^2 + \cdots + \psi^{be-1}) \\ &= [\psi]\,(1 + \varphi + \varphi^2 + \cdots + \varphi^{ae-1}) \end{aligned} \tag{34}$$

und aus den beiden ersten Darstellungen von D folgt die Existenz von zwei ganzen Zahlen h, k, welche den Bedingungen

$$\varphi^{ae} = \psi^{bek}, \quad \psi^{be} = \varphi^{aeh}, \quad hk \equiv 1 \pmod{de} \tag{35}$$

genügen.

Wir wenden uns nun dazu, den Existenzsatz (29) zur Geltung zu bringen; statt dies in voller Allgemeinheit durchzuführen, ziehen

wir es vor, ihn auf zwei specielle Beispiele von Zahlenpaaren m, n anzuwenden, was bequemer und ebenso erfolgreich ist.

Erstes Beispiel. Bedeutet c den grössten gemeinsamen Theiler der beiden Zahlen

$$a = ca', \qquad b = cb', \tag{36}$$

so setzen wir

$$m = -ha', \qquad n = b';$$

dann haben die Zahlen m, n, e zufolge (35), (36) keinen gemeinsamen Theiler, und es giebt daher zufolge (29) eine ganze Zahl t, welche der Bedingung

$$\varphi^{-ha't}\psi^{b't}\varepsilon^{-\frac{1}{2}ha'b't(t-1)} = \varepsilon$$

genügt. Da ε Potenz von φ ist, so muss $\psi^{b't}$ in D enthalten, also $b't$ zufolge (31) theilbar sein durch $be = b'ce$; mithin wird $t = ceu$, wo u eine ganze Zahl bedeutet, und da nach (35), (36) hieraus

$$\psi^{b't} = \psi^{beu} = \varphi^{aeu} = \varphi^{ha'et}$$

folgt, so geht die obige Bedingung für t in

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}ha'b'ceu(ceu-1)} = \varepsilon,$$

also in die Congruenz

$$-\tfrac{1}{2}ha'b'ceu(ceu-1) \equiv 1 \pmod{e}$$

über. Da unter den Factoren der linken Seite sich auch die Zahl e befindet, so ergiebt sich durch Multiplication mit 2 das Resultat

$$2 \equiv 0 \pmod{e},$$

also zufolge (28)

$$e = 2, \quad \varepsilon^2 = 1, \tag{37}$$

und hierdurch geht die vorstehende Congruenz in

$$ha'b'cu \equiv 1 \pmod{2}$$

über, woraus mit Rücksicht auf (36) auch

$$1 \equiv h \equiv a' \equiv b' \equiv c \equiv a \equiv b \pmod{2} \tag{38}$$

folgt. Die Grade von $[\varphi]$, $[\psi]$ sind $4ad$, $4bd$, und zufolge (30) ist

$$\varepsilon = \varphi^{2ad} = \psi^{2bd}. \tag{39}$$

Der Grad der Gruppe $[\varphi, \psi]$ ist $= 8abd$. —

Zweites Beispiel. Setzen wir

$$m = a(d-h), \quad n = b,$$

so haben die Zahlen m, n, e zufolge (37), (38) keinen gemeinsamen Theiler, und ausserdem ist zufolge (38) das Product

$$mn \equiv d - 1 \pmod 2;$$

es giebt daher zufolge (29) eine ganze Zahl t, welche der Bedingung

$$\varphi^{a(d-h)t}\psi^{bt}\varepsilon^{\frac{1}{2}(d-1)t(t-1)} = \varepsilon$$

genügt. Da ε Potenz von φ ist, so muss ψ^{bt} in D enthalten, also bt zufolge (31) theilbar sein durch $be = 2b$; mithin wird $t = 2u$, wo u wieder eine ganze Zahl bedeutet, also $\frac{1}{2}t(t-1) \equiv u \pmod 2$; mit Rücksicht auf (35), (39) wird zugleich

$$\psi^{bt} = \psi^{2bu} = \varphi^{2ahu} = \varphi^{aht},$$

$$\varphi^{a(d-h)t}\psi^{bt} = \varphi^{adt} = \varphi^{2adu} = \varepsilon^{u},$$

mithin kommt die obige Bedingung für t auf

$$\varepsilon^{du} = \varepsilon$$

zurück, woraus

$$d \equiv 1 \pmod 2 \tag{40}$$

folgt. —

Die in (37), (38), (39), (40) gewonnenen fundamentalen Resultate fassen wir zusammen in den folgenden Satz:

IV. *Die Grade von je zwei nicht permutabelen Elementen φ, ψ einer Hamilton'schen Gruppe sind* $\equiv 4 \pmod 8$; *bezeichnet man dieselben resp. mit* $8r + 4$, $8s + 4$, *so ist der durch* $\psi\varphi = \varphi\psi\varepsilon$ *definirte Commutator*

$$\varepsilon = \varphi^{4r+2} = \psi^{4s+2}, \tag{41}$$

also vom Grade zwei.

§ 4.

Allgemeine Form der Hamilton'schen Gruppen.

Mit Hülfe der eben gewonnenen Grundlage gelingt es nun ohne Schwierigkeit, die allgemeine Form aller Hamilton'schen (nicht Abel'schen) Gruppen R zu finden.

Diejenigen Elemente π einer solchen (oder auch jeder anderen) Gruppe R, welche mit jedem Element ω von R permutabel sind, bilden bekanntlich eine Gruppe, weil aus $\pi'\omega = \omega\pi'$ und $\pi''\omega = \omega\pi''$ auch $(\pi'\pi'')\omega = \omega(\pi'\pi'')$ folgt; diese, offenbar Abel'sche Gruppe soll im Folgenden durchweg mit P bezeichnet werden. Da R eine Hamilton'sche, also nicht Abel'sche Gruppe ist, so muss P ein *echter* Theiler von R, d. h. verschieden von R sein, und es giebt mindestens zwei Elemente φ, ψ, welche nicht mit einander permutabel und folglich auch nicht in P enthalten sind. Behalten wir für diese Elemente die Bezeichnungen unseres letzten Satzes IV bei und setzen wir

$$\alpha = \varphi^{2r+1}, \quad \beta = \psi^{2s+1},$$

so ist

$$\alpha^4 = \beta^4 = 1,$$

und für den Commutator ε der Elemente φ, ψ, welcher vom zweiten Grade ist, ergiebt sich

$$\varepsilon = \alpha^2 = \beta^2, \quad \varepsilon^2 = 1;$$

wendet man ferner den Satz (23) auf das Beispiel $m = 2r + 1$, $n = 2s + 1$ an, so folgt

$$\beta\alpha = \alpha\beta\varepsilon,$$

d. h. ε ist auch der Commutator der Elemente α, β, welche folglich nicht mit einander, wohl aber mit ε permutabel sind. Da nun aus der letzten Gleichung auch

$$\beta\alpha\beta = \alpha\beta\varepsilon\beta = \alpha\beta^2\varepsilon = \alpha\varepsilon^2 = \alpha,$$
$$\alpha\beta\alpha = \alpha^2\beta\varepsilon = \varepsilon\beta\varepsilon = \beta\varepsilon^2 = \beta$$

folgt, so ergiebt sich aus dem Vergleiche mit (15) in § 1, dass α, β die erzeugenden Elemente einer *Quaterniongruppe* Q sind. Es gilt daher der folgende Satz:

V. *In jeder Hamilton'schen Gruppe R ist mindestens eine Quaterniongruppe Q als Theiler enthalten.*

Wir untersuchen nun im Folgenden die Beziehungen zwischen den beiden in R enthaltenen Gruppen P, Q, wobei wir für die letztere alle in § 1 benutzten Bezeichnungen beibehalten, und gelangen so zu der folgenden Reihe von Sätzen.

VI. *Der Grad jedes nicht in P enthaltenen Elementes φ von R ist* $\equiv 4 \pmod 8$.

Dies folgt unmittelbar aus IV, weil es mindestens ein mit φ nicht permutabeles Element ψ in R giebt.

VII. *Das Quadrat jedes Elementes ω von R ist in P enthalten.*

Denn wenn ω in P enthalten ist, so gilt dasselbe auch von ω^2, weil P eine Gruppe ist. Wenn aber das Element ω nicht in P enthalten ist, so ist nach VI sein Grad $\equiv 4 \pmod 8$, also der seines Quadrates $\equiv 2 \pmod 4$, woraus nach VI folgt, dass ω^2 in P enthalten ist, w. z. b. w.

VIII. *Jedes Element ω der Gruppe R ist permutabel mit wenigstens einem der drei Elemente α, β, γ der Gruppe Q, und zwar entweder nur mit einem einzigen oder mit allen dreien.*

Ist nämlich ω nicht permutabel mit α, so muss das von α verschiedene Element $\omega^{-1}\alpha\omega = \alpha^{-1}$ sein, weil es bekanntlich denselben Grad 4 wie α hat und ausserdem nach Satz I (in § 2) eine Potenz von α

ist; ebenso muss, wenn dasselbe Element ω auch mit β nicht permutabel ist, $\omega^{-1}\beta\omega = \beta^{-1}$ sein; da nun $\gamma = \alpha\beta$ ist, so folgt hieraus

$$\omega^{-1}\gamma\omega = \omega^{-1}\alpha\beta\omega = \omega^{-1}\alpha\omega \,.\, \omega^{-1}\beta\omega = \alpha^{-1}\beta^{-1} = \gamma,$$

also $\gamma\omega = \omega\gamma$, d. h. ω ist mit wenigstens einem der drei Elemente α, β, γ permutabel. Ist aber ω mit zweien von ihnen, z. B. mit α und mit β permutabel, so ist es auch mit deren Product γ, also mit allen dreien permutabel, w. z. b. w.

IX. *Der Grad eines mit α, β, γ permutabelen Elementes ω kann nicht durch vier theilbar sein, und der Inbegriff aller dieser Elemente ω ist die Gruppe P.*

Den ersten Theil dieses Satzes beweisen wir auf indirectem Wege, indem wir annehmen, der Grad eines mit α, β (also auch mit γ) permutabelen Elementes ω sei theilbar durch vier. Dann giebt es unter den Potenzen von ω, welche alle ebenfalls mit α, β permutabel sind, auch zwei Elemente *vierten* Grades ϱ (und ϱ^{-1}); nach der Fundamentaleigenschaft I der Hamilton'schen Gruppe R ist nun $\beta^{-1}(\varrho\alpha)\beta$ eine Potenz $(\varrho\alpha)^n$ von $\varrho\alpha$; weil aber ϱ permutabel mit β ist, so folgt $\beta^{-1}(\varrho\alpha)\beta = \varrho\beta^{-1}\alpha\beta = \varrho\alpha^{-1}$, und weil ϱ permutabel mit α ist, so folgt $(\varrho\alpha)^n = \varrho^n\alpha^n$; mithin ist $\varrho\alpha^{-1} = \varrho^n\alpha^n$, also $\varrho^{1-n} = \alpha^{1+n}$. Dass dies aber *unmöglich* ist, ergiebt sich, wenn man die vier Fälle $n \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 4$ durchgeht; im ersten und dritten Falle wäre nämlich $\varrho = \alpha$, was dem Umstande widerspricht, dass β mit ϱ, aber nicht mit α permutabel ist; im zweiten oder vierten Fall wäre $1 = \alpha^2$ oder $\varrho^2 = 1$, während doch α und ϱ vom vierten Grade sind. Unsere obige Annahme führt daher zu einem Widerspruch, und folglich ist der erste Theil des Satzes bewiesen. Es muss daher jedes mit α, β, γ permutabele Element ω in der Gruppe P enthalten sein, weil nach Satz VI der Grad eines jeden, in P nicht enthaltenen Elementes durch vier theilbar ist, und da umgekehrt jedes Element der Gruppe P zufolge ihrer Definition mit α, β, γ permutabel ist, so ergiebt sich auch der zweite Theil des Satzes, w. z. b. w.

X. *Der Inbegriff aller derjenigen Elemente ω, welche nur mit α, nicht mit β, γ permutabel sind, ist der Complex $P\alpha$.*

Der Grad eines solchen Elementes ω, welches nicht mit β permutabel, also auch nicht in der Gruppe P enthalten ist, hat nach Satz IV die Form $8p + 4$, und zufolge (41) wird der Commutator der beiden Elemente ω, β durch die Potenzen

$$\omega^{4p+2} = \beta^2 = \varepsilon = \alpha^2$$

dargestellt; wenn ferner ω mit α, also auch mit α^{-1} permutabel ist, so folgt hieraus

$$(\omega\alpha^{-1})^{4p+2} = \omega^{4p+2}\alpha^{-(4p+2)} = \alpha^2\alpha^{-2} = 1;$$

mithin ist der Grad des Elementes $\omega\alpha^{-1}$ nicht theilbar durch vier, und

hieraus folgt nach Satz VI, dass dieses Element in P, also ω in dem Complex $P\alpha$ enthalten ist. Umgekehrt, wenn $\omega = \pi\alpha$ irgend ein Element in $P\alpha$, also π mit allen Elementen permutabel ist, so ist $\omega\alpha = \pi\alpha^2 = \alpha\omega$, ferner $\omega\beta = \pi\alpha\beta$, und

$$\beta\omega = \beta\pi\alpha = \pi\beta\alpha = \pi\alpha\beta\varepsilon = \omega\beta\varepsilon;$$

mithin ist jedes Element ω in $P\alpha$ permutabel mit α, aber nicht permutabel mit β, w. z. b. w.

XI. *Jede Hamilton'sche Gruppe R ist von der Form*

$$R = PQ = P + P\alpha + P\beta + P\gamma, \tag{42}$$

wo Q eine in R enthaltene Quaterniongruppe

$$Q = (1+\varepsilon)(1+\alpha+\beta+\gamma), \tag{43}$$

und P die Abel'sche Gruppe der mit allen Elementen von R permutabelen Elemente bedeutet; diese Gruppe P enthält kein einziges Element vierten Grades, wohl aber das in Q befindliche Element zweiten Grades ε, welches zugleich der Commutator von je zwei nicht permutabelen Elementen der Gruppe R ist.

Denn aus den drei vorhergehenden Sätzen folgt, dass jedes Element ω der Gruppe R in einem und nur in einem der vier Complexe P, $P\alpha$, $P\beta$, $P\gamma$ enthalten ist; die Behauptungen über P folgen aus IX und VII, weil $\varepsilon = \alpha^2$ ist. Da endlich die Elemente von P mit allen Elementen von R, ferner die Elemente von $P\alpha$ nach X mit α und folglich auch mit allen Elementen desselben Complexes $P\alpha$ permutabel sind, so gehören zwei nicht permutabele Elemente auch zwei verschiedenen der drei Complexe $P\alpha$, $P\beta$, $P\gamma$ an; wählt man nun z. B. aus $P\alpha$, $P\beta$ nach Belieben die beiden Elemente $\varphi' = \pi'\alpha$, $\varphi'' = \pi''\beta$, wo also π', π'' in P enthalten sind, so ergiebt sich

$$\varphi'\varphi'' = \pi'\pi''\alpha\beta, \quad \varphi''\varphi' = \pi'\pi''\beta\alpha = \pi'\pi''\alpha\beta\varepsilon = \varphi'\varphi''\varepsilon,$$

mithin sind diese Elemente φ', φ'' nicht permutabel, und ihr Commutator ist $= \varepsilon$, w. z. b. w.

XII. *Wenn in einer Gruppe G eine Quaterniongruppe Q und eine Abel'sche Gruppe P enthalten ist, deren Elemente mit denen von Q permutabel sind, wenn ferner P das in Q befindliche Element zweiten Grades ε, aber kein einziges Element vierten Grades enthält, so ist das Product PQ eine Hamilton'sche Gruppe R.*

Aus der Permutabilität der Elemente von P mit denen von Q folgt zunächst, dass PQ eine Gruppe R ist; wählt man für Q wieder die bisherige Bezeichnung (43), so ist R von der Form (42), weil die Periode $[\varepsilon] = 1 + \varepsilon$ der grösste gemeinsame Theiler von P, Q ist. Dass R keine Abel'sche Gruppe ist, folgt daraus, dass ihre Elemente α, β nicht permutabel sind. Um zu zeigen, dass R eine Hamilton'sche Gruppe ist, haben wir nach Satz I in § 2 für je zwei Elemente φ, ψ

nachzuweisen, dass $\varphi^{-1}\psi\varphi$ eine Potenz von ψ ist. Wenn nun wenigstens eins dieser beiden Elemente in P enthalten ist, oder wenn sie beide demselben Complex $P\alpha$ oder $P\beta$ oder $P\gamma$ angehören, so sind sie permutabel, und folglich ist $\varphi^{-1}\psi\varphi = \psi$. Wenn aber z. B. $\psi = \pi\alpha$ in $P\alpha$, und $\varphi = \pi'\beta$ in $P\beta$ enthalten ist, so wird

$$\varphi^{-1}\psi\varphi = \beta^{-1}\pi\alpha\beta = \pi\beta^{-1}\alpha\beta = \pi\alpha^{-1};$$

da nun der Grad von π nicht durch vier theilbar ist, weil sonst unter den (in P enthaltenen) Potenzen von π auch zwei Elemente vierten Grades wären, so ist der Grad von π^2 eine ungerade Zahl $2m+1$, also $\pi^{-(4m+1)} = \pi$, mithin $\varphi^{-1}\psi\varphi = \pi\alpha^{-1} = \psi^{-(4m+1)}$, w. z. b. w.

Hiermit ist das am Schlusse der Einleitung ausgesprochene Resultat der Untersuchung in allen Theilen begründet.

Braunschweig, 9. August 1896.

Autographirte Vorlesungshefte, III.

[Ausgewählte Capitel der Zahlenlehre; zweistündige Vorlesung im Winter 1895—96 und Sommer 1896].

Von

Felix Klein in Göttingen.

Es hat einige Jahrzehnte lang die Tendenz vorgeherrscht, zahlentheoretische Probleme möglichst abstract für sich, losgelöst von allen Beziehungen zu anderen mathematischen Disciplinen zu betrachten. Ich werde das Verdienst einer derartigen Darstellung wie insbesondere die grosse Leistung der dabei betheiligten Forscher gewiss nicht verkennen, glaube aber, dass der Gegenstand für zahlreiche Mathematiker durch Heranziehen geometrischer Vorstellungen und der Zusammenhänge mit Nachbargebieten zugänglicher wird. In den von Fricke und mir herausgegebenen *Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen*, auf die ich im Folgenden vielfach zurückgreifen muss *), ist in diesem Sinne die Theorie der binären quadratischen Formen bereits nach verschiedenen Richtungen hin behandelt worden. Inzwischen habe ich die dort gegebene Darstellung in einer Vorlesung, die sich zweistündig durch die beiden letzten Semester hindurchzog und über die hier berichtet werden soll, wesentlich vervollständigt. Von dieser Vorlesung soll wieder eine autographirte Ausarbeitung **) publicirt werden. Ich darf hier vorweg erwähnen, dass es mein besonderes Interesse war, für die *Theorie der singulären elliptischen Gebilde* eine möglichst einfache und durchsichtige Grundlegung zu geben. Insbesondere habe ich dabei Gelegenheit genommen, einen Gegenstand zur Darstellung zu bringen, der mir seit lange am Herzen lag, nämlich die Lehre von den zugehörigen singulären Werthen der *Ikosaederirrationalität*. Uebrigens zweifele ich nicht, dass sich die entwickelten geometrischen Methoden auch für höhere Gebiete der Zahlentheorie als nützlich erweisen sollen;

---

*) Ich citire dieselben abkürzend als „Mod.“

**) Dieselbe wird, wie meine früheren autographirten Hefte, von Herrn Dr. Fr. Schilling, Privatdocenten a. d. technischen Hochschule in Aachen, zu beziehen sein.

es genüge, auf die mannigfachen Zusammenhänge hinzuweisen, welche dieselben mit den von Minkowski in den bisher erschienenen Bogen seines vielversprechenden Werkes (Geometrie der Zahlen) gegebenen Ansätzen besitzen. —

Theil I meiner Vorlesung beginnt gleich damit, dasjenige ebene geometrische Gebilde zu schildern, welches in der Folge den meisten Betrachtungen zu Grunde liegt, das *Parallelgitter*. Es handelt sich einfach um 2 Schaaren unter sich äquidistanter Parallelen. Den Inbegriff der Schnittpunkte der beiden Schaaren bezeichne ich kurzweg als *Punktgitter*. Es ist das also die Gesammtheit der Punkte, welche in irgend einem xy-Systeme ganzzahlige Coordinaten haben. Ist das Punktgitter als solches (ohne die verbindenden Parallelgeraden) vorgelegt, so giebt es auch unendlich viele Coordinatensysteme, betreffend deren es diese Eigenschaft besitzt; es ist ein erster wichtiger Satz, dass man von einem ersten solchen Systeme zu jedem anderen durch die ganzzahligen linearen Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y \\ y' &= \gamma x + \delta y \end{aligned}\right\}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

übergeht.

Die Figur dieser Punktgitter wird nun in erster Linie dazu gebraucht, um die *Theorie der gewöhnlichen numerischen Kettenbrüche* in geometrischer Form verständlich zu machen. Sei ω der Einfachheit halber eine irrationale Grösse, die wir in einen Kettenbruch entwickeln wollen. Wir setzen $\omega = \frac{x}{y}$ und haben damit eine gerade Linie, welche vom Coordinatenanfangspunkte aus zwei entgegengesetzte Quadranten des xy-Systems durchschneidet, ohne irgend einen Gitterpunkt weiter zu enthalten. Ich will meine Aufmerksamkeit hier nur auf den einen Quadranten richten und die beiden Theile, in welche derselbe durch unsere Gerade zerlegt wird, kurz als X-Sector und Y-Sector bezeichnen. Sei jetzt vermöge gewöhnlicher Kettenbruchentwickelung:

$$\omega = \mu_1 + \cfrac{1}{\mu_2 + \cfrac{1}{\mu_3 + \ddots}};$$

wir erhalten von da die Näherungspunkte:

$$\frac{p_{-1}}{q_{-1}} = \frac{0}{1}, \quad \frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{0}, \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{\mu_1}{1}, \ldots$$

allgemein:

$$\frac{p_\nu}{q_\nu} = \frac{\mu_\nu \cdot p_{\nu-1} + p_{\nu-2}}{\mu_\nu \cdot q_{\nu-1} + q_{\nu-2}}.$$

Hier sind die p_ν, q_ν theilerfremde ganze Zahlen, die ich so im Vorzeichen fixiren will, dass der „Näherungspunkt" $x, y = p_\nu, q_\nu$ dem von uns ausgewählten Quadranten angehört. Die Frage wird sein, *welches das*

geometrische Gesetz dieser Näherungspunkte ist, bez. *wie in der Reihenfolge dieser Punkte die Zahlen* μ_ν *hervortreten.* Hierauf kommt nun folgende einfache Antwort: Man denke sich die ganzzahligen Punkte (Gitterpunkte) zunächst des X-Sectors, dann des Y-Sectors, durch kleine Stifte markirt und schlinge um das Ganze einen Faden, den man anzieht. Der Faden wird zunächst längs des begrenzenden Theils der X-Axe (bez. der Y-Axe) herlaufen und dann in einen Polygonzug übergehen, welcher sich der Linie ω asymptotisch nähert. *Die Näherungspunkte* (p_ν, q_ν) *der Kettenbruchentwickelung sind nun nichts anderes als die Ecken dieses Polygonzuges, mit der Maassgabe, dass* (p_{-1}, q_{-1}), (p_1, q_1), $(p_3, q_3)\ldots$ *dem Y-Sector*, (p_0, q_0), (p_2, q_2), ... *dem X-Sector zugehören.* Man betrachte ferner die einzelne Polygonseite, welche $(p_{\nu-2}, q_{\nu-2})$ mit (p_ν, q_ν) verbindet. *Dieselbe ist parallel der Strecke, welche von* 0 *nach* $(p_{\nu-1}, q_{\nu-1})$ *führt und* μ_ν*-mal so lang; sie enthält also* $(\mu_\nu - 1)$ *Gitterpunkte in ihrem Inneren.* Hierin liegt unmittelbar die geometrische Bedeutung der μ_ν. Ich habe von da aus in meiner Vorlesung alle Einzelheiten der gewöhnlichen Kettenbruchtheorie abgeleitet und zum Theil noch vervollständigt.

So weit sind die Maassverhältnisse des Parallelgitters noch gar nicht in Betracht gekommen. Vielmehr handelte es sich um Beziehungen, die bei beliebigen *affinen* Umformungen des Gitters ungeändert bestehen bleiben; wir stehen, um es kurz zu sagen, auf dem Standpunkte der *affinen* Geometrie. Jetzt erst wenden wir uns den Betrachtungen der Maassverhältnisse zu. Aber wir thun dies in der freien Weise, dass wir ganz willkürlich eine quadratische Form geben:

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

und nun die Entfernung zweier Punkte (x, y), (x', y') *durch*

$$\sqrt{f(x - x', y - y')}$$

definiren. Wir erreichen dadurch, dass wir unabhängig von dem Vorzeichen der Discriminante $D = b^2 - 4ac$ eine gleichförmige geometrische Ausdrucksweise gewinnen. Wir können geradezu sagen, *dass die Theorie einer beliebigen binären quadratischen Form in der zu ihr gehörigen Maassgeometrie unseres Gitters enthalten ist.* Insbesondere berechnen wir für das Elementarparallelogramm als Seitenlängen $\sqrt{a}$ und $\sqrt{c}$ und als Cosinus des eingeschlossenen Winkels $\frac{b}{2\sqrt{ac}}$. Ist $D<0$, so sind die beiden „Minimalrichtungen“ $f(x, y) = 0$ imaginär. Wir können dann das Gitter so wählen, dass diese beiden Richtungen nach den gewöhnlichen Kreispunkten hinweisen. Nehmen wir überdies unsere Form als positiv, so coincidirt unsere Maassbestimmung mit derjenigen der elementaren Geometrie; wir haben so für definite $f(x, y)$ genau die von Gauss angegebene Deutung. Der Vorzug

unserer Auffassung aber ist der, dass wir ebensowohl für positives D eine durchaus anschauliche Deutung des f haben, sofern wir uns nur die Mühe nehmen, uns in die betr. Maassbestimmung mit ihren reellen Minimalrichtungen hineinzudenken. Die Gauss'sche Deutung der definiten Formen $f(x, y)$ ist bekanntlich von Dirichlet zu einer einfachen Ableitung der Reductionstheorie dieser Formen benutzt worden. Ich habe daher in meiner Vorlesung mein Hauptinteresse darauf verwandt, nachzuweisen, *dass die scheinbar ganz anders geartete Theorie der Reduction der indefiniten quadratischen Formen in unserer verallgemeinerten Maassbestimmung eine durchaus entsprechende geometrische Interpretation findet**).

Betrachten wir in dieser Hinsicht zunächst die gewöhnlichen *Automorphieen* von f, d. h. diejenigen linearen ganzzahligen Substitutionen $\left|\begin{matrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{matrix}\right|$ von der Determinante $+1$, welche nicht nur f selbst sondern auch die einzelnen Wurzeln von $f = 0$ in sich überführen. Damit solche Automorphieen existiren, müssen natürlich die Coefficienten

---

*) Vielleicht ist es manchem Leser erwünscht, wenn ich hier folgende Bemerkung einschalte. Die im Texte gemeinte Interpretation der Formen $f(x, y)$ ist im Grunde ganz trivial und besteht einfach darin, die Variabelen x, y als Parallelcoordinaten in der Ebene zu deuten und darnach f als eine Function des Ortes aufzufassen, — die Gitterfigur kommt erst dadurch herein, dass wir uns, was an sich nicht nöthig wäre, auf ganzzahlige Werthe der Variabelen beschränken. Die linearen Substitutionen der x, y decken sich dabei mit denjenigen affinen Transformationen der Ebene, welche den Anfangspunkt festlassen; alle Eigenschaften der Formen also, welche gegenüber linearen Substitutionen der x, y invariant sind, verwandeln sich in Beziehungen der affinen Geometrie. Statt dessen findet man in den Werken über Invariantentheorie fast ausschliesslich die *projective* Interpretation der binären Formen entwickelt, welche nur den *Quotienten* $\frac{x}{y}$ geometrisch deutet, nämlich als Coordinate auf der geraden Linie oder im Strahlbüschel, wobei man dann von vornherein darauf angewiesen ist, nicht die Form f selbst sondern nur die *Gleichung* $f = 0$ geometrisch zu interpretiren. Die hierbei hervortretenden Verhältnisse haben natürlich an sich ihr grosses und berechtigtes Interesse, und werden dementsprechend auch in meiner Vorlesung bei Gelegenheit herangezogen, — als geometrische Deutung der invariantentheoretischen Beziehungen aber ist die Methode wesentlich unvollkommen. Dass sie solche universelle Geltung hat erlangen können, wie es thatsächlich der Fall ist, ist nur historisch zu verstehen, aus dem Umstande, dass sich die Invariantentheorie ursprünglich in Anlehnung an die entwickelt vorliegende projective Geometrie ausgebildet hat. Alles Dieses ist so selbstverständlich, dass ich darüber keine Worte verlieren würde, wenn ich nicht aus eigener Erfahrung wüsste, wie hemmend eine ausschliesslich projective Gewöhnung (wie überhaupt jede einseitige Gewöhnung) werden kann. Beispielsweise bin ich nur durch diese Gewöhnung bis in die letzten Jahre gehindert worden, die Compositionstheorie der quadratischen binären Formen geometrisch zu verstehen, während doch die Sache selbst, wie weiter unten darzulegen ist, ganz einfach und natürlich zu Stande kommt.

von f commensurabel sein; ich schliesse mich der üblichen Darstellung an, indem ich sie von vornherein ganzzahlig und ohne gemeinsamen Theiler nehme. Es handelt sich dann zunächst um den Satz, dass die Pell'sche Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 4$$

bei positivem D unendlich viele positive Lösungen hat, die sich aus der sog. kleinsten Lösung t_0, u_0 vermöge der Formel

$$\frac{t + \sqrt{D} \cdot u}{2} = \left(\frac{t_0 + \sqrt{D} \cdot u_0}{2}\right)^r$$

zusammensetzen. Von da aus erhält man die in Rede stehenden Automorphieen, indem man f irgend in 2 Linearformen spaltet:

$$f = \xi \cdot \eta; \quad \left\{\begin{aligned} \xi &= \sqrt{a} \cdot x + \frac{b + \sqrt{D}}{2\sqrt{a}} \cdot y \\ \eta &= \sqrt{a} \cdot x + \frac{b - \sqrt{D}}{2\sqrt{a}} \cdot y \end{aligned}\right\},$$

und nun diese Linearfactoren mit $\frac{t \pm \sqrt{D} \cdot u}{2}$ multiplicirt:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \left(\frac{t_0 + \sqrt{D} \cdot u_0}{2}\right)^r \cdot \xi \\ \eta' &= \left(\frac{t_0 - \sqrt{D} \cdot u_0}{2}\right)^r \cdot \eta \end{aligned}\right\}.$$

Was bedeuten diese Automorphieen geometrisch? Wir haben zunächst den Uebergang von den x, y zu den ξ, η; derselbe besagt, dass wir statt der beliebigen Parallelcoordinaten *Minimalcoordinaten* einführen, d. h. die beiden geraden Linien $f = 0$ als neue Coordinatenaxen wählen sollen. Jede Formel

$$\xi' = m\xi, \quad \eta' = \frac{1}{m}\eta$$

wird nun geometrisch eine *Drehung* um den Coordinatenanfangspunkt vorstellen, d. h. eine Drehung im Sinne unserer durch $\sqrt{f}$ gegebenen Maassbestimmung. Der Drehwinkel berechnet sich dabei nach bekannten Grundsätzen als $\frac{i}{2} \log DV$, wo DV das Doppelverhältniss der 4 Strahlen

$$\frac{\xi}{\eta} = \infty,\ 0,\ \frac{\xi}{\eta},\ \frac{\xi'}{\eta'},$$

also m^2 ist.

Offenbar handelt es sich bei dem zahlentheoretischen Ansatz um diejenigen Drehungen dieser Art, welche unser Gitter mit sich selbst zur Deckung bringen. Und die Theorie sagt, dass es unendlich viele solcher Drehungen giebt, die sich alle aus einer kleinsten Drehung durch beliebige (positive oder negative) Wiederholung ergeben. Der

Satz ist, wenn erst die Existenz einer kleinsten Drehung zugegeben wird, geometrisch evident. *Der Winkel dieser kleinsten Drehung aber* (den ich schlechtweg den Pell'schen Winkel nenne) *hat den Betrag* $i \log \frac{t_0 + u_0\sqrt{D}}{2}$. Da wird nun deutlich, wesshalb dieser letztere Ausdruck in der Theorie der indefiniten quadratischen Formen genau da eintritt, wo in der Theorie der definiten Formen π (oder unter Umständen $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{\pi}{3}$) steht. Denn dieses π (oder $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$) ist gerade auch der kleinste Winkel, um den man ein definites Gitter (wie ich der Kürze halber sagen will) drehen muss, damit es zum ersten Male mit sich selbst zur Deckung kommt. —

Wir werden weiter fragen, wesshalb diese Theorie in der bekannten engen Beziehung zur Kettenbruchentwickelung der beiden Wurzeln ω', ω'' steht, welche die Gleichung $f(x, y) = 0$ für den Quotienten $\frac{x}{y}$ ergiebt. Wir construiren uns die beiden geraden Linien $\frac{x}{y} = \omega'$, $\frac{x}{y} = \omega''$, — deren jede durch O in zwei Halbgerade zerlegt wird —, und umgeben jede dieser 4 Halbgeraden nach der oben geschilderten Regel mit zwei Kettenbruchpolygonen. Andererseits will ich gewisse vom Coordinatensystem unabhängige Polygone bilden, welche ich die zu ω', ω'' gehörigen *natürlichen Umrisspolygone* nenne. Nämlich: die ganzzahligen Punkte x, y werden durch die beiden Geraden ω', ω'' auf vier Sectoren vertheilt, und nun will ich wieder die ganzzahligen Punkte des einzelnen so entstehenden Sectors, nachdem ich sie durch kleine Stifte bezeichnet habe, mit einem Faden umschlingen und diesen Faden straff ziehen. Es entstehen so vier Polygone, welche nach Art eines Hyperbelastes ein jedes asymptotisch zu zweien unserer Halbgeraden beiderseitig ins Unendliche laufen; die Polygone gehören paarweise als „Scheitelpolygone" zusammen. Dass diese natürlichen Umrisspolygone bei den Pell'schen Drehungen mit sich selbst zur Deckung kommen, ist a priori klar, denn sie sind durch $f = 0$ eindeutig bestimmt. Man könnte sagen: es sind *semireguläre* Polygone, denn sie müssen nach einer gewissen Periode immer wieder dieselben Seitenlängen und Seitenwinkel darbieten. Die ganze Theorie der Kettenbruchentwickelungen von ω', ω'' kommt nun einfach darauf hinaus, dass die 8 Kettenbruchpolygone, welche wir vorab nannten, *in ihrem asymptotischen Verlauf nothwendig in diese natürlichen Umrisspolygone einmünden.* Dies ist geometrisch evident, und insbesondere erkennt man auch, wie viele verschiedene Fälle in dieser Hinsicht je nach der Lage der X- und Y-Axe zu den Linien ω', ω'' zu unterscheiden sind. Ich habe dies in meiner Vorlesung genau ausgeführt und namentlich auch entwickelt, dass sich auf Grund der erhaltenen

Figuren die Gaussische Theorie der Reduction von f nunmehr ganz von selbst ergiebt. In einer vorläufigen Mittheilung, welche ich über diesen Gegenstand im vorigen Herbst vor der Lübecker Naturforscherversammlung gegeben habe*), habe ich gleich auf Verallgemeinerungen hingewiesen, welche das geschilderte Verfahren im dreidimensionalen Raume findet. Die Sache ist folgende:

Ich nehme das Gitter aller ganzzahligen Punkte x, y, z und zwar $F(xyz)$ einmal als indefinite quadratische ternäre Form, das andere Mal als eine in 3 reelle lineare Factoren zerlegbare cubische ternäre Form. Wir haben dann in $F = 0$ das eine Mal einen reellen Kegel zweiten Grades, das andere Mal drei reelle Ebenen. Jede der beiden Kegelhälften umschliesst ein unendliches Aggregat ganzzahliger Punkte, ebenso jeder der acht von den drei Ebenen gebildeten Oktanten. Mein Vorschlag ist nun der, dass man die Reductionstheorie der genannten ternären Formen an die *ebenflächigen Umrisspolyeder* knüpfen soll, welche diese Aggregate ganzzahliger Punkte darbieten. Leider ist dieser Vorschlag bisher noch nicht zur Ausführung gelangt, insbesondere hat Herr Furtwängler in seiner damals in Aussicht gestellten inzwischen erschienenen Dissertation**) die Reduction der cubischen ternären zerlegbaren Formen doch nicht an die bezeichneten Umrisspolyeder sondern an die Hermite'sche Methode der „réduction continuelle" angeknüpft [wie dies betr. quadratische indefinite binäre Formen in den „Mod." geschehen ist].

Betreffs des weiteren Inhaltes des ersten Theils meiner Vorlesung wünsche ich noch Folgendes anzuführen:

Nachdem die Reductionstheorie für die einzelne binäre quadratische Form durchgeführt ist, handelt es sich darum, die Stellung der reducirten Formen innerhalb der Gesammtheit darzulegen. Dies ist s. Z. in den „Mod." in der Weise geschehen, dass man die Wurzeln der Gleichung $a\omega^2 + b\omega + c = 0$ einführte und in der complexen Ebene interpretirte. Inzwischen habe ich schon damals darauf hingewiesen, dass man die entstehenden Kreisbogenfiguren zweckmässigerweise durch geradlinige ersetzen kann. Man erhält die letzteren unmittelbar, indem man die Verhältnisse $a : b : c$ als trimetrische Coordinaten in der Ebene deutet***). Die „definiten" Formen füllen dann mit ihren Bildpunkten

*) Vergl. auch eine Mittheilung in den Göttinger Nachrichten vom Herbst 1896, sowie eine Uebersetzung dieser Mittheilung in den Nouvelles Annales von 1896.

**) Göttingen 1896: Zur Theorie der in Linearfactoren zerlegbaren, ganzzahligen ternären cubischen Formen.

***) Dies reicht hier aus; aber natürlich erhält man entsprechend der Anmerkung auf pag. 565 eine vollständigere Interpretation, wenn man den dreidimensionalen Raum heranzieht und hier die a, b, c selbst als Punktcoordinaten interpretirt.

das Innere des „Discriminantenkegelschnitts“ $b^2 - 4ac = 0$ aus, die indefiniten das Aeussere. Dabei zerlegt sich das Innere, den Substitutionen $\left|\begin{matrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{matrix}\right|$ entsprechend, in unendlich viele äquivalente Dreiecke, deren eines die reducirten Formen repräsentirt. Die Reductionstheorie der indefiniten Formen aber wird dadurch zugänglich, dass man — entsprechend dem Grundgedanken von Hermite's réduction continuelle — dem ausserhalb des Kegelschnitts gelegenen Punkte seine *Polarsehne* zuordnet (d. h. denjenigen Theil seiner Polare, welche im Kegelschnittinneren liegt), und nun zusieht, wie diese Polarsehne die Dreieckstheilung des Inneren durchzieht. Diese Verhältnisse sind noch letzthin von Herrn Hurwitz ausführlich dargelegt worden (Math. Annalen Bd. 44, 1894, sowie Mathematical Papers presented to the Chicago Congress, 1893, erschienen 1896). Insbesondere hat derselbe dort die Gaussische Reduction der indefiniten Formen in sehr eleganter Weise an die Betrachtung der Polarsehne geknüpft; es kommt darauf an, zuzusehen, wie diese Polarsehne die Symmetrielinien der Dreieckstheilung durchsetzt (während die Hermite'sche Reductionstheorie, die der geometrischen Erläuterung der „Mod.“ zu Grunde liegt, die Dreiecks*flächen* in Betracht nimmt, durch welche die Polarsehne hindurchläuft). Ich habe in meiner Vorlesung die Hurwitz'schen Entwickelungen mit einigen Modificationen reproducirt und insbesondere hervorgehoben, wie dieselbe Schritt für Schritt mit den früher dargelegten am Gitter operirenden Reductionsbetrachtungen parallel laufen. Ich betone dann insbesondere noch das unterschiedliche Verhalten der Gruppe $\left|\begin{matrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{matrix}\right|$ im Inneren des Discriminantenkegelschnitts und ausserhalb desselben. Während die Gruppe im Inneren eigentlich discontinuirlich ist und dementsprechend das Innere in wohldefinirte Discontinuitätsbereiche von endlicher Ausdehnung zerlegt (die Dreiecke der wiederholt genannten Eintheilung), ist sie im Bereiche $b^2 - 4ac > 0$ uneigentlich discontinuirlich und es erscheint ganz unmöglich, sich hier eine Gesammtheit von Punkten geometrisch vorzustellen, welche aus jeder Classe äquivalenter Punkte nur je einen enthielte. Die Theorie der automorphen Functionen hat ja für das gleiche Vorkommniss längst sehr viel mannigfachere Beispiele geliefert. Trotzdem wollte ich hier — auch im Referate — nicht unterlassen, ausdrücklich auf dasselbe hinzuweisen. Denn es giebt meines Erachtens keine Thatsache, die so sehr zum Nachdenken über das Wesen der räumlichen Continuität anregt, als dieses verschiedenartige Verhalten ein und derselben Gruppe in verschiedenen Gebieten.

Zum Schlusse gebe ich noch eine Einleitung in diejenigen Gebiete der Theorie der elliptischen Functionen, bez. Modulfunctionen, welche in der Folge benutzt werden sollen.

Der Uebergang zu den elliptischen Functionen geschieht am unmittelbarsten von der Figur des Parallelgitters aus. Man hat dabei eine quadratische Form $f(x, y)$ von *negativer* Discriminante zu Grunde zu legen. Wir construiren das zugehörige Parallelgitter am besten gleich (in Gaussischer Weise) so, dass $\sqrt{f(x, y)}$ die Entfernung von 0 im elementaren Sinne bezeichnet. Es genügt jetzt, die Ebene x, y in gewöhnlicher Weise als Ebene einer complexen Variabelen $(x + iy)$ aufzufassen: unser Parallelgitter legt dann ohne weiteres einen Inbegriff doppeltperiodischer Functionen von $(x + iy)$, d. h. ein elliptisches Gebilde fest. Sind ω_1, ω_2 die dem Gitterparallelogramm entsprechenden Perioden des Gebildes, so ist rückwärts unsere quadratische Form $f(x, y)$ nichts anderes als die *Norm* $(\omega_1 x + \omega_2 y)(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y)$. Die Invarianten erster Stufe des elliptischen Gebildes, also g_2, g_3, Δ, ferner $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$ oder $j = 1728\, J$, die von der besonderen Auswahl der Perioden ω_1, ω_2 unabhängig sind, erscheinen hier unmittelbar als *analytische Invarianten* des zum Parallelgitter gehörigen Punktgitters, d. h. als Invarianten der ganzen Formen*classe*, welcher f zugehört. Eben deshalb tritt die Dreiecksfigur, mit deren Hülfe wir uns in der Ebene $a : b : c$ eine Uebersicht über die Aequivalenzverhältnisse der definiten Formen verschafften, in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen grundlegend hervor. Die ausführliche Darstellung, welche hiervon in den „Mod." gegeben ist, benutzt durchweg die Kreisbogendreiecke der ω-Ebene; es wäre die Frage, ob man nicht auch bei functionentheoretischen Untersuchungen sich gewöhnen soll, direct mit der geradlinigen Figur zu arbeiten. —

Natürlich giebt die so gewonnene Beziehung zwischen elliptischen Functionen und quadratischen Formen nach beiden Seiten hin den Anstoss zu ferneren Entwickelungen.

Ich erinnere in meiner Vorlesung insbesondere daran, dass nach den in den „Mod." dargelegten Grundsätzen die vorgenannten Invarianten (oder Moduln) der *ersten* Stufe (welche bei allen unimodularen Substitutionen $\left|\begin{matrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{matrix}\right|$ ungeändert bleiben) den Anfang einer unbegrenzten Reihe von Invarianten *höherer* Stufe bilden, nämlich solcher Invarianten, welche nur bei denjenigen Substitutionen $\left|\begin{matrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{matrix}\right|$ unverändert bleiben, die in Bezug auf eine bestimmte Zahl q geeigneten Congruenzbedingungen genügen. Als Beispiel für Moduln höherer Stufe benutze ich dabei mit Vorliebe die *Ikosaederirrationalität* $\zeta(\omega)$, also den sogenannten Hauptmodul fünfter Stufe. —

Die Sache ist nun die, dass diese Stufeneintheilung sich auf die Theorie der quadratischen Formen überträgt, indem man bei ihnen nicht nach Aequivalenz schlechthin, sondern nur nach *relativer* Aequi-

valenz fragt, d. h. nach Aequivalenz vermöge solcher $\left|\begin{matrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{matrix}\right|$, welche in Bezug auf eine Zahl q den angedeuteten Congruenzbedingungen genügen. Eine Erledigung findet das Problem der relativen Aequivalenz jeweils durch Betrachtung des *Fundamentalpolygons*, welches der gewählten Congruenzgruppe innerhalb der zur Gesammtgruppe $\left|\begin{matrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{matrix}\right|$ gehörigen Dreieckstheilung entspricht*).

Von der anderen Seite, d. h. von seiten der Zahlentheorie, stammt das besondere Interesse für *ganzzahlige* quadratische Formen $ax^2 + bxy + cy^2$, wobei man diejenigen Formen, resp. Formenclassen, welche zu der nämlichen Discriminante $D = b^2 - 4ac$ gehören, zweckmässigerweise zusammenordnet und neben einander betrachtet. Was bedeutet diese Einschränkung für die Theorie der elliptischen Functionen? Wir bezeichnen die betreffenden elliptischen Gebilde als *singuläre* elliptische Gebilde, und es wird der Hauptzielpunkt des zweiten Theils der vorliegenden Vorlesung sein, darzulegen, welche Bewandniss es mit diesen besonderen elliptischen Gebilden hat. In dieser Weise also kommen wir hier zu demjenigen Gebiete, welches man gemeinhin als die Lehre von der *complexen Multiplication der elliptischen Functionen* bezeichnet. —

Schliesslich dürfen wir wohl nicht unterlassen, hervorzuheben, wie merkwürdig es ist, dass sich die functionentheoretischen Beziehungen, von denen wir reden, nur an die Formen negativer Discriminanten anknüpfen, trotzdem die Formen positiver Discriminanten zahlentheoretisch ebenso zugänglich sind, wie die anderen, und die Unterschiede ihrer Theorie nach der eben gegebenen Auseinandersetzung den gegensätzlichen Charakter verlieren, den sie zunächst zu besitzen scheinen. Wird hier dasselbe Mittel seine Kraft bewähren, welches Jacobi in der Theorie der Abel'schen Functionen benutzt, indem er Verhältnisse, die im Gebiete einer einzelnen Variabelen undurchsichtig scheinen, dadurch zu voller Klarheit erhob, dass er sie als Projectionen mehrdimensionaler Beziehungen auffassen lehrte?

Der *zweite* Theil meiner Vorlesung beginnt mit denjenigen Transformationen der Gitter, welche durch lineare Substitutionen *höherer Ordnung*,

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by\\ y' &= cx + dy \end{aligned}\right\} \quad ad - bc = n$$

*) Die „relative" Aequivalenz kommt in beschränktem Sinne auch in den Arbeiten von Kronecker vor; was nämlich Kronecker *vollständige* Aequivalenz zweier binären quadratischen Formen nennt, ist relative Aequivalenz modulo der Hauptcongruenzgruppe zweiter Stufe.

dargestellt sind. Durch jede solche Transformation wird einem gegebenen Gitter ein grossmaschigeres Gitter „eingelagert", umgekehrt wird auf diese Weise jedes eingelagerte Gitter gewonnen. Sieht man von den Parallelstäben der Gitter ab, achtet also nur auf die Punktgitter, so giebt es für vorgeschriebenes n eine wohlbekannte endliche Zahl eingelagerter Gitter (wobei noch zu unterscheiden ist, ob man die Coefficienten a, b, c, d als theilerfremd voraussetzen will, oder nicht). — Diese Theorie gewinnt ihre besondere Bedeutung für die ganzzahligen quadratischen Formen, bez. die zu ihnen gehörigen Gitter; sie giebt nämlich die Grundlage einer *rationellen Classification* dieser Formen. Man bemerke vorab, dass die zu einer solchen Form gehörige Discriminante $D = b^2 - 4ac$ entweder $\equiv 0$ oder $\equiv 1 \pmod 4$ ist, und dass umgekehrt jede Zahl D, welche eine dieser Congruenzen modulo 4 befriedigt, als Discriminante einer ganzzahligen quadratischen Form angesehen werden kann. Man theile nun die Discriminanten in Stammdiscriminanten d, — das sind solche, die keinen quadratischen Factor enthalten, nach dessen Abtrennung sie noch Discriminanten bleiben — und in die zugehörigen Zweigdiscriminanten $D = n^2 d$. Sei ferner h die Zahl der zur Stammdiscriminante d gehörigen Classen quadratischer Formen, resp. Punktgitter. Ein jedes dieser „Stammgitter" enthält dann vermöge Transformation n^{ter} Ordnung eine gewisse Anzahl „Zweiggitter" der Discriminante $n^2 d$, und mit diesen den h Stammgittern eingelagerten Gittern sind die Gitter, welche zur Discriminante $n^2 d$ gehören, überhaupt erschöpft. Das Resultat ist also, dass die betr. Gitter sich nach den Werthen der Stammdiscriminante d zusammengruppiren.

Auf die Theorie der elliptischen Functionen übertragen ergiebt unser obiger Ansatz in bekannter Weise die Lehre von den Transformationen höherer Ordnung. Ich begründe in der von den „Mod." her bekannten Weise*) die Existenz von algebraischen Transformationsgleichungen zunächst für die Invarianten erster Stufe, — dann auch für diejenigen höherer Stufe, insbesondere die Ikosaederirrationalität. Bei der ersten Stufe haben wir erstlich die Gleichungen $F(j', j) = 0$, welche das gegebene j und das transformirte $j\,(=j')$ verbinden, andererseits die Multiplicatorgleichung $\Phi(M, j) = 0$, wo $M = n\sqrt[12]{\frac{\Delta'}{\Delta}}$. Auf die Modulargleichungen des Ikosaeders komme ich noch später zurück. — Die besondere Betrachtung der singulären elliptischen Gebilde aber wird noch hinausgeschoben, weil erst noch bestimmte wichtige arithmetische Untersuchungen vorauszuschicken sind.

---

*) d. h. durch unmittelbare functionentheoretische Betrachtung in der s-Ebene, also ohne die sonst übliche Voranstellung der Theilungsgleichung.

Wir können dieselben vielleicht folgendermassen am kürzesten bezeichnen:

Wenn schon bislang an Stelle der quadratischen Formen immer mehr die zugehörigen Gitter getreten sind, so gilt es jetzt *mit den Gitterpunkten, oder vielmehr den Minimalcoordinaten ξ, η der Gitterpunkte (vergl. oben pag. 566) zu rechnen.* Der einfacheren Exposition halber beschränken wir uns dabei zunächst auf Stammdiscriminanten d und denken uns übrigens für jede der h zugehörigen Classen eine repräsentirende Form $ax^2 + bxy + cy^2$ gewählt. Die zugehörigen „Gitterzahlen" werden dann folgende sein:

$$\begin{cases} \xi = \varrho\left(\sqrt{a}\cdot x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\cdot y\right), \\ \eta = \frac{1}{\varrho}\left(\sqrt{a}\cdot x + \frac{b-\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\cdot y\right), \end{cases}$$

wo ϱ ein vorläufig noch unbestimmter Factor ist, den wir im Falle eines positiven d reell, im Falle eines negativen d complex vom absoluten Betrage 1 wählen. Ich bezeichne dieses ϱ als den *Azimuthalfactor* des Gitters, weil $i \log \varrho$ ersichtlich der Winkel ist, den die von O nach $x = 1$, $y = 0$ laufende Gerade mit der Geraden $\xi - \eta = 0$ bildet. Ueber „Addition" zweier Gitterpunkte brauchen wir kaum eine Festsetzung zu treffen; wir verstehen darunter den Uebergang von den beiden Punkten ξ, η und ξ', η' zum Punkte $\xi + \xi', \eta + \eta'$. Ersichtlich dürfen nur solche Punkte addirt werden, welche demselben Gitter angehören; anderenfalls würden wir über die h Gitter, auf deren Punkte wir uns doch beschränken wollen, hinausgeführt. Dagegen werden wir zwei Punkte ξ, η und ξ', η' mit einander „multipliciren", mögen sie demselben Gitter oder verschiedenen Gittern angehören; wir verstehen darunter den Uebergang zum Punkte $\xi\xi', \eta\eta'$. *Unsere Absicht wird sein, die Azimuthalfactoren der h Gitter so auszuwählen, dass die Multiplication innerhalb des Gebietes unserer h Gitter unbeschränkt ausführbar wird, (ohne irgend über dasselbe hinaus zu führen).*

Zu dem Zwecke beginne man mit Ueberlegungen, die von der Auswahl der ϱ noch unabhängig sind. Man lasse, bei beliebiger Annahme des ϱ bez. des ϱ', ξ, η alle Punkte eines Gitters G, ξ', η' alle Punkte eines Gitters G' durchlaufen und bilde nicht nur alle Producte $\xi\xi', \eta\eta'$, sondern auch die Summe aller solcher Producte $\Sigma\xi\xi', \Sigma\eta\eta'$. *Die so erhaltenen Punkte werden dann geradezu ein drittes zur Discriminante d gehöriges Gitter, G'', ausmachen* (dessen Azimuth natürlich davon abhängt, wie man gerade die Azimuthe von G und G' gewählt hat). Wir schreiben symbolisch:

$$G \,.\, G' = G''$$

und haben damit, was ich als *Composition der Gitter* bezeichne. Die sogenannte „Composition der Formen" ist davon nur ein Corollar.

Dem Process der Composition zufolge bilden die Gitter $G, G', \ldots$ eine *Gruppe vertauschbarer Elemente.* Als „Einheit" erscheint dabei das *Hauptgitter*, als dessen repräsentirende Form wir je nach dem Verhalten von d in Bezug auf den Modul 4 die Form

$$x^2 - \frac{d}{4} y^2, \quad \text{beziehungsweise} \quad x^2 + xy + \frac{1-d}{4} y^2$$

nehmen können; wir bezeichnen diese Form kurzweg als *Hauptform.* Alle anderen Gitter setzen sich nach bekannten Sätzen*) aus gewissen erzeugenden Gittern $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ in der Gestalt $\Gamma^{\alpha} \Gamma_1^{\alpha_1} \Gamma_2^{\alpha_2} \ldots$ zusammen. Für jedes Γ giebt es dabei eine niederste Potenz, zu der erhoben es gleich 1 wird: $\Gamma^k = 1$, $\Gamma_1^{k_1} = 1$, $\Gamma_2^{k_2} = 1, \ldots$. Hier ist k_1 ein Theiler von k, k_2 ein Theiler von k_1 etc., das Product aller k aber ist die Classenzahl h.

Es ist nun leicht, unsere h Gitter $G, G' \ldots$ in der Weise zu „orientiren", d. h. über ihre Azimuthalfactoren so zu verfügen, dass die Compositionsformel $G \,.\, G' = G''$ nicht nur in abstracto sondern auch hinsichtlich der Azimuthe gilt. Man lege zu dem Zwecke vor allen Dingen das Hauptgitter in der Weise fest, dass es die Punkte

$$\xi = x + \frac{\sqrt{d}}{2} y, \qquad \eta = x - \frac{\sqrt{d}}{2} y,$$

resp.

$$\xi = x + \frac{1+\sqrt{d}}{2} y, \qquad \eta = x + \frac{1-\sqrt{d}}{2} y$$

enthält; — dasselbe umfasst dann insbesondere alle Punkte $(\xi, \eta) = (x, x)$, unter x beliebige rationale ganze Zahlen verstanden. Des ferneren werden wir die erzeugenden Gitter Γ unabhängig von einander in der Weise orientiren, wie es der jedesmaligen Relation $\Gamma^k = 1$ entspricht; von da aus folgt dann die Orientirung der anderen Gitter von selbst.

Die so erhaltene Figur, welche ich die *Normalfigur* der h Gitter nenne, ist nur erst h-deutig bestimmt, weil die Forderung $\Gamma^k = 1$ für das einzelne erzeugende Gitter Γ, wie eine leichte Ueberlegung zeigt, noch k Lagen offen lässt. *Irgend eine dieser h Figuren, gleichgültig welche, ist für die Folge festzuhalten.* Ich bemerke noch ausdrücklich (was sich im Laufe der weiteren Betrachtung ergiebt), dass die h Gitter der Normalfigur durchaus getrennt liegen, (dass keine zwei Gitter ausser dem Coordinatenanfangspunkte einen Punkt gemein haben).

Wir haben die Normalfigur construirt, indem wir verlangten, dass

*) Vergl. Schering. Die Fundamentalclassen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen. Göttinger Abhandlungen Bd. 14.

die Multiplication zweier Punkte innerhalb der h Gitter unbeschränkt ausführbar sei. Nennen wir das Gitter $\Gamma^{\alpha} . \Gamma_1^{\alpha_1} \ldots$ kurz G_α, ebenso das Gitter $\Gamma^{\beta} . \Gamma_1^{\beta_1} \ldots$ kurz G_β, so wird ein Punkt von G_α multiplicirt mit einem Punkte von G_β einen Punkt von $G_{\alpha+\beta}$ ergeben. *Das Schöne ist nun, dass innerhalb unserer Figur auch die Gesetze der Theilbarkeit in der von der gewöhnlichen Zahlentheorie her bekannten Weise gelten.*

Wir müssen, um diese Gesetze auszusprechen, zunächst die *Einheitspunkte* und ferner die *Primpunkte* definiren.

Als Einheitspunkte bezeichnen wir alle diejenigen Punkte, welche die Hauptform zu 1 machen. Es sind dies in Anlehnung an die oben besprochene Pell'sche Theorie die Punkte

$$\xi = \pm \left(\frac{t_0 + u_0\sqrt{d}}{2}\right)^{\nu}, \qquad \eta = \pm \left(\frac{t_0 - u_0\sqrt{d}}{2}\right)^{\nu};$$

in der That geht die Pell'sche Gleichung durch eine elementare Substitution in die Forderung über, dass die Hauptform $= 1$ sein soll.

Für die Primpunkte aber erhält man folgende Aufzählung:

1) Es kann erstlich sein, dass p durch keine Form der Discriminante d darstellbar ist. Dann werden wir den Punkt $(\xi, \eta) = (p, p)$ als Primpunkt zu bezeichnen haben.

2) Zweitens nehmen wir den Fall, dass p in der Discriminante d als Factor enthalten ist. Dann wird sich in einem unserer Gitter der Primpunkt $(\sqrt{p}, \sqrt{p})$ — oder auch $(\sqrt{-p}, \sqrt{-p})$ — finden, dessen Quadrat der Punkt (p, p), ev. nach Anbringung eines Zeichenwechsels ist.

3) Endlich soll p durch Formen der Discriminante d zwar darstellbar sein aber nicht in d enthalten sein. Wir können als darstellende Form dann

$$px^2 \pm qxy + ry^2$$

nehmen, wo das Vorzeichen von q unbestimmt bleibt. Von da aus kommen wir auf zwei getrennte Primpunkte, deren einer nach geeigneter Fixirung des Azimuthalfactors ϱ durch

$$\xi = \varrho\sqrt{p}, \qquad \eta = \frac{1}{\varrho}\sqrt{p}$$

gegeben ist, während der andere umgekehrt

$$\xi' = \frac{1}{\varrho}\sqrt{p}, \qquad \eta' = \varrho\sqrt{p}$$

aufweist.

Ich bezeichne abkürzend $\varrho\sqrt{p}$ mit π, $\frac{1}{\varrho}\sqrt{p}$ mit $\bar{\pi}$ und habe dann

$$\pi \cdot \bar{\pi} = p.$$

Daraufhin sind nun die Gesetze der Theilbarkeit einfach die:

dass ein Primpunkt nicht anders zerlegt werden kann, als durch Abtrennung von Einheitspunkten,

dass jeder andere Punkt, abgesehen von dieser immer möglichen Abtrennung, nur auf eine Weise in Primpunkte zerlegt werden kann.

Die so dargelegten Verhältnisse sind natürlich nur eine andere Formulirung der für die ganzen Zahlen des quadratischen Körpers $\sqrt{d}$ geltenden sogenannten *Idealtheorie*. Des Näheren gestaltet sich diese Beziehung folgendermassen:

Bemerken wir vorab, dass es offenbar ausreicht, überall statt von den Gitterpunkten (ξ, η) von ihren ξ-Coordinaten (oder ihren η-Coordinaten) zu reden. Die anschauliche Vorstellung des Gitters geht dabei allerdings verloren, aber es ist in jedem Augenblicke möglich, zu derselben zurückzugehen. Ich werde in diesem Sinne vielfach nicht mehr von den Gitterpunkten sondern von den Gitter*zahlen* (eben den ξ-Coordinaten) sprechen und von Hauptzahlen, Nebenzahlen unserer Figur reden. Es wird, hoffe ich, kein Missverständniss hervorrufen, wenn ich diese Abänderung der Ausdrucksweise nicht weiter jedesmal betone.

Unsere *Hauptzahlen* $x + y\frac{\sqrt{d}}{2}$, resp. $x + y \cdot \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ sind nun nichts anderes als die *ganzen* Zahlen des quadratischen Körpers $\sqrt{d}$. Beschränkt man sich auf diese Hauptzahlen und ist die Classenzahl $h > 1$, so hat die Zerlegung der Zahlen in Factoren bekanntlich nicht mehr die eben hervorgehobene Eigenschaft der Eindeutigkeit; eben darum hat Kummer seinerzeit diesen Hauptzahlen gewisse gedachte Zahlen, *ideale* Zahlen, hinzugefügt, durch deren Hülfe sich die Eindeutigkeit der Factorenzerlegung wieder herstellen liess. *Diese idealen Zahlen Kummer's werden bei uns realisirt; sie sind nichts anderes als die Nebenzahlen unserer Normalfigur.* Diese Nebenzahlen sind selbst ganze algebraische Zahlen. Sie gehören aber nicht mehr dem Körper $\sqrt{d}$ an, sondern enthalten gewisse zutretende Irrationalitäten, die sich aus den symbolischen Gleichungen

$$\Gamma^k = 1, \qquad \Gamma_1^{k_1} = 1, \ldots$$

ergeben, also kurz gesagt eine k^{te}, eine k_1^{te}, ... Wurzel aus einer geeigneten Zahl des Körpers $\sqrt{d}$.

Dass man die idealen Zahlen Kummer's durch Wurzeln aus wirklichen Zahlen (Hauptzahlen) darstellen kann, ist natürlich lange bekannt. Dagegen ist die anschauliche Art, wie diese idealen Zahlen in unserer Normalfigur an die Nebengitter geknüpft werden, soviel ich weiss, von anderer Seite noch nicht gegeben*), und gerade sie soll uns

*) Meine erste Mittheilung hierüber findet sich in den Göttinger Nachrichten vom Febr. 1893; vergl. auch den Vortrag IX in meinem „Evanston Colloquium". Die Poincaré'schen Entwickelungen, auf welche ich am letztgenannten Ort verweise, operiren zwar auch mit dem Hauptgitter aber nicht mit der vollständigen die Nebengitter umfassenden Normalfigur.

weiterhin (bei den singulären elliptischen Gebilden) die besten Dienste leisten. Man wird auch in höheren Fällen die idealen Zahlen in entsprechender Weise realisiren können, sofern man nur, bei Körpern l^{ten} Grades, mit Gittern im Raume von l Dimensionen operirt. In der schon oben genannten Furtwängler'schen Dissertation ist dies neuerdings für $l = 3$ entwickelt worden; ich verweise auf die dort gegebene Darstellung insbesondere auch wegen der Grundlegung der Theorie. Auch die Bemerkungen von Hurwitz in den Göttinger Nachrichten von 1895, p. 324ff., bewegen sich in der gleichen Richtung*).

Nicht minder direct sind die Beziehungen zu Dedekind's Idealtheorie. Sei (ξ, η) ein Gitterpunkt unserer Normalfigur; derselbe möge dem Gitter G_β angehören. Man wird diesem Punkte allemal ein *Bildgitter* zuordnen können, welches dem Hauptgitter eingelagert ist, indem man einfach (ξ, η) mit allen Punkten des Gitters $G_{-\beta}$ multiplicirt. Dieses Bildgitter (welches dem Gitter $G_{-\beta}$ „ähnlich" ist) entspricht dem Dedekind'schen „Ideal", d. h. das Ideal, welches Dedekind an Stelle des idealen Factors ξ setzt, wird durch die ξ-Coordinaten der Ecken unseres Bildgitters geliefert. Ich werde vielfach das Bildgitter selbst als das zum Punkte (ξ, η) gehörige *Ideal* bezeichnen. Durch das Ideal ist der Punkt (ξ, η) rückwärts nur bis auf Einheitsfactoren bestimmt; man kann sagen, dass das Ideal der Inbegriff der durch den Punkt (ξ, η) *theilbaren* Hauptzahlen sei.

Ich möchte nicht, dass man meine Darlegung dieser Verhältnisse als einen Gegensatz zu den Dedekind'schen Entwickelungen auffasste, sondern wesentlich nur als eine Veranschaulichung derselben. In der That operire ich bei dem in meiner Vorlesung gegebenen Beweise der hier im Referate nur historisch mitgetheilten Sätze fortgesetzt mit den Dedekind'schen Begriffsbestimmungen und auch die Einführung meiner Figuren geschieht durchweg in Anlehnung an die Dedekind'schen Entwickelungen. Eine gewisse Verschiedenheit der Darstellung liegt allerdings darin, dass ich von der Theorie der quadratischen *Formen* ausgehe, deren Coefficienten zunächst keineswegs ganze Zahlen zu sein brauchen, während bei Dedekind die Betrachtung des *Körpers* $\sqrt{d}$ und die Frage nach den für ihn geltenden Rechnungsregeln voransteht. Uebrigens bedarf ich bei der Behandlung der singulären ellip-

*) Vielleicht gehen die von den Gittern beginnenden geometrischen Betrachtungen doch in einer Hinsicht über die bisherigen Angaben der Zahlentheoretiker hinaus. Ich will dies hier nur für die binären quadratischen Formen auseinandersetzen. Die Irrationalität, welche hier beim einzelnen Nebengitter der $\sqrt{d}$ hinzutritt, hat nach unseren Darlegungen von Hause aus die Gestalt $\varrho\sqrt{a}$; *sie ist also nicht schlechtweg eine h^{te} Wurzel, sondern enthält neben dem Azimuthalfactor ϱ nur eine Quadratwurzel.* Dies scheint bisher nicht hervorgehoben zu sein.

tischen Gebilde noch einer leichten Verallgemeinerung des Idealbegriff's, die sich bei Betrachtung der Normalfigur ganz zwanglos bietet. Genau so, wie wir dem Punkte (ξ, η) ein dem Hauptgitter eingelagertes Bildgitter zuordneten — die Gesammtheit der durch (ξ, η) theilbaren Hauptpunkte — werden wir ihm innerhalb irgend eines gegebenen Nebengitters G_α ein Bildgitter coordiniren können. Dasselbe umfasst einfach die Producte von (ξ, η) mit sämmtlichen Punkten des Gitters $G_{\alpha-\beta}$. *Solche einem Nebengitter G_α eingelagerte Bildgitter werde ich Nebengitterideale nennen.*

Im Uebrigen sollte die Theorie von den Stammgittern (mit der Discriminante d) jetzt noch auf die zugehörigen Zweigformen (von der Discriminante $n^2 d$) übertragen werden. Diese Uebertragung erfordert keine weitere Zurüstung, weil die Zweiggitter den Hauptgittern in fester Weise eingelagert sind und daher mit diesen bei Construction der Normalfigur endgültig orientirt werden. Ich habe diese Sache in meiner Vorlesung wegen Zeitmangels nicht weiter ausgeführt und bemerke um so lieber, dass auch sie implicite bei Dedekind erledigt ist. In dieser Hinsicht genüge zu bemerken, dass das, was Dedekind eine *Ordnung* nennt*), der Inbegriff der ξ-Coordinaten der Eckpunkte des dem Hauptstammgitter eingelagerten Hauptgitters der Discriminante $n^2 d$ ist.

Die hiermit entwickelten Verhältnisse, insbesondere unsere Normalfigur, werden nun der Untersuchung der singulären elliptischen Gebilde zu Grunde gelegt. Wir haben uns dabei natürlich auf *negative* Discriminanten zu beschränken und setzen dementsprechend in der Folge für D die Bezeichnung $-\nabla$.

Man denke sich zuvörderst die verschiedenen Gitter, welche zu irgend einer Stammdiscriminante oder Zweigdiscriminante $(-\nabla)$ gehören, in unserer Normalfigur neben einander liegend. Dabei wollen wir der Deutlichkeit wegen festsetzen, (was für Stammdiscriminanten noch keine Einschränkung ist), dass wir nur solche Gitter in Betracht nehmen wollen, die zu *primitiven* quadratischen Formen Anlass geben; die Zahl dieser zu einer bestimmten Discriminante gehörigen „primitiven" Gitter bezeichnen wir allgemein mit h. Wir suchen jetzt die neuen Gitter, die aus ihnen durch irgend eine Transformation höherer Ordnung entstehen (die ihnen vermöge Transformation n^{ter} Ordnung eingelagert sind). Ich will der Einfachheit wegen annehmen, dass der Transformationsgrad n eine Primzahl p sei, und zwar eine solche Primzahl, die sich im Gebiete unserer Gitterzahlen in zwei verschiedene (nicht bloss durch Einheitsfactoren unterschiedene) Factoren π und $\overline{\pi}$ spaltet. Diese Factoren mögen den Gittern G_β und $G_{-\beta}$ angehören.

*) Statt „Ordnung" gebraucht Hr. Hilbert neuerdings das Wort „Ring".

Durch Transformation p^{ter} Ordnung entstehen aus irgend einem unserer gegebenen Gitter G_α, allgemein zu reden, $(p+1)$ neue. *Aber zwei von ihnen nehmen eine Sonderstellung ein. Es sind dies die Bildgitter (Idealgitter), welche den Zahlen π bez. $\bar{\pi}$ innerhalb G_α entsprechen, also die Gitter $\pi \,.\, G_{\alpha-\beta}$ und $\bar{\pi} \,.\, G_{\alpha+\beta}$, die aus $G_{\alpha-\beta}$ bez. $G_{\alpha+\beta}$ durch complexe Multiplication hervorgehen.* Diese zwei Gitter sind ersichtlich mit $G_{\alpha-\beta}$ und $G_{\alpha+\beta}$ ähnlich; ihre quadratischen Formen werden sich dementsprechend von $f_{\alpha-\beta}$, $f_{\alpha+\beta}$ nur um den Factor p unterscheiden, also imprimitiv sein. Im Gegensatze dazu sind die übrigen $(p-1)$ transformirten Gitter mit keinem der vorgegebenen Gitter ähnlich und geben zu primitiven quadratischen Formen Anlass.

Was wir so für eine bestimmte Categorie von Primzahlen constatirt haben, überträgt sich leicht (mutatis mutandis) auf beliebige Transformationsgrade. *Dies ist der eigentliche Fundamentalsatz in der Theorie der singulären elliptischen Gebilde.*

Unsere nächste Aufgabe wird sein, aus diesem Fundamentalsatze Folgerungen für die zu den Gittern G gehörigen Invarianten j zu ziehen. Ich werde die zu G_α gehörigen Invarianten j, Δ, etc. einfach durch den Index α bezeichnen: j_α, Δ_α, ... und übrigens die h verschiedenen j_α die *zu ∇ gehörigen* singulären Invarianten nennen. Man nehme zunächst wieder an, dass es sich um Transformation vom Grade p handele und dass p in unserem Zahlgebiet, wie vorhin, in das Product zweier verschiedener complexer Factoren, π und $\bar{\pi}$, zerfalle.

Wir haben dann sofort folgende beiden Sätze:

1) Die zu Transformation p^{ter} Ordnung gehörige Transformationsgleichung $F(j', j) = 0$ besitzt für $j = j_\alpha$ zwei (und nur zwei) Wurzeln, welche sich in der Reihe der singulären j befinden, nämlich $j' = j_{\alpha+\beta}$ und $j' = j_{\alpha-\beta}$.

2) Die Multiplicatorgleichung $\Phi(M, j) = 0$ hat entsprechend für $j = j_\alpha$ zwei Wurzeln, welche sich durch die Discriminanten Δ der vorgelegten singulären Gebilde selbst ausdrücken, nämlich

$$M = \bar{\pi} \sqrt[12]{\frac{\Delta_{\alpha-\beta}}{\Delta_\alpha}} \quad \text{und} \quad M = \pi \sqrt[12]{\frac{\Delta_{\alpha+\beta}}{\Delta_\alpha}} \,. -$$

Analoge Theorien ergeben sich natürlich für andere Primzahlen p und beliebige zusammengesetzte Transformationsgrade. Von da aus zeigt man dann ohne Schwierigkeit, erstlich: dass die zu ∇ gehörigen singulären j einer ganzzahligen Gleichung h^{ten} Grades $\chi_p(j) = 0$ genügen, deren höchster Coefficient $= 1$ ist (ich nenne diese Gleichung die Classengleichung *erster Stufe*), ferner aber, dass $j_{\alpha+\beta}$ im Rationalitätsbereich $\sqrt{-\nabla}$ von j_α rational abhängt, und zwar vermöge einer Substitution: $j_{\alpha+\beta} = R_\beta(j_\alpha, \sqrt{-\nabla})$, die nur vom Index β bedingt ist.

In dieser Angabe liegt bereits, dass für unsere Wurzeln j_α $R_\beta R_\gamma = R_\gamma R_\beta$ ist, dass also die Classengleichung nach Adjunction von $\sqrt{-\nabla}$ eine Abel'sche Gleichung ist. Ich gehe auf die betreffenden Ausführungen meiner Vorlesung hier darum nicht genauer ein, weil die Gliederung des Gedankenganges schliesslich dieselbe ist, welche Hr. Weber in den bez. Theilen seiner elliptischen Functionen eingehalten hat. In der That liegt der Fortschritt meiner Darstellung (sofern ein solcher überhaupt zugestanden wird) nicht in diesen weiteren Ausführungen, sondern in der Einfachheit, mit der sich die vorangeführten grundlegenden Sätze ergeben, in der Evidenz, mit der sie sozusagen von selbst aus der Normalfigur hervorspriessen. —

Im Uebrigen aber wende ich mich zu neuen Entwickelungen. In der That ist nach dem Ideengange, welcher den „Mod" zu Grunde liegt, die Fragestellung nach der Natur der singulären elliptischen Gebilde mit den vorstehenden Angaben über die singulären j noch keineswegs erschöpft, vielmehr wird es gelten, nunmehr entsprechende Ueberlegungen für die Moduln *höherer Stufe* durchzuführen. Ansätze hierzu liegen in der Literatur bereits verschiedentlich vor. Beispielsweise betrachtet Hr. Weber in seinem Werke neben den singulären j gelegentlich die zugehörigen $\sqrt[3]{j}$ und ganz besonders die $\sqrt[12]{kk'}$. Andererseits haben Gierster und Hurwitz eine Seite der Frage längst allgemein bearbeitet, indem sie die *Classenzahlrelationen höherer Stufe* aufstellten; man vergl. die entsprechenden Entwickelungen der „Mod." Es wird gelten, allgemein eine Theorie der *Classengleichungen höherer Stufe* zu entwerfen. Zu dem Zwecke habe ich in meiner Vorlesung das Beispiel der Ikosaedergleichung behandelt, und wenn ich auch bei der Kürze der Zeit selbst diesen besonderen Gegenstand nur nach seinen Umrissen habe bezeichnen können, so meine ich doch damit die ganze Fragestellung soweit zugänglich gemacht zu haben, dass die weitere Behandlung nur mehr Sache der Einzelausführung ist. Die Grundlage für die Behandlung der Ikosaederirrationalität bilden natürlich die früheren Untersuchungen über die Modulargleichungen des Ikosaeders und die sich aus ihnen ergebenden Classenzahlrelationen der fünften Stufe. Man findet diese Dinge in den Capiteln 4 und 6 des vierten Abschnitts der „Mod." mit aller Ausführlichkeit auseinandergesetzt. Inzwischen ist es im Interesse der allgemeinen Verständlichkeit der von mir zu machenden Angaben vielleicht nützlich, wenn ich hierauf nicht weiter recurrire, sondern den Thatbestand in knappen Sätzen meiner Darstellung mit einfüge. Ich gliedere meine Darlegung in eine Reihe einzelner Nummern:

1) Der Transformationsgrad n werde der Einfachheit halber (um nicht zu viele Fälle immer neben einander betrachten zu müssen) $\neq 0 \pmod 5$ genommen. Die Congruenz $ad - bc \equiv n \pmod 5$ hat

dann, — sofern wir gemeinsame Vorzeichenwechsel der a, b, c, d als irrelevant ansehen —, 60 verschiedene Lösungssysteme. Es giebt, sagen wir, modulo 5 betrachtet, 60 verschiedene *Schemata* für Transformation n^{ter} Ordnung $\omega' = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}$. Das einzelne dieser Schemata bezeichnen wir in der Folge mit $\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix}$. Uebrigens betrachten wir nur „eigentliche" Transformation, schliessen also aus, dass die a, b, c, d einen Factor gemein haben.

2) Wir betrachten nun die Ikosaederirrationalität $\xi(\omega)$. Während $j(\omega)$ mit allen durch Transformation n^{ter} Ordnung hervorgehenden Werthen $j\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}\right)$ durch dieselbe Transformationsgleichung verbunden ist, bekommen wir hier je nach dem *Schema*, welches wir für die Transformation n^{ter} Ordnung auswählen, 60 verschiedene derartige Transformationsgleichungen, die wir in folgender Weise bezeichnen:

$$f_{\left|\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right|}(\xi', \xi) = 0.$$

3) Das einfachste Schema ist natürlich $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix}$. Die zugehörige Transformationsgleichung (auf deren Aufstellung ich hier nicht weiter eingehe) hat rationale Zahlencoefficienten. Aus ihr entstehen die 59 anderen Gleichungen, indem man auf ξ' (oder auch auf ξ) die Ikosaedersubstitutionen anwendet. Da die Ikosaedersubstitutionen die Irrationalität $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ enthalten, so werden die Coefficienten der 59 Gleichungen allgemein zu reden erst im Körper ε rational sein.

4) Es gilt nun vor allen Dingen diese 60 Transformationsgleichungen in *Kategorieen gleichberechtigter Gleichungen* zusammenzufassen. Wir nennen zwei Transformationsgleichungen gleichberechtigt, wenn sie auseinander hervorgehen, indem man auf ξ' und ξ *dieselbe* Ikosaedersubstitution (cogrediente Ikosaedersubstitutionen) ausübt. Es ist klar, dass zwei gleichberechtigte Gleichungen für die folgenden Entwickelungen gleichwerthig sind, so dass es genügt, aus jeder Kategorie gleichberechtigter Gleichungen immer nur eine zu betrachten. Man wird allgemein zu reden diejenige wählen, welche die einfachsten Zahlencoefficienten darbietet.

5) Die hiermit postulirte Einteilung unserer Gleichungen steht in engster Beziehung zu derjenigen Zahl g, welche Gierster das *Gewicht* der einzelnen Gleichung genannt hat. Das Gewicht g ist die Zahl derjenigen cogredienten Substitutionen von ξ' und ξ, durch welche $f = 0$ in sich übergeht. Ersichtlich ist die Anzahl der Gleichungen, welche mit einer gegebenen Gleichung gleichberechtigt sind, $= \frac{60}{g}$.

6) Diese Zahl g bestimmt sich nun für jedes Schema $\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix}$ als Anzahl der modulo 5 unterschiedenen unimodularen Substitutionen $\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$, welche der Congruenz genügen:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix} \pmod 5.$$

7. Die Specialdiscussion dieser Congruenzen ergiebt für g die folgenden Tabellen:

$n \equiv 1 \pmod 5$

Bezeichnung der Schemata	Anzahl der Schemata	Gewicht g
$\pm\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	1	60
Andere Schemata mit		
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	24	5
$a_0 + d_0 \equiv 0$	15	4
$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	20	3

$n \equiv 4 \pmod 5$

Schemata	Anzahl	g
$\pm\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$	1	60
Andere Schemata mit		
$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	24	5
$a_0 + d_0 \equiv 0$	15	4
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	20	3

$n \equiv 2 \pmod 5$

Schemata	Anzahl	g
$a_0 + d_0 \equiv 0$	10	6
$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	20	3
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	30	2

$n \equiv 3 \pmod 5$

Schemata	Anzahl	g
$a_0 + d_0 \equiv 0$	10	6
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	20	3
$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	30	2

8. Da die Anzahl der gleichberechtigten Gleichungen jedesmal $\frac{60}{g}$ beträgt, schliessen wir aus den vorstehenden Tabellen:

Bei $n \equiv 2, 3 \pmod 5$ sind jedesmal diejenigen Schemata gleichberechtigt, welche dieselbe Summe $\pm(a_0 + d_0)$ darbieten.

Das Gleiche gilt bei $n \equiv 1$ für $(a_0 + d_0) \equiv 0, \pm 1$, ebenso bei $n \equiv 4$ für $(a_0 + d_0) \equiv 0, \pm 2$.

Dagegen zerfallen bei $n \equiv 1$ die Schemata mit $(a_0 + d_0) \equiv \pm 2$ und bei $n \equiv 4$ die Schemata mit $(a_0 + d_0) \equiv \pm 1$ in drei getrennte Kategorieen gleichberechtigter. Es giebt jedesmal ein für sich stehendes Schema vom Gewicht 60. Die übrig bleibenden 24 Schemata vom Gewicht 5 zerlegen sich noch in 2 Kategorieen je von 12 gleichberechtigten Schematen. Diese 2 Kategorieen werden weiter unten noch näher charakterisirt werden.

9. Die Zahl g bezeichnet nach ihrer Entstehung je eine Untergruppe der Ikosaedergruppe. Vermöge derselben werden die Punkte der ξ-Kugel allgemein zu reden zu je g zusammengeordnet. Diese g Punkte können nur dann ganz oder zum Theil zusammenfallen, wenn es sich um die Ecken des Ikosaeders, oder die Mitten seiner Seitenflächen, oder seine Kantenhalbirungspunkte handelt.

10. Jetzt können wir in mannigfacher Weise eine rationale Function g^{ten} Grades, r_g, bilden, welche bei den Substitutionen unserer Untergruppe ungeändert bleibt. *Dieses r_g kann immer so ausgesucht werden,* — und dies werden wir im Folgenden voraussetzen, — *dass es in seinen Coefficienten keine andere Irrationalität enthält, als höchstens ε.* Wir denken uns r_g bei jeder Kategorie gleichberechtigter Gruppen für eine Gruppe möglichst einfach gewählt und bringen dann bei den gleichberechtigten Gruppen diejenigen r in Anwendung, die sich aus diesem einen durch die Ikosaedersubstitutionen ergeben. Die Gleichung $r_g = \text{Const.}$ liefert uns, je nach dem Werthe der rechter Hand stehenden Constante, die Gruppen von jedesmal g zusammengehörigen Punkten der Kugel; sie hat also nur dann möglicherweise vielfache Wurzeln, wenn es sich um die vorhin bezeichneten besonderen Punkte handelt. Alle anderen rationalen Functionen von ξ, welche bei unserer Untergruppe ungeändert bleiben, — insbesondere die rationale Function 60^{ten} Grades j —, sind rationale Functionen von r_g. Ist $g = 60$, so nehmen wir r_g einfach $= j$.

11. Jetzt setzen wir in $f_{\left|\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right|}(\xi', \xi) = 0 \qquad \xi' = \xi$ und fragen nach der Natur der entstehenden Gleichung. Eine Anzahl ihrer Wurzeln fällt möglicherweise in die Ecken oder die Seitenmitten oder die Kantenmitten des Ikosaeders. Diese werden wir (innerhalb des Bereiches ε) allemal rational abtrennen können. Wir nehmen an, dass dieses geschehen sei und untersuchen die übrigbleibende Gleichung, die wir zwecks äusserer Kennzeichnung in eckige Klammern schliessen wollen:

$$\left[f_{\left|\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right|}(\xi, \xi) \right] = 0.$$

Von ihren Wurzeln gehören jedesmal g vermöge unserer Untergruppe zusammen, und diese g Wurzeln sind unter sich alle verschieden. Wir

schliessen, dass unsere Gleichung in Wirklichkeit eine solche für r_g ist. Wir schreiben dieselbe

$$\Psi_{\left|\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right|}(r_g) = 0.$$

Die Coefficienten von Ψ sind jedenfalls nach Adjunction von ε rational. Uebrigens aber sind gleichberechtigte Ψ nur durch ihr r_g verschieden; sie fallen, wenn man hiervon absieht, geradezu zusammen.

12. Die Wurzeln der Gleichung $\Psi = 0$ lassen sich nun in übersichtlicher Weise durch die zugehörigen Werthe von ω bezeichnen.

Wir werden zunächst verabreden, dass wir das zu irgend einem ξ gehörige ω allemal *reducirt* nehmen, d. h. innerhalb des aus 60 Elementarbereichen der ω-Ebene zur Hauptcongruenzgruppe fünfter Stufe gehörigen Ikosaederpolygons. Da wir die besonderen Werthe von ξ, welche den Ikosaederecken etc. entsprechen, bereits entfernt haben, werden wir des ferneren nur solche Punkte ω zu betrachten haben, welche erstens im *Inneren* der Halbebene liegen, und zweitens weder mit $\varrho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ noch mit $i = \sqrt{-1}$ im elementaren Sinne äquivalent sind.

Da gilt nun: ein Werth ξ wird ebenso oft Wurzel der Gleichung $[f(\xi, \xi)] = 0$ sein, als das entsprechende ω bei Transformationen n^{ter} Ordnung des vorgelegten Schema's ungeändert bleibt. Und ferner: jedesmal g Werthe ξ (oder auch ω) zusammen ergeben *eine* Wurzel r_g von $\Psi = 0$.

13. Sei jetzt in Uebereinstimmung hiermit:

$$\omega = \frac{a\omega + b}{c\omega + d},$$

wo $(ad - bc) = n$ und $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \equiv \pm \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix} \pmod 5$.

Wir haben dann

$$c\omega^2 + (d - a)\omega - b = 0$$

oder, wie wir abkürzend schreiben:

$$P\omega^2 + Q\omega + R = 0.$$

Hier sind die ganzen Zahlen P, Q, R (die gern einen Factor gemein haben können, den wir dann aber zweckmässigerweise *nicht* wegheben) an die Congruenzen gebunden:

$$P \equiv \pm c_0, \quad Q \equiv \pm (d_0 - a_0), \quad R \equiv \mp b_0 \pmod 5.$$

Wir setzen noch der Kürze halber

$$a + d = t,$$

worauf natürlich t der Congruenz unterliegt:

$$t \equiv \pm (d_0 + a_0) \pmod 5.$$

Als Werth der negativ genommenen Discriminante der für ω geltenden quadratischen Gleichung ergiebt sich jetzt:

$$4PR - Q^2 = \nabla = 4n - t^2.$$

Auf solche Weise finden wir: Um alle in Betracht kommenden Werthe von ω zu erhalten, suche man zunächst alle positiven Werthe von ∇, die in der Gestalt $4n - t^2$ enthalten sind, wo $t \equiv \pm (d_0 + a_0) \pmod 5$. Ferner bestimme man innerhalb des Ikosaederbereiches der ω-Ebene die Nullstellen aller solcher primitiver oder imprimitiver Gleichungen $P\omega^2 + Q\omega + R = 0$, deren Discriminante $= -\nabla$ ist und die ausserdem den für die P, Q, R aufgestellten Congruenzbedingungen genügen. Von diesen Nullstellen schliesse man noch diejenigen aus, deren P, Q, R mit t einen gemeinsamen Theiler haben, — denn sie würden auf uneigentliche Transformationen n^{ter} Ordnung führen. — Ferner schliesse man diejenigen aus, die mit ϱ oder i im elementaren Sinne äquivalent sind. *Die übrigen ω geben jeweils mit der richtigen Multiplicität die einzelnen Wurzeln der Gleichung $[f] = 0$, und, da sie zu g zusammengehören, der Gleichung $\Psi(r_g) = 0$.*

14. Es kommt nun darauf an, für jeden Werth von ∇ die Zahl der hiermit bezeichneten ω-Werthe abzuzählen. Es möge H die Classenzahl der zu $(-\nabla)$ gehörigen primitiven und imprimitiven Classen quadratischer Formen sein. Von ihnen kommen wegen der gerade formulirten Nebenbedingungen gewisse in Wegfall; ich bezeichne die Zahl der übrig bleibenden Classen mit H'. Dieses H' baut sich in einfacher Weise aus den Anzahlen h der primitiven Classen auf, die zu solchen Discriminanten gehören, die aus $(-\nabla)$ durch Abtrennung eines quadratischen Theilers entstehen. Ich schreibe in diesem Sinne

$$H' = \sum h\left(\frac{\nabla}{\tau^2}\right),$$

wobei ich die in den früheren Angaben enthaltenen näheren Bedingungen für die Summation nicht noch besonders zufüge. Zu jeder der H' Classen gehören nun innerhalb des Ikosaederbereiches der ω-Ebene 60 Nullpunkte. Unter ihnen müssen wir diejenigen insbesondere aussuchen, welche den für P, Q, R aufgestellten Congruenzbedingungen genügen. Wir wissen bereits, dass sich die auszuwählenden Punkte in Serien von je g zusammengruppiren. Die nähere Untersuchung ergiebt nun, dass sich bei $n \equiv 2, 3 \pmod 5$ innerhalb der zur einzelnen Classe quadratischer Formen gehörigen 60 Nullpunkte immer gerade *eine* Serie von g Punkten befindet, die die Congruenzbedingungen befriedigt. *Das giebt also $g\Sigma H'(4n - t^2)$ Nullpunkte* (wobei t nur Werthe $\equiv \pm (a_0 + d_0) \pmod 5$ zu durchlaufen hat). Dieselbe Formel gilt bei $n \equiv 1 \pmod 5$ für $a_0 + d_0 \equiv 0, \pm 1$, und bei $n \equiv 4 \pmod 5$ für $a_0 + d_0 \equiv 0, \pm 2$. Dagegen ist für

$n \equiv 1$ und $a_0 + d_0 \equiv \pm 2$ und ebenso für $n \equiv 4$ und $a_0 + d_0 \equiv \pm 1$ eine Fallunterscheidung einzuführen.

Haben wir für $n \equiv 1$ das Schema $\pm \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\left\{\text{bez. für } n \equiv 4 \text{ das Schema } \pm \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\right\}$, so erweisen sich vermöge unserer Congruenz P, Q, R durch 5 theilbar; es sind also nur solche Formen in Betracht zu ziehen, welche den Theiler 5 haben, diese aber auch (sofern nicht die ganze Classe wegen der Nebenbedingungen in Wegfall kommt) alle. *Die Zahl der Nullpunkte wird hiernach, in Uebereinstimmung mit dem Werthe* $g = 60$, *in leicht verständlicher Abkürzung*

$$60 \sum H'\left(\frac{4n - t^2}{25}\right).$$

Die Zahl t *durchläuft dabei nur solche Werthe, welche* $\equiv \pm 2$ (*oder, im Falle* $n \equiv 4$, $\equiv \pm 1$) *modulo* 5 *sind.*

Für die anderen 24 Schemata aber tritt noch folgende Trennung ein. Man bemerke, dass $\nabla = 4n - t^2$ bei ihnen allemal durch 5 theilbar ist. Daher vermag nach der Theorie der *Gattungen* (die übrigens in dieser Vorlesung nicht weiter entwickelt wird), nur die Hälfte der jedesmaligen H' Classen *Reste* modulo 5 darzustellen, die andere Hälfte, und nur sie, giebt *Nichtreste*. Je nachdem die Zahlen b_0, c_0 in dem gerade ausgewählten Schema Reste oder Nichtreste modulo 5 sind, wird nur die eine Hälfte der Classen vermöge unserer Congruenzbedingungen brauchbare Nullpunkte liefern oder nur die andere*). Im ersteren Falle erhalten wir jedesmal g Nullpunkte. *Die Gesammtzahl der Nullstellen ist also* $g \cdot \sum \frac{H'(4n - t^2)}{2}$, *wo* $t \equiv \pm 2$ *oder* $\equiv \pm 1$ (*mod.* 5) *zu nehmen ist, jenachdem der Fall* $n \equiv 1$ *oder* $n \equiv 4$ *vorliegt.*

16. Diese Anzahlen sind alle bereits s. Z. von Gierster bestimmt worden, der von ihnen aus zu den Classenzahlrelationen 5ter Stufe gelangt ist, wie man des Näheren in den „Mod." nachlesen mag. Sie geben zugleich die Zahl der Wurzeln von $[f(\xi, \xi)] = 0$ und, durch g dividirt, die Zahl der Wurzeln von $\Psi(r_g) = 0$. Aber sie geben nicht nur die Zahl dieser Wurzeln, sondern auch deren Bedeutung im einzelnen, sie lassen also die *Structur* der Gleichung $[f(\xi, \xi)] = 0$ bez. $\Psi(r_g) = 0$ erkennen.

Man bezeichne als *die zu einem Schema* $\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix}$ *gehörige Classengleichung fünfter Stufe der Discriminante* $(-\nabla)$ diejenige Gleichung

*) Hierin also liegt die oben noch nicht angegebene Unterscheidung der beiden Kategorieen, in die sich unsere vorliegenden Schemata theilen.

vom Grade h, welcher die zu den betreffenden primitiven Classen gehörigen Werthe des r_ϱ genügen. Ich schreibe diese Gleichung:

$$\chi_P(r_\varrho) = 0.$$

In den besonderen Fällen, wo nur die Hälfte der existirenden Classen in Betracht kommen, construire ich mir entsprechend *Halbklassengleichungen;* ich will in dem Falle dem Buchstaben χ zur Unterscheidung einen horizontalen Strich zusetzen:

$$\bar{\chi}_P(r_\varrho) = 0.$$

Endlich setze ich aus diesen χ ebenso grössere Aggregate X' zusammen, wie sich die H' aus den h aufbauen:

$$X'_P(r_\varrho) = \Pi \underset{\varepsilon^2}{\chi_P}(r_\varrho).$$

Eventuell ist hier beiderseits ein horizontaler Strich zuzufügen. Wir erhalten dann den Formeln von Nr. 14 entsprechend folgende Decomposition des jedesmaligen $\Psi(r_\varrho)$:

1) bei $n \equiv 2, 3 \pmod 5$, sowie bei $n \equiv 1$ für die Schemata $a_0 + d_0 \equiv 0, \pm 1$ und bei $n \equiv 4$ für die Schemata $a_0 + d_0 \equiv 0, \pm 2$:

$$\Psi(r_\varrho) = \Pi X'_{4n-t^2}(r_\varrho); \qquad t \equiv \pm (a_0 + d_0);$$

2) bei $n \equiv 1, 4$ im Falle jeweils des ausgezeichneten Schemas:

$$\Psi(r_\varrho) = \Pi \underset{25}{X'_{4n-t^2}}(r_\varrho); \qquad t \equiv \pm 2 \text{ resp. } \equiv \pm 1;$$

(man erinnere sich, dass r_ϱ hier einfach $= j$ ist);

3) bei $n \equiv 1, 4$ für die anderen Schemata $a_0 + d_0 \equiv \pm 2$, resp. $a_0 + d_0 \equiv \pm 1$:

$$\Psi(r_\varrho) = \Pi \bar{X}'_{4n-t^2}(r_\varrho); \qquad t \equiv \pm 2 \text{ resp. } \equiv \pm 1.$$

16. Es hat nun keine Schwierigkeit, unsere Ψ in rationaler Weise in die einzelnen X' und fernerhin in die einzelnen χ zu spalten. Es genügt in dieser Hinsicht zu bemerken, dass die singulären j den Classengleichungen erster Stufe genügen und dass sich j jedesmal rational durch die in Betracht kommende r_ϱ darstellt. *Wir erfahren so, dass unsere Gleichungen:*

$$\chi_P(r_\varrho) = 0, \quad \text{bez.} \quad \bar{\chi}_P(r_\varrho) = 0,$$

die ich nunmehr als Classengleichungen, bez. Halbclassengleichungen der fünften Stufe bezeichne, rationale Zahlencoefficienten haben. „Rational" ist dabei natürlich (sofern die Specialuntersuchung der einzelnen Fälle es nicht als überflüssig erscheinen lässt) dahin zu verstehen, dass ε als adjungirt gilt. Die Auflösung der Classengleichung erster Stufe zieht natürlich die Auflösung unserer Classengleichungen fünfter Stufe unmittelbar nach sich. Wir können daher auch so sagen: *Man*

betrachte die Darstellung von j als rationale Function $\left(\frac{60}{g}\right)^{\text{ten}}$ Grades von r_g als eine algebraische Gleichung für r_g. Diese Gleichungen, welche sich kurzweg als Resolventen der Ikosaedergleichung bezeichnen lassen, haben bei gegebenem singulären Werthe von j nach Adjunction von ε eine rationale Wurzel.

17. Bis zu diesem Punkte habe ich die Untersuchung der singulären Werthe der Ikosaederirrationalität in meiner Vorlesung gefördert. Wenn ich dieselbe in der vorliegenden unabgeschlossenen Form der Oeffentlichkeit übergebe, so geschieht es, weil ich kaum hoffen darf, in absehbarer Zeit selbst zu diesen Fragestellungen zurückzukehren, und weil eben nun von verschiedenen Seiten den Classengleichungen eine erhöhte Aufmerksamkeit zugewandt wird.

Borkum, den 13. August 1896.

Ueber das gemischte Product.

Von

Emil Müller in Königsberg i./Pr.

Wohl jeder, der sich mit der Anwendung der Ausdehnungslehre beschäftigt hat, wird den Mangel an Umformungsgesetzen für das sogenannte *gemischte Product* empfunden haben. Grassmann giebt zwar die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür an, wann ein gemischtes Product $[ABC]$ dreier einfacher Grössen null wird (A_2*), Nr. 122) oder wann die beiden Producte $[ABC]$ und $[ACB]$ congruent werden (A_2, Nr. 124), ja der wichtige Satz A_2, Nr. 113 lehrt auch, wie man ein Product $[A\,.\,BC]$, in welchem B und C durch äussere, A und $[BC]$ durch eingewandte Multiplication verbunden sind, durch die multiplicativen Combinationen der einfachen Factoren von $[BC]$ ausdrücken kann. Für viele Betrachtungen ist aber diese Zerlegung eine unnöthig weitgehende und oft die Kenntniss derjenigen Fälle erwünscht, in denen sich das Product $[A\,.\,BC]$ durch $[ABC]$ und $[ACB]$ ausdrücken lässt. Die Aufsuchung dieser Fälle und die Aufstellung der entsprechenden Gleichungen ist der Zweck der nachfolgenden Zeilen.

Nach A_2, Nr. 116 ist das auf ein Hauptgebiet n-ter Stufe bezügliche Product $[A\,.\,BC]$ der drei einfachen Grössen A, B, C mit den Stufenzahlen q, r, s, die hier als von Null und n verschieden angenommen werden sollen, dann und nur dann ein *gemischtes*, wenn die Gleichung

$$(1) \qquad q + r + s = n + t$$

für $t \gtrless \begin{matrix} 0 \\ n \end{matrix}$ besteht. Die Zahl t giebt die Stufenzahl nicht nur des Productes $[A\,.\,BC]$, sondern auch der Producte $[ACB]$ und $[ABC]$

---

*) Mit A_2 soll die Ausdehnungslehre vom Jahre 1862 bezeichnet werden. Dieselbe bildet den zweiten Theil des ersten Bandes der von Friedrich Engel herausgegebenen Gesammelten Werke Hermann Grassmann's, Leipzig 1896.

an, welche drei Producte im allgemeinen verschiedene, in keiner Zahlbeziehung stehende Grössen darstellen werden.

Um diejenigen Fälle herauszufinden, in denen zwischen diesen drei gleichstufigen Grössen eine Zahlbeziehung besteht, machen wir zuerst die Annahme, dass $[BC]$ ein *progressives* Product sei. Nach dem Begriffe des gemischten Productes ist dann in $[A \,.\, BC]$ A mit $[BC]$ durch regressive Multiplication verbunden. Bezeichnen nun $b_1, b_2, \ldots, b_r$ bzw. $c_1, c_2, \ldots, c_s$ die einfachen Factoren von B bzw. C, so lässt sich

$$[A \,.\, BC] = [A \,.\, b_1 b_2 \ldots b_r c_1 c_2 \ldots c_s]$$

nach A_2, Nr. 113 als Vielfachensumme der $\binom{r+s}{t}$ multiplicativen Combinationen $P_1, P_2, \ldots$ von $b_1, b_2, \ldots, b_r, c_1, c_2, \ldots, c_s$ zur t-ten Classe darstellen. Bezeichnet ferner Q_i das Product der $r+s-t$ nicht in P_i vorkommenden Factoren, und zwar diese so geordnet, dass

$$[P_i Q_i] = [b_1 b_2 \ldots b_r c_1 c_2 \ldots c_s]$$

ist, so besteht nach jenem Satze die Gleichung

$$[A \,.\, BC] = \sum_1^{\binom{r+s}{t}} [A Q_i] \, P_i. \tag{2}$$

Bei der Untersuchung, wann sich die rechte Seite dieser Gleichung als Vielfachensumme von $[ACB]$ und $[ABC]$ darstellen lässt, unterscheiden wir die folgenden vier möglichen Fälle:

1. $[AC]$ *und* $[AB]$ *sind progressive Producte.*

Da dann $[AC \,.\, B]$ und $[AB \,.\, C]$ regressive Producte sind, so lassen sie sich, wieder nach A_2, Nr. 113, als Vielfachensummen der multiplicativen Combinationen der Factoren $b_1, b_2, \ldots, b_r$ bzw. $c_1, c_2, \ldots, c_s$ zur t-ten Classe darstellen. Soll sich demnach $\Sigma[AQ_i] \, P_i$ als Vielfachensumme von $[ACB]$ und $[ABC]$ ausdrücken lassen, so dürfen unter den multiplicativen Combinationen P_i der Grössen $b_1, b_2, \ldots, b_r$, $c_1, c_2, \ldots, c_s$ keine vorkommen, die sowohl Factoren b als c enthalten. Das ist nur für $t = 1$ der Fall.

Umgekehrt folgt aus $t = 1$ zufolge Gleichung (1)

$$q + s = n + 1 - r,$$
$$q + r = n + 1 - s$$

oder, weil r und s mindestens gleich 1 sind,

$$q + s \leqq n,$$
$$q + r \leqq n,$$

d. h. dass die Producte $[AC]$ und $[AB]$ *progressiv* sind.

Um nun zu zeigen, dass für $t = 1$ die behauptete Umformung auch stets möglich ist, bezeichnen wir mit B_i das Product aller Factoren b mit Ausnahme von b_i, und zwar die Factoren in solcher Reihenfolge genommen, dass

$$[b_i B_i] = B$$

ist, und analog mit C_k das Product aller Factoren c mit Ausnahme von c_k, und zwar die Factoren in solcher Reihenfolge genommen, dass

$$[c_k C_k] = C$$

ist. Dann erhält man zufolge A_2, Nr. 113

$$[A \,.\, b_1 b_2 \ldots b_r c_1 c_2 \ldots c_s] = [A \,.\, b_i B_i c_k C_k] =$$

$$= \sum_1^r {}^i [A B_i c_k C_k]\, b_i + (-1)^{rs} \sum_1^s {}^k [A C_k b_i B_i]\, c_k.$$

Setzt man im ersten Ausdrucke rechts wieder

$$[c_k C_k] = C$$

und vertauscht diesen Factor mit B_i, setzt dann im zweiten Ausdruck

$$[b_i B_i] = B$$

und vertauscht ihn mit C_k, so hat man, nach Vornahme der entsprechenden Zeichenwechsel,

$$[A \,.\, BC] = (-1)^{s(r-1)} \sum_1^r {}^i [ACB_i]\, b_i + (-1)^r \sum_1^s {}^k [ABC_k]\, c_k$$

oder

$$[A \,.\, BC] = (-1)^{s(r-1)} [ACB] + (-1)^r [ABC]. \tag{1}$$

2. *$[AB]$ ist ein progressives, $[AC]$ ein regressives Product.*

Da dann $[AB \,.\, C]$ ein regressives Product ist, so lässt es sich wieder als Vielfachensumme der multiplicativen Combinationen t-ter Classe von $c_1, c_2, \ldots, c_s$ darstellen, während $[AC \,.\, B]$ als progressives Product von $[AC]$ mit B sich als Vielfachensumme von Producten darstellen lässt, die alle, ausser Factoren c, noch B als Factor enthalten. In Gleichung (2) dürfen die Grössen P_i demnach entweder *keinen* Factor b oder müssen *alle* Factoren b enthalten. Sollen sich aber unter t der Factoren $b_1, b_2, \ldots, b_r, c_1, c_2, \ldots, c_s$, wobei, da $[AC]$ als regressives Product angenommen wurde, $s > t$ ist, kein Factor b oder alle Factoren b befinden, so muss $r = 1$ sein.

Umgekehrt folgt aus der Annahme $r = 1$, $t > 1$, dass $[AB]$ wegen $q < n$ ein progressives Product und $[AC]$ wegen

$$q + s = n + t - 1$$

also

$$q + s > n$$

ein regressives Product sein muss.

Um jetzt zu zeigen, dass für $r = 1$ die behauptete Umformung ebenfalls stets möglich ist, bezeichnen wir mit C_i bzw. C_i' die multiplicativen Combinationen der Factoren $c_1, c_2, \ldots, c_s$ zur $(t-1)$-ten bzw. t-ten Classe, ferner mit C_k, C_k' deren ergänzende Combinationen, so dass also

$$C = [C_i C_k] = [C_i' C_k']$$

ist. Dann erhält man wieder zufolge A_2, Nr. 113

$$[A \,.\, Bc_1 c_2 \ldots c_s] = \sum_1^{\binom{s}{t-1}} [AC_k][BC_i] + (-1)^t \sum_1^{\binom{s}{t}} [A \,.\, BC_k']\, C_i'$$

$$= (-1)^{t-1} \sum_1^{\binom{s}{t-1}} [AC_k][C_i B] + (-1)^t \sum_1^{\binom{s}{t}} [AB \,.\, C_k']\, C_i'$$

$$= (-1)^{t-1} [ACB] + (-1)^t [ABC]$$

oder

$$\text{(II)} \qquad [A \,.\, BC] = (-1)^{t-1} \{[ACB] - [ABC]\}.$$

3. $[AB]$ *ist ein regressives,* $[AC]$ *ein progressives Product.*

Wegen

$$[A \,.\, BC] = (-1)^{rs} [A \,.\, CB]$$

ist dieser Fall auf den vorhergehenden zurückgeführt. Unsere Umformung ist also dann und nur dann möglich, wenn $s = 1$ ist. Zufolge Gleichung (II) hat man

$$[A \,.\, CB] = (-1)^{t-1} \{[ABC] - [ACB]\},$$

mithin wegen $s = 1$

$$[A \,.\, BC] = (-1)^{r+t-1} \{[ABC] - [ACB]\}$$

oder

$$\text{(III)} \qquad [A \,.\, BC] = (-1)^{r+t} \{[ACB] - [ABC]\}.$$

4. $[AC]$ *und* $[AB]$ *sind regressive Producte.*

Da dann $[AC \,.\, B]$ und $[AB \,.\, C]$ progressive Producte sind, so enthalten sie, wenn man sich $[AC]$ und $[AB]$ nach A_2, Nr. 113 entwickelt denkt, alle Factoren b bzw. alle Factoren c. Soll unsere Umformung möglich sein, so müssen demnach die Grössen P_i in

Gleichung (2) ebenfalls entweder alle Factoren b oder alle Factoren c enthalten, die Grössen Q_i dürfen also entweder *nur* Factoren c oder *nur* Factoren b enthalten. Dies ist dann und nur dann möglich, wenn Q_i die Stufenzahl 1 besitzt oder, da die Stufenzahl von Q_i nach Obigem $n - q$ sein soll, wenn $q = n - 1$ ist.

Umgekehrt folgt aus $q = n - 1$, wenn man die früher behandelten Fälle $r = 1$ oder $s = 1$ ausschliesst, dass $[AB]$ und $[AC]$ regressive Producte sein müssen.

Setzen wir in analoger Bedeutung wie früher

$$B = [B_i b_i], \qquad C = [C_k c_k],$$

dann folgt, wieder nach A_2, Nr. 113,

$$[A \,.\, b_1 b_2 \ldots b_r c_1 c_2 \ldots c_s] =$$

$$= \sum_1^s [A c_k]\,[B C_k] + (-1)^{rs} \sum_1^r [A b_i]\,[C B_i]$$

$$= (-1)^{r(s-1)} \left[\left(\sum_1^s [A c_k]\, C_k \right) B \right]$$

$$+ (-1)^{rs+s(r-1)} \left[\left(\sum_1^r [A b_i]\, B_i \right) C \right]$$

$$= (-1)^{r(s-1)}\,[ACB] + (-1)^s\,[ABC]$$

oder

$$\text{(IV)} \qquad [A \,.\, BC] = (-1)^{r(s-1)}\,[ACB] + (-1)^s\,[ABC].$$

Dies sind die vier möglichen Fälle der Umformung, wenn $[BC]$ ein *progressives* Product ist.

Ist $|BC]$ ein regressives Product, so ist $[|B|C]$ bekanntlich ein progressives, und das Product $[|A.|B|C]$ lässt sich also in den obigen vier Fällen umformen. Nach dem Satze A_2, Nr. 101 folgt daraus aber sofort die Umformung für $[A \,.\, BC]$. Da $|A, |B, |C$ die Stufenzahlen $n - q$, $n - r$, $n - s$ besitzen, so ergeben sich die neuen Gleichungen einfach dadurch, dass man in den Gleichungen (I),.., (IV) statt der Zahlen q, r, s, t die Zahlen $n - q$, $n - r$, $n - s$, $n - t$ setzt.

Zur Uebersicht mögen die sämmtlichen 8 Fälle der Umformung zusammengestellt werden.

$[BC]$ *progressives Product.*

(I) $t = 1$ $\quad [A \,.\, BC] = (-1)^{(r-1)s}\,[ACB] + (-1)^r\,[ABC],$

(II) $r = 1$ $\quad [A \,.\, BC] = (-1)^{t-1}\{[ACB] - [ABC]\},$

(III) $s = 1$ $\quad [A \,.\, BC] = (-1)^{r+t}\{[ACB] - [ABC]\},$

(IV) $q = n - 1$ $\quad [A \,.\, BC] = (-1)^{r(s-1)}\,[ACB] + (-1)^s\,[ABC].$

[BC] regressives Product.

(I*) $t=n-1$ $[A.BC]=(-1)^{(n-r-1)(n-s)}[ACB]+(-1)^{n-r}[ABC]$,

(II*) $r=n-1$ $[A.BC]=(-1)^{n-t-1}\{[ACB]-[ABC]\}$,

(III*) $s=n-1$ $[A.BC]=(-1)^{r+t}\{[ACB]-[ABC]\}$,

(IV*) $q=1$ $[A.BC]=(-1)^{(n-r)(n-s-1)}[ACB]+(-1)^{n-s}[ABC]$.

Diese 8 Gleichungen gelten, wie man unmittelbar sieht, auch dann noch, wenn A keine einfache Grösse mehr ist.

Königsberg i./Pr., im September 1896.

Sur une formule fondamentale de Kronecker.

Par

J. Franel à Zurich.

On doit à Kronecker une formule extrêmement remarquable qui met en évidence le lien rattachant la théorie des formes binaires quadratiques à celle de la multiplication complexe des fonctions elliptiques. La démonstration de l'illustre auteur, exposée dans les Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin des années 1885 et 1889 est passablement longue et compliquée*).

M. M. Heinrich Weber et Mathias Lerch ont donné de cette formule des démonstrations plus simples et basées sur d'autres principes, dans le cas où les coefficients de la forme quadratique sont des quantités réelles, le premier dans ce journal tome XXXIII et dans son beau livre sur les fonctions elliptiques et les nombres algébriques**), le second dans un mémoire intitulé Sur un théorème de Kronecker***).

La démonstration qu'on va lire nous parait plus directe que celles qui ont été données jusqu'à présent; elle s'applique d'ailleurs quelque soit la nature des coefficients de la forme quadratique.

I.

Soient

$$a = a' + ia'', \quad b = b' + ib'', \quad c = c' + ic'',$$

trois quantités complexes telles que la partie réelle de l'expression $ax^2 + 2bxy + cy^2$, (x et y étant réels) soit une forme positive, ce qui s'exprime par les conditions

$$a' > 0, \quad c' > 0, \quad a'c' - b'^2 = D' > 0$$

dont la première est une conséquence des deux autres. On démontre facilement que, dans ces conditions, le déterminant

$$D = ac - b^2$$

*) Voir aussi la thèse de M. de Séguier: Sur deux formules fondamentales dans la théorie des formes quadratiques et de la multiplication complexe, d'après Kronecker, Gauthier-Villars et Fils.

**) Elliptische Functionen und algebraische Zahlen, Braunschweig, Vieweg.

***) Prag. Berichte 1893.

n'est jamais négatif, c'est-à-dire qu'il est ou bien imaginaire ou bien réel et positif. On pourra donc faire

$$D = |D| e^{i\varphi},$$

l'angle φ étant compris entre $-\pi$ et $+\pi$, les limites exceptées. Nous conviendrons de désigner par $\sqrt{D}$ la valeur principale de la racine carrée de D, celle dont l'argument est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ ou, ce qui revient au même, celle dont la partie réelle est positive.

Maintenant x et y désignant des quantités réelles quelconques et $s = \alpha + i\beta$ une variable imaginaire, faisons

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^s} = e^{-s\log(ax^2+2bxy+cy^2)},$$

où le logarithme a sa valeur principale dont la partie imaginaire est inférieure à $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue, et envisageons la fonction $F(s)$ définie par l'équation

$$F(s) = \sum{}' \varphi(m, n), \tag{1}$$

où la sommation s'étend à toutes les valeurs entières de m et de n, le seul système $m = 0$, $n = 0$ excepté, ce que nous indiquons, conformément à l'usage, en affectant le signe Σ d'un accent. La série dans le second membre converge absolument pour toutes les valeurs de s dont la partie réelle α, que nous désignerons aussi par $R(s)$ est > 1; elle définit pour ces valeurs là de la variable une branche uniforme de la fonction $F(s)$. On peut montrer d'ailleurs que $F(s)$ est uniforme dans tout le plan et n'admet à distance finie qu'un seul point singulier, à savoir le pôle simple $s = 1$. En effet on voit facilement que la partie réelle du quotient

$$\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\sqrt{D}} = a_0x^2 + 2b_0xy + c_0y^2, \quad (a_0c_0 - b_0^2 = 1)$$

est aussi une forme positive et la formule connue

$$\frac{\Gamma(s)}{g^s} = \Gamma(s)\, e^{-s\log g} = \int_0^\infty e^{-gx} \cdot x^{s-1}\, dx,$$

où la partie réelle de g est supposée positive et où $\log g$ a sa valeur principale nous donne immédiatement

$$\left(\frac{\sqrt{D}}{\pi}\right)^s \Gamma(s) \cdot F(s) = \int_0^\infty \psi(x) \cdot x^{s-1}\, dx,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\psi(x) = \sum{}' e^{-\pi(a_0m^2 + 2b_0mn + c_0n^2)x}.$$

Or des formules de transformation des fonctions ϑ résulte que la fonction

$$1 + \psi(x) = h(x)$$

satisfait à l'équation

$$h(x) = \frac{1}{x} h\left(\frac{1}{x}\right), \tag{2}$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{\sqrt{D}}{\pi}\right)^s \Gamma(s) \cdot F(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty \psi(x)\,(x^{s-1} + x^{-s})\,dx. \tag{3}$$

Le produit

$$s(s-1)\left(\frac{\sqrt{D}}{\pi}\right)^s \cdot \Gamma(s)\,F(s)$$

est donc une fanction transcendante entière de la variable s qui ne change pas lorsqu'on remplace s par $1 - s$.

Cette dernière propriété à été établie, croyons-nous, pour la première fois par M. Lerch*); elle est d'ailleurs contenue comme cas particulier dans une proposition encore inédite de M. A. Hurwitz, concernant toute une classe de fonctions analogues. Si l'on fait

$$s = \frac{1}{2} + it,$$

puis qu'on désigne le produit précédent par $\xi_2(t)$, il viendra, en tenant compte de la relation

$$h'(1) + \frac{1}{2} h(1) = 0,$$

qui est une conséquence de l'équation (2)

$$\xi_2(t) = 2\int_1^\infty \frac{d}{dx}\left(x^2 \cdot h'(x)\right) x^{-\frac{1}{2}} \cos(t \log x)\,dx.$$

De cette expression de la fonction $\xi_2(t)$**) et du théorème de M. Hadamard sur le genre des fonctions entières résulte que $\xi_2(t)$, considérée comme fonction de t^2, est du genre 0.

Le quotient $\frac{1}{\Gamma(s+1)}$ étant une fonction entière on voit, par la formule (3), qu'on aura pour $F(s)$ un développement de la forme

$$F(s) = \frac{\pi}{\sqrt{D}} \cdot \frac{1}{s-1} + A_0 + A_1(s-1) + \cdots \tag{4}$$

valable pour toutes les valeurs finies de s différentes de l'unité.

La formule de Kronecker consiste à exprimer le coefficient A_0 au-moyen des fonctions ϑ d'argument 0.

---

*) Studien auf dem Gebiete der Malmsten'schen Reihen etc. Rospravy II, n° 4 (en langue tchèque).

**) Voir Riemann. Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer geg. Grenze.

II.

La série $\Sigma' \varphi(m, n)$ étant absolument convergente pour $R(s) > 1$, si l'on fait pour un instant,

$$F_m(s) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{(am^2+2bmn+cn^2)^s}, \tag{5}$$

m étant un nombre entier différent de 0, puis

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^s},$$

et

$$F_0(s) = \frac{1}{c^s} \sum' \frac{1}{n^{2s}} = \frac{2}{c^s} \zeta(2s),$$

il viendra

$$F(s) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} F_m(s) = 2 \left[\frac{\zeta(2s)}{c^s} + \sum_{m=1}^{m=\infty} F_m(s) \right] \tag{6}$$

puisque évidemment $F_{-m}(s) = F_m(s)$.

Or la fonction $F_m(s)$ est définie par la formule (5) pour toutes les valeurs de s dont la partie réelle est $> \frac{1}{2}$; elle est développable, dans le voisinage de la valeur $s = 1$, en série de la forme

$$F_m(s) = c_0^{(m)} + c_1^{(m)}(s-1) + c_2^{(m)}(s-1)^2 + \cdots \tag{7}$$

et qui converge certainement à l'intérieur d'un cercle de rayon égal à $\frac{1}{2}$. Le coefficient $c_0^{(m)}$ a pour expression

$$c_0^{(m)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{am^2+2bmn+2n^2}. \tag{8}$$

De la formule (6), où le second membre ne converge que si $R(s) > 1$, nous allons déduire, en retranchant de chaque terme une quantité convenable, une équation nouvelle où le second membre converge dès que $R(s) > \frac{1}{2}$. A cet effet introduisons la fonction

$$\psi_m(s) = F_m(s) - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(am^2+2bmx+cx^2)^s} \tag{9}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{(am^2+2bmn+cn^2)^s} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(am^2+2bmx+cx^2)^s}.$$

On trouve, m étant supposé positif,

$$(10) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(am^2+2bmx+cx^2)^s} = \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right) c^{s-1}}{\Gamma(s) \cdot (\sqrt{D})^{2s-1} m^{2s-1}},$$

les puissances ayant toujours leurs valeurs principales, de sorte qu'il vient

$$(11) \quad F(s) - \frac{2\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)(\sqrt{D})^{2s-1}} c^{s-1} \zeta(2s-1) = 2\frac{\zeta(2s)}{c^s} + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} \psi_m(s),$$

et je dis que le second membre converge maintenant lorsque $R(s) > \frac{1}{2}$. Pour le voir faisons, pour un instant,

$$f(x) = E(x) - x + \frac{1}{2},$$

$E(x)$ désignant le plus grand nombre entier contenu dans la quantité x; nous conviendrons, quand x est compris entre les deux entiers consécutifs n et $n+1$, de prendre $E(x) = n$, même quand n est négatif. La fonction $f(x)$ est alors impaire.

On aura dans ces conditions

$$\psi_m(s) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{d}{dx}(am^2+2bmx+cx^2)^{-s} dx,^*)$$

comme on le vérifie tout de suite, le second membre étant égal à

$$-\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_n^{n+1} \left(n-x+\frac{1}{2}\right) \frac{d}{dx}(am^2+2bmx+cx^2)^{-s} dx,$$

c'est-à-dire égal à

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{(am^2+2bmn+cn^2)^s} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(am^2+2bmx+cx^2)^s}.$$

Or la valeur absolue de la fonction $f(x)$ ne surpassant pas $\frac{1}{2}$ on aura

$$|\psi_m(s)| < \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{s(2bm+2cx)}{(am^2+2bmx+cx^2)^{s+1}} \right| dx,$$

d'où l'on conclut facilement, en faisant $s = \alpha + i\beta$, (α et β réels) que le module de $\psi_m(s)$ est inférieur à $\frac{A}{m^{2\alpha}}$; A désignant une quantité

*) Voir dans ce journal tome 47 notre travail intitulé: Sur la formule sommatoire d'Euler.

quantité fixe, indépendante de m, que l'on peut choisir, par exemple, égale à

$$\frac{2|s|(c')^{\alpha-1}e^{\frac{\pi}{2}|\beta|}}{D'^{\alpha}}\left[|c|\int_0^{\infty}\frac{t\,dt}{(t^2+1)^{\alpha+1}}+\frac{|b'c''-c'b''|}{D'^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\infty}\frac{dt}{(t^2+1)^{\alpha+1}}\right].$$

La série

$$\sum_{m=1}^{m=\infty}\psi_m(s)$$

est donc absolument convergente lorsque $R(s)>\frac{1}{2}$; en outre elle converge uniformément dans toute région finie du plan située en entier dans le domaine illimité défini par l'inégalité $R(s)>\frac{1}{2}$. Un terme quelconque $\psi_m(s)$ de notre série étant développable en série de la forme

$$\psi_m(s)=B_0^{(m)}+B_1^{(m)}(s-1)+B_2^{(m)}(s-1)^2+\cdots$$

pour les valeurs de $s-1$ de module moindre que $\frac{1}{2}$, on aura un développement de même forme pour la somme de la série:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty}\psi_m(s)=B_0+B_1(s-1)+B_2(s-1)^2+\cdots.$$

et l'on aura généralement

$$B_r=\sum_{m=1}^{m=\infty}B_r^{(m)}.$$

En particulier

$$B_0=\sum B_0^{(m)}=\sum_{m=1}^{m=\infty}\left(c_0^{(m)}-\frac{\pi}{m\sqrt{D}}\right), \tag{12}$$

en vertu des formules (7), (9) et (10).

En remarquant que la fraction

$$\frac{1}{am^2+2bmn+2n^2}$$

est égale à

$$\frac{1}{2im\sqrt{D}}\left(\frac{1}{n-m\omega}-\frac{1}{n+m\omega'}\right)$$

où

$$\omega=\frac{-b+i\sqrt{D}}{C}$$

et

$$\omega'=\frac{b+i\sqrt{D}}{C}$$

la formule (8) nous donnera

$$c_0^{(m)} = \frac{1}{2im\sqrt{D}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left(\frac{1}{n-m\omega} - \frac{1}{n+m\omega'}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{2im\sqrt{D}} (\operatorname{cotg} m\pi\omega + \operatorname{cotg} m\pi\omega').$$

Les quantités ω et $-\omega'$ sont les racines de l'équation du second degré

$$cx^2 + 2bx + a = 0$$

on vérifie sans peine que les parties imaginaires de ω et de ω' sont positives.

Si l'on substitue la valeur précédente de $c_0^{(m)}$ dans l'équation (12) on obtient

$$B_0 = -\frac{\pi}{2i\sqrt{D}} \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[\frac{\operatorname{cotg} m\pi\omega + i}{m} + \frac{\operatorname{cotg} m\pi\omega' + i}{m}\right]$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{D}} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m} \left[\frac{e^{2m\pi i\omega}}{1-e^{2m\pi i\omega}} + \frac{e^{2m\pi i\omega'}}{1-e^{2m\pi i\omega'}}\right]$$

et, après une transformation facile

$$B_0 = -\frac{\pi}{\sqrt{D}} \sum_{m=1}^{m=\infty} [\log(1-e^{2m\pi i\omega}) + \log(1-e^{2m\pi i\omega'})]$$

$$= -\frac{\pi}{\sqrt{D}} \left[\log \eta(\omega).\eta(\omega') - \frac{\pi i}{2}(\omega+\omega')\right]$$

$$= -\frac{\pi}{\sqrt{D}} \log \eta(\omega).\eta(\omega') - \frac{\pi^2}{6c},$$

en faisant, avec M. M. Dedekind et Weber*)

$$\eta(\omega) = e^{\frac{\pi i\omega}{12}} \prod_{n=1}^{n=\infty} (1-e^{2n\pi i\omega}).$$

En se rappelant que dans le développement de $\zeta(s)$ suivant les puissances de $s-1$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + C + \cdots$$

*) Dedekind, Ueber die Theorie der ellipt. Modulfunctionen, Journal de Crelle, t. 83, Weber, Ellipt. Functionen und algebr. Zahlen.

le second coefficient est égal à la constante d'Euler

$$c = -\Gamma'(1),$$

ou tire de la formule (11) la valeur du coefficient A_0 sous la forme

$$(13)\quad A_0 = \frac{\pi}{\sqrt{D}}[\log c - \log 4 - 2\log\sqrt{D} - 2\Gamma'(1) - 2\log\eta(\omega).\eta(\omega')]$$

c'est dans cette équation que consiste le théorème de Kronecker. La formule (11) permet de calculer également les autres coefficients $A_1, A_2, \ldots$ du développement de la fonction $F(s)$ suivant les puissances de $s-1$*).

Zurich, juillet 1896.

*) Comparer la méthode qui vient d'être exposée avec celle qu'a suivie M. Jensen dans sa note sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Comptes-Rendus t. CIV, 1887.

Gustav Ferdinand Mehler†.*)

Von

M. Krause in Dresden.

Am 13. Juli vorigen Jahres starb der langjährige Lehrer der Mathematik am Elbinger Gymnasium Professor Dr. Gustav Ferdinand Mehler. Mit ihm schied ein Mann aus dem Leben, der gleich ausgezeichnet durch reiche Gaben des Geistes und des Charakters zu den Zierden des deutschen Lehrerstandes gerechnet werden muss.

Mehler wurde am 13. December 1835 als Sohn des Land- und Stadtgerichtsdirectors Mehler in Schönlanke geboren, besuchte zunächst die dortige Realschule und dann, als sein Vater 1847 nach Bromberg versetzt wurde, das dortige Gymnasium, welches er 1852 mit dem Zeugniss der Reife verliess. Seine Studienzeit verbrachte Mehler in Breslau und Berlin. Hier war vor allem der Einfluss von Dirichlet für ihn von Bedeutung. Nach gut bestandenem Staatsexamen wurde er am 1. April 1858 Mitglied des mathematischen Seminars, welches am Friedrich-Wilhelm Gymnasium in Berlin bestand und damals wie lange Jahre hernach in segensreichster Weise von Schellbach geleitet wurde. Aus jener Zeit stammen die persönlichen Beziehungen zwischen Mehler und Schellbach, die zur Herausgabe des noch zu erwähnenden Lehrbuches führten und bis zum Tode von Schellbach ununterbrochen in freunschaftlichster Weise fortgeführt wurden. Nachdem Mehler einige Zeit Hülfslehrer an verschiedenen höheren Schulen gewesen war, wurde er Ostern 1859 definitiv am Gymnasium zu Fraustadt angestellt. Ostern 1863 folgte er einem Rufe an die Realschule 1. Ordnung zu St. Johann in Danzig, um dann Michaelis 1868 zum lebhaftesten Bedauern seiner damaligen Collegen nach Elbing überzusiedeln, wo er bis zu seinem Tode in segensreichster Weise gewirkt

*) Der hier folgende Nachruf auf meinen hochverehrten einstigen Lehrer Prof. Mehler ist ein theilweiser Auszug eines etwas ausführlicher gehaltenen, welcher auf Grund einer Reihe mir zugegangener biographischer Notizen im letzten (5.) Hefte des 1. Jahrg. der Hoffmann'schen Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht veröffentlicht worden ist.

hat. In demselben Jahre wurde ihm die seltene Auszeichnung zu Theil, dass ihn die Breslauer philosophische Facultät honoris causa zum Doctor philosophiae promovirte und zwar wie es in dem Diplom heisst: „cum de gymnasiorum juventute ad matheseos cognitionem formanda et excolenda tum vero de litteris mathematicis augendis promovendisque praeclaro merito".

Im übrigen ist das Leben von Mehler gleichmässig verflossen. Er war nicht verheirathet, lebte vielmehr mit zwei Schwestern zusammen, deren Lebensglück er ausmachte. Seine Persönlichkeit schildert wohl sein langjähriger Freund und College Herr Oberlehrer Baseler in Elbing am besten, wenn er sagt:

„Aussergewöhnliche Schärfe des Verstandes und grosse Bescheidenheit schienen mir immer die Haupteigenschaften zu sein, wesswegen er von denen, die ihn näher kannten, so sehr geschätzt wurde".

Die litterarischen Arbeiten Mehlers erstrecken sich nach zwei Richtungen hin. Erstens dienen sie den Zwecken des Unterrichts und zweitens sind sie rein wissenschaftlicher Art.

Die Resultate der ersten sind zusammengefasst in seinem ausgezeichneten Lehrbuche „Hauptsätze der Elementar-Mathematik", welches wie schon bemerkt auf Anregung von Schellbach hin im Jahre 1859 erstmalig erschien und seitdem 19 Auflagen erlebt hat. Unablässig ist Mehler bemüht gewesen, das Buch in allen seinen Theilen zu vervollkommnen und practisch auszugestalten, hierbei in steter Wechselbeziehung mit Schellbach, der bis in seine letzten Jahre hinein den regsten Antheil an demselben nahm und diesen Antheil theils durch eigene kleine Beiträge, theils durch Verbesserungsvorschläge an den Tag legte.

In seinen wissenschaftlichen Arbeiten zeigt Mehler sich als Schüler von Dirichlet. Die Theorie der bestimmten Integrale mit ihren reichen und mannigfachen Anwendungen auf die Potentialtheorie, die Darstellung allgemeiner Functionen mit Hülfe gewisser Elementarfunctionen und damit zusammenhängende Probleme der Elektricitätslehre, sie sind es, denen er in erster Linie seine Aufmerksamkeit zuwendet. Rein geometrische Betrachtungen lagen ihm ferner; zwar hat er einige geometrische Arbeiten veröffentlicht, aber auch in ihnen herrscht das analytische Moment vor.

Von besonderer Bedeutung haben sich seine Arbeiten über das Problem der Elektricitätsvertheilung gezeigt. Bei denselben haben in erster Linie die Arbeiten von Heine und Carl Neumann anregend auf ihn gewirkt, während andererseits seine Resultate von den genannten Forschern eingehend gewürdigt, vielfach benutzt und weiter geführt worden sind. In diesen Arbeiten nun führt Mehler eine neue Art von Functionen ein, die er mit dem Namen der Kegel-

functionen bezeichnet, da er zu ihnen durch das Problem der Elektricitätsvertheilung auf einer in ihrem Scheitel endenden Halbkegelfläche gelangt. Diese Functionen, die Herr C. Neumann auch mit dem Namen der Mehler'schen Kegelfunctionen bezeichnet, werden nach den verschiedenen Richtungen hin untersucht, insbesondere ihr naher Zusammenhang mit den gewöhnlichen Kugelfunctionen klargelegt, dann aber wird eine Reihe von Anwendungen auf Probleme der Elektricitätsvertheilung gegeben. Wie wichtig diese Theorien sind, dürfte wohl am besten daraus zu entnehmen sein, dass Heine ihnen in seinem Lehrbuche über Kugelfunctionen ein ganzes Capitel widmet und dürften sie es in erster Linie sein, die Mehler einen bleibenden Namen auf dem Gebiete per Kugel- und verwandten Functionen sichern.

Aber auch seine übrigen Arbeiten haben eine jede ihre Bedeutung und ihren Werth. Sie zeichnen sich durch Gründlichkeit und Gediegenheit aus, sind klar und schlicht geschrieben und vermehren unsere Kenntnisse über die betreffenden Theorien auf das entschiedenste. So zeigt er in seinen Arbeiten über das Potential wie ausser den damals bekannten Flächen und Körpern noch andere — zum Theil für allgemeinere Anziehungsgesetze als das Newton'sche — der Berechnung des Potentials und der Attraktionskomponenten zugänglich gemacht werden können, in seiner Arbeit über die mechanischen Quadraturen giebt er eine glückliche Verallgemeinerung der Gauss'schen Resultate über die angenäherte Berechnung bestimmter Integrale mit Hülfe von Kugelfunctionen; — kurz überall werden die betreffenden Theorien erweitert und vertieft. So ergiebt sich auch aus den wissenschaftlichen Arbeiten das Bild eines hochbegabten für seine Wissenschaft begeisterten, bei aller Gründlichkeit und Tiefe bescheidenen und schlichten Mannes, dessen Andenken hoch zu halten in erster Linie eine Pflicht seiner Schüler und seiner Freunde ist, dann aber auch des ganzen Lehrerstandes, da er einer ihrer ausgezeichnetsten und hervorragendsten Vertreter genannt werden muss.

Wissenschaftliche Arbeiten von Mehler.

I. Journal für reine und angewandte Mathematik begründet von Crelle.

1. Ueber die Anziehung einer mit Masse belegten abwickelbaren Fläche auf einen materiellen Punkt, Band 58.
2. Ueber die Anziehung einer von zwei ähnlichen Flächen zweiten Grades begrenzten Schale, Band 60.
3. Bemerkungen zur Theorie der mechanischen Quadraturen, Band 63.
4. Note über die Evoluten sphärischer Curven, Band 64.

5. Ueber die Entwickelung einer Function von beliebig vielen Variabeln nach Laplace'schen Functionen höherer Ordnung, Band 66. Dasselbe Thema wird auch in dem Programm der Realschule von St. Johann zu Danzig aus dem Jahre 1864 behandelt.
6. Ueber die Anziehung eines homogenen Polyeders, Band 66.
7. Ueber die Vertheilung der statischen Elektricität in einem von zwei Kugelcalotten begrenzten Körper, Band 68.
8. Ueber die Benutzung einer vierfachen Mannigfaltigkeit zur Ableitung orthogonaler Flächensysteme, Band 84.

II. Mathematische Annalen begründet durch Clebsch und Neumann.

9. Ueber die Darstellung einer willkürlichen Function zweier Variabeln durch Cylinderfunctionen, Band 5.
10. Notiz über die Dirichlet'schen Integralausdrücke für die Kugelfunction $P^n(\cos\vartheta)$ und über eine analoge Integralform für die Cylinderfunction $I(x)$, Band 5.
11. Ueber eine mit den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function und ihre Anwendung in der Elektricitätsvertheilung, Band 18. Dasselbe Thema ist in dem Programm des Elbinger Gymnasiums von 1870 behandelt.
12. Zur Theorie der Vertheilung der Elektricität in leitenden Körpern, Band 18. Dasselbe Thema ist in dem Programm des Elbinger Gymnasiums von 1879 behandelt.

III. Sonstige Arbeiten.

13. Ueber abwickelbare Flächen und Curven doppelter Krümmung. Programm des Gymnasiums zu Fraustadt 1861. (Siehe auch Crelle 64.)
14. Ueber die Anziehung homogener Körper, insbesondere der Polyeder. Naturforschende Gesellschaft zu Danzig 1865.
15. Beiträge zur Potentialtheorie. Programm des Gymnasiums zu Elbing 1885.

Zwei Sätze zur Nichteuklidischen Geometrie.

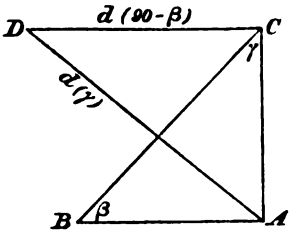
(Aus einem Briefe an Herrn F. Klein.)

Von

MAX SIMON in Strassburg i/E.

---

1) Satz: Fällt man von einem Punkt im Raume auf 2 gegebene Ebenen E_1 und E_2 die Lothe und legt durch sie die Ebene σ, so sind E_1 und E_2 schneidend, nicht sich schneidend oder parallel (Zwischenebenen, mit gemeinsamem Punkt im Unendlichen) je nachdem ihre Schnittgeraden mit σ die entsprechende Beziehung haben.



2) Construction des rechtwinkligen Dreiecks aus gegebenen spitzen Winkeln β und γ.

γ sei BCA, links CA rechts CB, errichte auf CA in C das Loth CD gleich $d(90 - \beta)$ — [$d(\varphi)$: Paralleldistanz zum Winkel φ] — schlage um D mit $d(\gamma)$ einen Kreis, der CA in A trifft; errichte in A auf CA das Loth, trifft CB in B, so ist ABC das Dreieck.

Damit sind eine ganze Anzahl Aufgaben über die Abstandslinie lösbar und die Construction des Dreiecks aus den 3 Winkeln ist zugänglich.

Strassburg im October 1896.

Berichtigungen und Ergänzungen.

Zur Abhandlung von Korkine:

Seite	317	Zeile	5	von	oben	statt calcul intégrale lies calcul intégral.
„	320	„	12	„	„	1, 2, 3, . . . i lies 1, 2, 3, . . . n.
„	328	„	12	„	unten	„ $\sum \frac{m_i}{v_i^3}$ lies $\sum \frac{m_i}{v_i^s}$.
„	347	„	2	„	„	„ n'est pas lies n'est.
„	347	„	5	„	„	„ admet lies admette.
„	362	„	9	„	oben	„ $x = z + \omega$ lies $y = z + \omega$.

Zur Abhandlung von Vivanti:

Am Schlusse der Anmerkung auf Seite 475 ist nachzutragen:

Devo ancor al Dott. v. Weber l'indicazione delle seguenti memorie i
risultati indubbiamente coincidono in parte con quelli da me ottenuti, mà di
ho potuto vedere per ora soltanto il sunto datone dal Bulletin des sciences M
o dal Jahrbuch über die Fortschritte der Math.:

M. Falk, „Ueber die Integration der linearen partiellen Differential
chungen zweiter Ordnung"; Tidsskrift for Math. och Fys. IV, 1871.

H. W. Lloyd Tanner, „On the solution of certain partial differe
equations of the second order having more than two independent variab
Proceedings of the R. Soc. of London VII, 1876, pag. 43—60;

„The solution of partial differential equation of the second order, with
number of variables, when there is a general first integral". ibid: pag. 75—

J 17/1

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig.

48. Band. 1. und 2. Heft.

Ausgegeben am 11. September.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1896.

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

1896.

Soeben sind erschienen:

Crans, Prof. Dr. **Carl**, Lehrer für Physik an der Kgl. Oberrealschule und Dozent an der Kgl. Technischen Hochschule in Stuttgart, Compendium der theoretischen äusseren Ballistik. Zum Gebrauch von Lehrern der Mechanik und Physik an Hochschulen; von Artillerieofficieren; Instructoren an Schiessschulen, Artillerieschulen und Kriegsacademien; Mitgliedern von Artillerie- und Gewehr-Prüfungscommissionen; Gewehrtechnikern. Mit 110 Figuren im Text. [XII u. 511 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 20.—

v. Lilienthal, Dr. **R.**, a. o. Professor der Mathematik an der kgl. Akademie zu Münster i. W., Grundlagen einer Krümmungslehre der Curvenscharen. [VII u. 114 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 5.—

Markoff, **A. A.**, o. Professor an der Kaiserlichen Universität zu St. Petersburg, o. Mitglied der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, Differenzenrechnung. Autorisierte deutsche Übersetzung von Theodor Friesendorff und Erich Prümm. Mit einem Vorworte von E. Meyerer, o. Prof. an der k. technischen Hochschule zu Stuttgart. [VI u. 194 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 7.—

Netto, Dr. **Eugen**, a. o. Professor der Mathematik an der Universität zu Giessen, Vorlesungen über Algebra. In zwei Bänden. Erster Band. Mit eingedruckten Holzschnitten. [X u. 382 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 12.—

Stahl, Dr. **Hermann**, Professor der Mathematik in Tübingen, Theorie der Abel'schen Funktionen. Mit Figuren im Text. [X u. 354 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 12.—

In den nächsten Tagen erscheinen:

Bianchi, **Luigi**, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Autorisierte deutsche Übersetzung von Max Lukat, Oberlehrer in Hamburg. 2 Lieferungen. 1. Lieferung. [336 S.] gr. 8. 1896. geh.

Stande, Dr. **Otto**, ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität Rostock, die Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. Ein neues Kapitel zu den Lehrbüchern der analytischen Geometrie des Raumes. Mit 49 Figuren im Text. [VIII u. 135 S.] gr. 8. 1896. geh.

Sturm, Dr. **Rudolf**, ord. Professor an der Königl. Universität zu Breslau, die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. In 3 Theilen. III. (Schluss-)Theil. Die Strahlenkomplexe zweiten Grades. gr. 8. 1896. geh.

Erschienen sind:

Cantor, **Moritz**, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. In 3 Bänden. III. (Schluss-)Band. II. Abteilung. Die Zeit von 1700 bis 1726. Mit 30 Figuren im Text. [472 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 6.—

Grassmann's, **Hermann**, gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physischen Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren Jakob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann d. J., Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel. In 3 Bänden. I. Band II. Theil: Die Ausdehnungslehre von 1862. Mit 37 Figuren im Text. [VIII u. 512 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 16.—

Koenigsberger, Dr. **Leo**, Professor der Mathematik an der Universität zu Heidelberg, Hermann von Helmholtz's Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanik. Mit einem Bildnis Hermann von Helmholtz's von Franz von Lenbach vom 30. April 1894. [IV u. 58 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 2.40.

Kohlrausch, Dr. **F.**, Präsident der physikalisch-technischen Reichsanstalt in Charlottenburg, Leitfaden der praktischen Physik mit einem Anhange das absolute Mafs-System. 8. vermehrte Aufl. [XVI u. 492 S. m. zahlr. Textfig.] gr. 8. 1896. Biegs. in Lwd. geb. n. *M* 7.—

Lie, Sophus, Geometrie der Berührungstransformationen. Dargestellt von Sophus Lie und Georg Scheffers. In 2 Bänden. I. Band. Mit Figuren im Text. [XII u. 694 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 24.—

Matthiessen, Dr. **Ludwig**, ord. Professor an der Universität zu Rostock, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. 2., wohlfeile Ausgabe. [XVI u. 1002 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 8.—

Milinowski, A., Oberlehrer am Gymnasium zu Weissenburg i. E., elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte. Mit einem Anhange über die gleichseitige Hyperbel. Mit 274 Figuren im Text. 2., wohlfeile Ausgabe. [XII u. 412 S., X u. 135 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 4.—

Minkowski, Dr. **Hermann**, o. Professor der Mathematik an der Universität Königsberg O./Pr. Geometrie der Zahlen. In zwei Lieferungen. Erste Lieferung. [240 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 8.—

Neumann, Dr. **C.**, Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig, allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen mit besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen. [XXI u. 292 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 10.—

Plücker's, Julius, gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen. Im Auftrag der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgeg. von A. Schoenflies u. Fr. Pockels. In 2 Bänden. gr. 8. geh. n. *M* 50.—

Einzeln:

I. Band: Mathematische Abhandlungen. Hrsg. von A. Schoenflies. Mit einem Bildniss Plückers und 73 in den Text gedruckten Figuren [XXXVI u. 620 S.] 1895. n. *M* 20.—

II. Band: Physikalische Abhandlungen. Hrsg. von Fr. Pockels. Mit 78 Textfiguren und 9 Tafeln. [XVIII u. 834 S.] 1896. n. *M* 30.—

Schlegel, Dr. **V.**, Professor an der Gewerbeschule in Hagen, die Grassmann'sche Ausdehnungslehre. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik in den letzten fünfzig Jahren. [44 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 2.—

Stolz, Dr. **Otto**, ord. Professor an der Universität zu Innsbruck, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. In 2 Theilen. II. Theil: Complexe Veränderliche und Functionen. Mit 33 Figuren im Text. [IX u. 338 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 8.—

Volkmann, P., ord. Professor an der Universität Königsberg i. Pr., Franz Neumann. * 11. September 1798, † 23. Mai 1895. Ein Beitrag zur Geschichte deutscher Wissenschaft. Dem Andenken an den Altmeister der mathematischen Physik gewidmete Blätter unter Benutzung einer Reihe von authentischen Quellen. Mit einem Bildniss Franz Neumann's. [VII u. 68 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 2.40.

—— erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart. Allgemein wissenschaftliche Vorträge. [XII u. 181 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 6.—

Weiler, Dr. **A.**, in Zürich, neue Behandlung der Parallelprojektionen und der Axonometrie. Mit 109 Figuren im Text. 2. wohlfeile Ausgabe. [VII u. 210 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 2.80.

Wüllner, Adolph, Lehrbuch der Experimentalphysik. 4 Bände. Erster Band. Allgemeine Physik und Akustik. Fünfte, vielfach umgearbeitete und verbesserte Aufl. Mit 321 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. [X u. 1000 S.] gr. 8. 1895. geh. n. *M* 12.—

Zweiter Band. Die Lehre von der Wärme. Fünfte, vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. Mit 131 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. [XI u. 936 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 12.—

[Band III, Magnetismus und Elektrizität, ist unter der Presse, Band IV, Lehre vom Licht, in Vorbereitung.]

Soeben erschienen:

Weber, Prof. Heinrich, **Lehrbuch der Algebra.** **Zweiter Band.** Preis 20 ℳ

Dasselbe Werk complet in zwei Bänden. Mit Abbildung. Preis **36** ℳ

Verlag v. Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig.) Zu beziehen d. a. Buchhdlg.

INHALT.

	Seite
Ueber die hypergeometrische Function mit einem Nebenpunkt. (Mit einer Figurentafel.) Von E. Ritter †	1
Ueber ein discontinuirliches Integral. Von E. Gubler in Zürich	37
Concerning Transcendentally Transcendental Functions. By Eliakim Hastings Moore of Chicago	49
Sur les résidus des fonctions définies par les équations différentielles. Par Mr. Michel Petrovitch à Belgrade Serbie	75
Ueber die Irreductibilität ganzzahliger ganzer Functionen. Von Eugen Netto in Giessen	82
On the Stability of a Frictionless Liquid. Theory of Critical Planes. By A. B. Basset of Holyport, Berks.	89
Zur Theorie der linearen Substitutionen. Von Alfred Loewy in Rawitsch	97
Zur projectiven Geometrie. Von M. Pasch in Giessen	111
Ueber quadratische Transformationen und rationale Flächen mit Kegelschnittschaaren. Von Th. Reye in Strassburg i. E.	115
Ueber einige einfache Fachwerke. Von Friedrich Schur in Aachen	142
Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene. Von A. Wiman in Lund	195

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figurentafeln, welche dieselben im Texte nicht oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen, uns gefälligst in sauberer, reiner Ausführung stets **auf besonderen Blättern**, welche nicht in der gewünschten Grösse und in thunlichst **präciser Zeichnung** den Manuscripten beizulegen. Ausserdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaction.

☞ Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfasst 30 bis 38 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4 bis 6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Redacteure: W. Dyck, München, Hildegardstr. 17/I. **F. Klein**, Leipzig, Königsstr. 1, II. **A. Mayer**, Leipzig, Königsstr. 1, II.

B. G. Teubner in Leipzig.

✓ 179

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig.

48. Band. 3. Heft.

Ausgegeben am 22. Dezember.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1896.

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

1896. 1897.

Bianchi, Luigi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Autorisierte deutsche Übersetzung von Max Lukat, Oberlehrer in Hamburg. 2 Lieferungen. I. Lieferung. [IV u. 336 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 12.—

Cranz, Prof. Dr. Carl, Lehrer für Physik an der Kgl. Oberrealschule und Dozent an der Kgl. Technischen Hochschule in Stuttgart, Compendium der theoretischen äusseren Ballistik. Zum Gebrauch von Lehrern der Mechanik und Physik an Hochschulen; von Artillerieofficieren; Instructoren an Schiessschulen, Artillerieschulen und Kriegsacademien; Mitgliedern von Artillerie- und Gewehr-Prüfungscommissionen; Gewehrtechnikern. Mit 110 Figuren im Text. [XII u. 511 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 20.—

Gundelfinger, Prof. Dr. S., Tafeln zur Berechnung der reellen Wurzeln sämtlicher trinomischer Gleichungen. Hinzugefügt sind vierstellige Additions-, Subtraktions und Briggische Logarithmen sowie eine Interpolationstafel für alle Differenzen unter Hundert. [IV u. 15 S.] 4. 1897. Steif geh. n. *M* 1.40.

v. Lilienthal, Dr. R., a. o. Professor der Mathematik an der kgl. Akademie zu Münster i. W., Grundlagen einer Krümmungslehre der Curvenscharen. [VII u. 114 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 5.—

Markoff, A. A., o. Professor an der Kaiserlichen Universität zu St. Petersburg, o. Mitglied der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, Differenzenrechnung. Autorisierte deutsche Übersetzung von Theophil Friesendorff und Erich Prümm. Mit einem Vorworte von R. Mehmke, o. Prof. an der k. technischen Hochschule zu Stuttgart. [VI u. 191 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 7.—

Netto, Dr. Eugen, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität zu Giessen, Vorlesungen über Algebra. In zwei Bänden. Erster Band. Mit eingedruckten Holzschnitten. [X u. 388 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 12.—

Schlesinger, Prof. Dr. Ludwig, Privatdozent an der Universität Berlin, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. In 2 Bänden. II. Band. I. Theil. Mit Figuren im Text. [XVIII u. 532 S.] gr. 8. 1897. geh. n. *M* 18.—

Stahl, Dr. Hermann, Professor der Mathematik in Tübingen, Theorie der Abel'schen Functionen. Mit Figuren im Text. [X u. 354 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 12.

Staude, Dr. Otto, ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität Rostock, die Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. Ein neues Kapitel zu den Lehrbüchern der analytischen Geometrie des Raumes. Mit 49 Figuren im Text. [VIII u. 185 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 7.—

Sturm, Dr. Rudolf, ord. Professor an der Königl. Universität zu Breslau, die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. In 3 Theilen. I. Theil. Die Strahlencomplexe zweiten Grades. [XXIV u. 548 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 18.

Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.

Durch **jede Buchhandlung** zu beziehen:

Die Geometrie der Lage.

Vorträge von Prof. Dr. **Th. Reye**, ord. Professor a. d. Universität Strassburg.

Abt. II (3. Aufl.). Mit 26 Textfiguren. Brosch. 9 Mk., in Halbfranz gebunden 11 Mk.

Abt. III (neu). Brosch. 6 Mk., in Halbfranz gebunden 8 Mk.

Bereits früher erschien:

Abt. I (3. Aufl.). Mit 92 Textfiguren. Brosch. 7 Mk., in Halbfranz gebunden 8 Mk.

Aus einer Besprechung von Guido Hauck: „Unserem Verfasser gebührt das Verdienst, das System jenes grossen Geometers (Staudt) von seinen Einseitigkeiten befreit und dadurch nicht nur schmackhaft, sondern vor allem für die Weiterförderung der Wissenschaft nutzbar gemacht zu haben. Diese hat denn auch in den letzten Dezennien eine überaus fruchtbare Weiterentwickelung erfahren, an welcher der Verfasser durch seine bahnbrechenden Arbeiten in hervorragender Weise beteiligt war. Es sei dabei namentlich auf den Ausbau der Liniengeometrie hingewiesen .... Das auch bereits ins Französische und Italienische übersetzte Werk stellt in dieser seiner neuen Auflage das vollständigste Lehrbuch der neueren Geometrie dar"

Freie Perspektive (Centrale Projektion)

in ihrer Begründung und Anwendung

von Dr. **G. A. V. Peschka,**

K. K. Regier.-Rat, ord. Prof. d. darstellenden Geometrie, Ritter usw.

Zweite vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage in 2 Bänden.

Bd. I. Mit 13 lithogr. Tafeln. Brosch. 14 Mk., in Halbfr. geb. 16 Mk.

Bd. II. Mit 30 Textfiguren u. 16 lithogr. Tafeln. Brosch. 14 Mk., in Halbfr. geb. 16 Mk.

Die erste Auflage bereits besprach s. Z. (Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. XIV Heft 1) Geh. Rat Prof Schlömilch, Dresden, mit den Worten: Referent glaubt nicht zu irren, wenn er das vorliegende Werk für das beste neuere Lehrbuch der Perspektive erklärt.

Ueber die neue Auflage aber sagt die Zeitschr. f. mathemat. u. naturwissensch. Unterr.: „Die Darstellung ist ausserordentlich klar. Eine Fülle interessanter und elegant durchgeführter Aufgaben dient zur Durcharbeitung des Stoffes, wie zur Vertiefung der Theorie. Das Buch wird jedem Freunde geometrischer Forschung volle Befriedigung gewähren"

Verlag von B. F. Voigt in Weimar.

Elementarbuch der

Differential- und Integralrechnung

mit zahlreichen Anwendungen aus der Analysis, Geometrie, Mechanik, Physik etc.

für höhere Lehranstalten und den Selbstunterricht bearbeitet von

Fr. Autenheimer,

gew. Direktor des zürcherischen Technikums zu Winterthur.

Vierte verbesserte Auflage.

Mit 157 Abbildungen.

8. Geh. 9 Mark.

Vorrätig in allen Buchhandlungen.

INHALT.

	Seite
Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques. Par MM. G. Castelnuovo à Rome et F. Enriques à Bologne	241
Sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre. Par A. Korkine à St. Pétersbourg	317
Beiträge zu Riemann's Integrationsmethode für hyperbolische Differentialgleichungen, und deren Anwendungen auf Schwingungsprobleme. Von W. Wirtinger in Innsbruck	365
Construction du polygone régulier de 17 côtés au moyen du seul compas. Par Mr. L. Gérard à Lyon	390
Ueber Functionen zweier reeller Variablen. Von Otto Biermann in Brünn	393
Projective Erzeugung der Curven n^ter Ordnung C^n. Von Carl Küpper in Prag	401
Zur Theorie der adjungirten Substitutionen. Von Gustav Rados in Budapest	417
Ueber transfinite Zahlen. Von Wilhelm Killing in Münster i. W.	425

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — die bekanntlich im Texte selbst, oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — in möglichst correcter und exacter Ausführung stets **auf besonderen Blättern**, welche sich in der gewünschten Grösse und in thunlichst präciser **Zeichnung** den Manuscripten beilegen zu wollen. **Ausserdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.**

Die Redaction.

☞ **Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfasst 36—38 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.**

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortliche Redacteure: **W. Dyck**, München, Hildegardstr. 17/I, **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **A. Mayer**, Leipzig, Königsstr. 1, II.

Beilagen von

Gebrüder Blum, Holländische Cigarrenfabrik in **Goch, Rheinpreußen.**

Librairie Scientifique A. Hermann, Paris und **B. G. Teubner** in Leipzig.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststrasse 3.

✓ 179

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig.

48. Band. 4. Heft.

Ausgegeben am 19. Januar.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1897.

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

1896. 1897.

Bianchi, Luigi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Autorisierte deutsche Übersetzung von Max Lukat, Oberlehrer in Hamburg. 2 Lieferungen. I. Lieferung. [IV u. 336 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 12.—

Crans, Prof. Dr. **Carl,** Lehrer für Physik an der Kgl. Oberrealschule und Dozent an der Kgl. Technischen Hochschule in Stuttgart, Compendium der theoretischen äusseren Ballistik. Zum Gebrauch von Lehrern der Mechanik und Physik an Hochschulen; von Artillerieoffizieren; Instructoren an Schiessschulen, Artillerieschulen und Kriegsacademien; Mitgliedern von Artillerie- und Gewehr-Prüfungscommissionen; Gewehrtechnikern. Mit 110 Figuren im Text. [XII u. 511 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 20.—

Föppl, Dr. **A.,** Prof. der Mechanik an der Technischen Hochschule in München, die Geometrie der Wirbelfelder. In Anlehnung an das Buch des Verf. über die Maxwell'sche Theorie der Elektricität und zu dessen Ergänzung. [X u. 108 S.] gr. 8. 1897. geh. n. ℳ 3.60.

Gundelfingar, Prof. Dr. **S.,** Tafeln zur Berechnung der reellen Wurzeln sämtlicher trinomischer Gleichungen. Hinzugefügt sind vierstellige Additions-, Subtraktions- und Briggische Logarithmen sowie eine Interpolationstafel für alle Differenzen unter Hundert. [IV u. 16 S.] 4. 1897. Steif geh. n. ℳ 1.40.

v. Lilienthal, Dr. **R.,** o. ö. Professor der Mathematik an der kgl. Akademie zu Münster i. W., Grundlagen einer Krümmungslehre der Curvenscharen. [VII u. 114 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 5.—

Markoff, A. A., o. Professor an der Kaiserlichen Universität zu St. Petersburg, o. Mitglied der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, Differenzenrechnung. Autorisierte deutsche Übersetzung von Theophil. Friesendorff und Erich Pihan. Mit einem Vorworte von R. Mehmke, o. Prof. an der k. technischen Hochschule zu Stuttgart. [VI u. 194 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 7.—

Netto, Dr. **Eugen,** o. ö. Professor der Mathematik an der Universität zu Giessen, Vorlesungen über Algebra. In zwei Bänden. Erster Band. Mit eingedruckten Holzschnitten. [X u. 388 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 12.—

Schlesinger, Prof. Dr. **Ludwig,** Privatdozent an der Universität Berlin, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. In 2 Bänden. II. Band. I. Theil. Mit Figuren im Text. [XVIII u. 532 S.] gr. 8. 1897. geh. n. ℳ 18.—

Serret, J.-A., † Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, Paris, Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Dr. Axel Harnack, † Prof. an der Technischen Hochschule zu Dresden. Zweite, durchgesehene Auflage von Dr. G. Bohlmann, Privatdocent an der Universität zu Göttingen. In zwei Bänden. I. Band. Differentialrechnung. Mit 85 in den Text gedruckten Figuren. [XVI u. 570 S.] gr. 8. 1897. geh. n. ℳ 10.—.

Stahl, Dr. **Hermann,** Professor der Mathematik in Tübingen, Theorie der Abel'schen Functionen. Mit Figuren im Text. [X u. 354 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 12.—

Staude, Dr. **Otto,** ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität Rostock, die Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. Ein neues Kapitel zu den Lehrbüchern der analytischen Geometrie des Raumes. Mit 49 Figuren im Text. [VIII u. 185 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 7.—

Sturm, Dr. **Rudolf,** ord. Professor an der Königl. Universität zu Breslau, die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. In drei Theilen. III. (Schluss-)Theil. Die Strahlenkomplexe zweiten Grades. [XXIV u. 518 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 18.—

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Hettner's Geographische Zeitschrift

ist die

verbreitetste geographische Zeitschrift.

Monatlich 1 illustr. Heft von ca. 60 S. Halbjährl. 8 Mk.

Jedes Heft enthält:

I. Mehrere Original-Aufsätze.
II. Berichte über die Fortschritte der Geographie.
III. Kleinere Mitteilungen.
IV. Geographische Neuigkeiten.
V. Neu erschienene Bücher und Karten.
VI. Bücher- und Kartenbesprechungen.
VII. Zeitschriftenschau.

Prospekte und Probehefte gratis und franko von der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststr. 3. Abonnements nehmen alle Postanstalten und Buchhandlungen an.

Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.

Durch **jede Buchhandlung** zu beziehen:

Die Geometrie der Lage.

Vorträge von Prof. Dr. **Th. Reye**, ord. Professor a. d. Universität Strassburg.

Abt. II (3. Aufl.). Mit 26 Textfiguren. Brosch. 9 Mk., in Halbfranz gebunden 11 Mk.

Abt. III (neu). Brosch. 6 Mk., in Halbfranz gebunden 8 Mk.

Bereits früher erschien:

Abt. I (3. Aufl.). Mit 92 Textfiguren. Brosch. 7 Mk., in Halbfranz gebunden 8 Mk.

Aus einer Besprechung von Guido Hauck: „Unserem Verfasser gebührt das Verdienst, das System jenes grossen Geometers (Staudt) von seinen Einseitigkeiten befreit und dadurch nicht nur schmackhaft, sondern vor allem für die Weiterförderung der Wissenschaft nutzbar gemacht zu haben. Diese hat denn auch in den letzten Dezennien eine überaus fruchtbare Weiterentwickelung erfahren, an welcher der Verfasser durch seine bahnbrechenden Arbeiten in hervorragender Weise beteiligt war. Es sei dabei namentlich auf den Ausbau der Liniengeometrie hingewiesen. Das auch bereits ins Französische und Italienische übersetzte Werk stellt in dieser seiner neuen Auflage das vollständigste Lehrbuch der neueren Geometrie dar."

Freie Perspektive (Centrale Projektion)

in ihrer Begründung und Anwendung

von Dr. **G. A. V. Peschka**,

K. K. Regier.-Rat, ord. Prof. d. darstellenden Geometrie, Ritter usw.

Zweite vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage in 2 Bänden.

Bd. I. Mit 13 lithogr. Tafeln. Brosch. 14 Mk., in Halbfr. geb. 16 Mk.

Bd. II. Mit 30 Textfiguren u. 16 lithogr. Tafeln. Brosch. 14 Mk., in Halbfr. geb. 16 Mk.

Die erste Auflage bereits besprach s. Z. (Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. XIV Heft 1; Geh. Rat Prof. Schlömilch, Dresden, mit den Worten: Referent glaubt nicht zu irren, wenn er das vorliegende Werk für das beste neuere Lehrbuch der Perspektive erklärt.

Ueber die neue Auflage aber sagt die Zeitschr. f. mathemat. u. naturwissensch. Unterr.: „Die Darstellung ist ausserordentlich klar. Eine Fülle interessanter und eleg. durchgeführ[ter] [Aufg]aben dient zur Durcharbeitung des Stoffes, wie zur Vertiefung der [Th]eorie. Das Buch wird jedem Freunde geometrischer Forschung volle Befried[igung]."

Mathematisch-Physikalische und Astronomische Bibliothek

des

† Prof. Dr. D. Bierens de Haan

in **Leiden.**

Die Versteigerung dieser reichhaltigen Bibliothek wird Ende Januar 1897 bei uns stattfinden. Der Catalog ist in Vorbereitung; derselbe enthält eine grössere Anzahl von werthvollen Zeitschriften und die meist bedeutendsten Werke älterer und neuerer Schriftsteller. Die Bibliothek umfasst 3500 Werke, wobei auch naturwissenschaftliche Werke Zoologie, Botanik und Chemie.

Der Catalog ist auf Anfrage gratis zu beziehen.

Leiden,
Januar 1897.

Burgersdijk & Niermans,
„Templum Salomonis".

INHALT.

	Seite
Ueber Zahlengruppen in algebraischen Körpern. Von H. Weber in Strassburg	433
Sulle equazioni a derivate parziali del second' ordine a tre variabili indipendenti. Von G. Vivanti in Messina	474
Ueber das Princip der kleinsten Action und das Hamilton'sche Princip. Von Moritz Réthy in Budapest	513
Ueber Gruppen, deren sämmtliche Theiler Normaltheiler sind. Von R. Dedekind in Braunschweig	548
Autographirte Vorlesungshefte, III. Von Felix Klein in Göttingen	562
Ueber das gemischte Produkt. Von Emil Müller in Königsberg i Pr.	589
Sur une formule fondamentale de Kronecker. Par J. Franel a Zürich	595
Gustav Ferdinand Mehler †. Von M. Krause in Dresden	603
Zwei Sätze zur nichteuklidischen Geometrie. Von Max Simon in Strassburg i E.	607
Berichtigungen und Ergänzungen	608

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exacten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewunschten Grösse und in thunlichst präciser Zeichnung den Manuscripte beilegen zu wollen. Ausserdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaction.

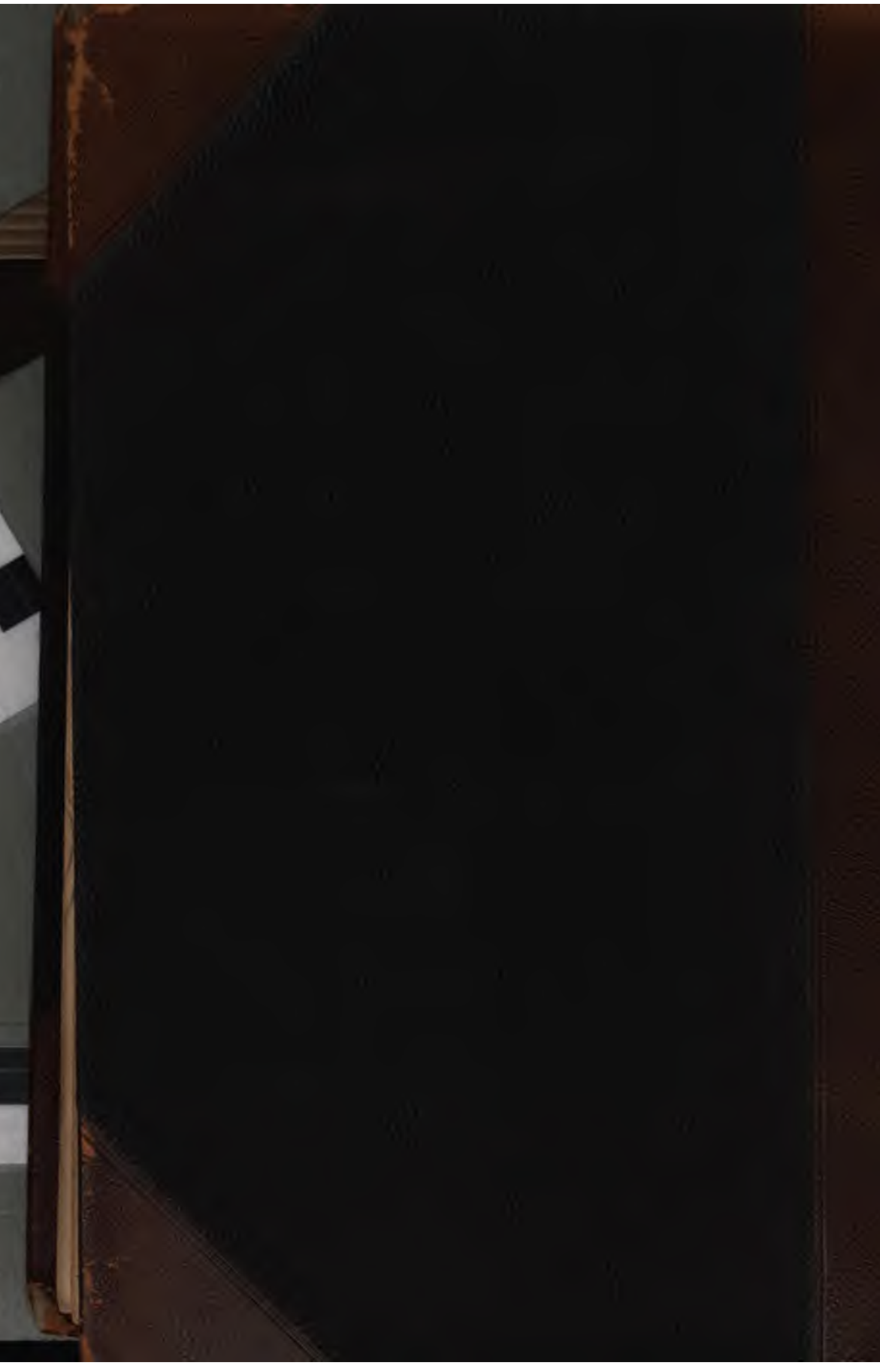
Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfasst 36—38 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortliche Redaction: **W. Dyck**, München, Hildegardstr. 1½, **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **A. Mayer**, Leipzig, Königsstr. 1, II.

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststrasse 3.

MATHEMATICS-STATIS
LIBRARY

STORAGE AREA

STORAGE AREA